NMEK531 Matematická ekonomie

Vojtěch Jandl, Miloš Kopa

Naposledy upraveno dne 20. prosince 2023.

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Obsah

1 Teorie užitku

Před studiem teorie užitku je nutné si uvědomit, že různé osoby mohou vnímat jako užitečné různé věci, každý z nás má různé preference, což si můžeme ukázat na následujících příkladech.

Příklady.

- Při návštěvě restauračního zařízení si můžeme vybrat ze dvou možností: a) poloviční porce hlavního chodu a k tomu 2 nápoje dle výběru b) celý hlavní chod a pouze 1 nápoj dle výběru – zde je zřejmé, že hladovější si zvolí možnost b), zatímco žíznivější možnost a).
- Preference často závisí také na movitosti dané osoby – pro mladou rodinu je nemyslitelné (pokud to není nezbytně nutné), že by každý z páru měl svůj automobil, důležitější může být vlastní bydlení. Pokud však již vlastní nemovitostí disponují, je užitek z druhého automobilu výrazně vyšší.

1.1 Axiomatická teorie užitku

Hlavním cílem této podkapitoly je vyslovení předpokladů pro existenci kardinální/ordinální užitkové funkce.

1.1.1 *Základní pojmy, definice a značení*

Klíčovými pojmy v teorii užitku jsou binární relace a množina alternativ, uveďme si nyní značení a potřebné definice, které nás budou provázet při budování teorie.

Značení. Písmenem $\mathbf{X}$ budeme značit základní množinu alternativ, tedy možností, mezi kterými se rozhodujeme. Pro binární relaci na kartézském součinu $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$ využijeme značení $\mathbf{R}$, v souvislosti s binární relací budeme využívat zápis $(x, y) \in \mathbf{R} \Leftrightarrow x\mathbf{R}y$. V následujícím bude užitečný pojem doplňkové relace $\bar{\mathbf{R}}$, přičemž $x\bar{\mathbf{R}}y \Leftrightarrow (x, y) \notin \mathbf{R}$.

Pro porozumění složitějším pojmům je důležité zopakování základních typů binárních relací.

Definice 1.1 Binární relace $\mathbf{R}$ na $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$ se nazývá:

1. reflexivní, je-li $x\mathbf{R}x, \forall x \in \mathbf{X}$.
2. irreflexivní, jestliže $x\bar{\mathbf{R}}x, \forall x \in \mathbf{X}$. ($x$ není v relaci samo se sebou)
3. symetrická, pokud $x\mathbf{R}y \Rightarrow y\mathbf{R}x, \forall x, y \in \mathbf{X}$.

4. asymetrická, když $x\mathbf{R}y \Rightarrow y\bar{\mathbf{R}}x, \forall x, y \in \mathbf{X}$.
5. antisymetrická, jestliže $x\mathbf{R}y \wedge y\mathbf{R}x \Rightarrow x \equiv y, \forall x, y \in \mathbf{X}$.
6. tranzitivní, je-li $x\mathbf{R}y \wedge y\mathbf{R}z \Rightarrow x\mathbf{R}z, \forall x, y, z \in \mathbf{X}$.
7. negativně tranzitivní, pokud $\bar{\mathbf{R}}$ je tranzitivní.
8. úplná, když $x\mathbf{R}y \vee y\mathbf{R}x, \forall x, y \in \mathbf{X}$.
9. slabě úplná, pokud $x\mathbf{R}y \veebar y\mathbf{R}x, \forall x \not\equiv y \in \mathbf{X}$.

Kombinací výše specifikovaných vlastností získáme některé další důležité třídy relací.

Definice 1.2 Binární relace $\mathbf{R}$ na $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ se nazývá:

1. slabé uspořádání, je-li asymetrická a negativně tranzitivní (nemusí tedy být možné porovnat všechny dvojice $x, y \in \mathbf{X}$).
2. striktní uspořádání, pokud je slabým uspořádáním a je navíc slabě úplná (různé prvky jsme vždy schopni porovnat).
3. ekvivalence, jestliže je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Definice 1.3 Nechť $\mathbf{I}$ je ekvivalence na $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ a $\bar{x} \in \mathbf{X}$. Potom $a(\bar{x}) = \{x \in \mathbf{X} | x\mathbf{I}\bar{x}\}$ se nazývá třída ekvivalence s generátorem $\bar{x}$.

Příklady.

- $\mathbf{R} \equiv >$ na $\mathbb{R}$ je klasickým příkladem relace, která je striktním uspořádáním.
- $\mathbf{R} \equiv >$ na $\mathbb{R}^n$ naráží na problémy s neporovnatelností některých prvků, např. není jasné, jak naložit s vektory $(1, 2)$ a $(2, 1)$. Tento problém však nenastává pro vektory $(1, 2)$ a $(0, 1)$, odtud můžeme nahlédnout, že tato relace je pouze slabým uspořádáním.
- V případě $\mathbf{R} \equiv \geq$ jsou třídy ekvivalence pouze jednoprvkové (neboť musí nastávat rovnost).

Při porovnávání dvou alternativ nás zajímá, která z nich je v nějakém smyslu lepší. K vyjádření tohoto vztahu nám poslouží pojem tzv. preferenční relace, v následující definici jsou vyjmenovány druhy těchto relací.

Definice 1.4 Nechť $x, y \in \mathbf{X}$, situaci, kdy

1. x je lepší než y, značíme $x \succ y$.
2. x je horší než y, značíme $x \prec y$.
3. x je indiferentní (stejně dobré jako) y, značíme $x \sim y$.

4. x je lepší nebo stejně dobré jako y, značíme $x \succsim y$.

5. x je horší nebo stejně dobré jako y, značíme $x \precsim y$.

Preferenční relace má mnohé pěkné vlastnosti, kvůli kterým je užitečná jako základní kámen teorie, kterou si vyložíme.

Věta 1.1
1. Relace $\succ$ ($\prec$) je tranzitivní.
2. Relace $\sim$ je ekvivalencí.
3. Pokud $x \succ y$ a $y \sim z$, potom $x \succ z$.
   Pokud $x \sim y$ a $y \succ z$, potom $x \succ z$.
4. Relace $\succsim$ je tranzitivní a úplná.

Existence ordinální užitkové funkce

Jedním z klasických nástrojů pro teorii užitku je ordinální užitková funkce, kterou představujeme v následující definici

Definice 1.5 Reálná funkce $u : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ se nazývá ordinální užitková funkce, jestliže $u(x) > u(y) \Leftrightarrow x \succ y, \forall x, y \in \mathbf{X}$.

Poznámka.
1. $\forall x, y \in \mathbf{X}$ přímo z definice plyne také
   - $u(x) < u(y) \Leftrightarrow x \prec y$.
   - $u(x) = u(y) \Leftrightarrow x \sim y$.
   - $u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow x \succsim y$.
   - $u(x) \leq u(y) \Leftrightarrow x \precsim y$.
2. Množina $\{x \in \mathbf{X} | u(x) = \text{const.}\}$ je prvkem množiny $\mathbf{X}| \sim$ (množiny tříd ekvivalence dané relací indiference na $\mathbf{X}$), je-li tato množina neprázdná. Je-li $a(\bar{x}) \in \mathbf{X}| \sim$, pak $a(\bar{x}) = \{x \in \mathbf{X} | u(x) = u(\bar{x})\}$.

Uveďme si postačující podmínku pro existenci ordinální užitkové funkce, která nám může výrazně usnadnit výběr vhodné alternativy.

Věta 1.2 Nechť $\mathbf{X}| \sim$ je spočetná, potom existuje ordinální užitková funkce.

Pro odvození nutné a postačující podmínky je zapotřebí pojem hustoty množin v $\mathbf{X}| \sim$ vzhledem k relaci $\prec$.

Definice 1.6 Množina $A \subset \mathbf{X}| \sim$ se nazývá hustá v $\mathbf{X}| \sim$ vzhledem k relaci $\prec$, jestliže pro libovolné $x, y \in \mathbf{X}| \sim$, $x, y \notin A, x \prec y$ existuje $z \in A$ takové, že $x \prec z \prec y$ (symbol $\prec$ je zde využit ve smyslu "pro všechny prvky ze tříd ekvivalence platí")

Věta 1.3 Nechť $\mathbf{X}| \sim$ je nespočetná, potom existuje ordinální užitková funkce právě tehdy, když v množině $\mathbf{X}| \sim$ existuje spočetná hustá podmnožina.

Značení. V dalším využíváme značení $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(1)} \times \mathbf{X}^{(2)} \times \ldots \times \mathbf{X}^{(n)} \subset \mathbb{R}^n$, kde $\mathbf{X}^{(k)}, k = 1, \ldots, n$ je otevřený interval. V souladu s příkladem o uspořádání definujeme $x \le y \Leftrightarrow x_i \le y_i, \forall i = 1, \ldots, n$ a $x < y \Leftrightarrow x \le y \wedge x \ne y$.

Nyní si uveďme sadu axiomů, které jsou postačující pro existenci ordinální užitkové funkce na $\mathbf{X}$ (ve smyslu nově zavedeného značení).

(A1) Relace $\prec$ je slabé uspořádání na $\mathbf{X}$.

(A2) $x < y \Rightarrow x \prec y, \forall x, y \in \mathbf{X}$ (horší ve všech složkách znamená horší celkově).

(A3) Nechť $x \prec y \prec z$. Potom existují $\alpha, \beta \in (0,1)$ tak, že

$$\alpha x + (1-\alpha)z \prec y \wedge \beta x + (1-\beta)z \succ y.$$

(pro intuici α blízké 1 a β blízké 0)

Věta 1.4 Nechť $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(1)} \times \mathbf{X}^{(2)} \times \ldots \times \mathbf{X}^{(n)}$ a platí axiomy (A1), (A2) a (A3), potom existuje ordinální užitková funkce na $\mathbf{X}$.

Pokud je navíc relace $\prec$ v následujícím smyslu spojitá (A4), je spojitá i příslušná ordinální užitková funkce.

Definice 1.7 Relace $\prec$ na $\mathbf{X}$ se nazývá spojitá na $\mathbf{X}$, jestliže množiny

$$P_y^- = \{x \in \mathbf{X}, x \prec y\}, P_y^+ = \{x \in \mathbf{X}, x \succ y\} \text{ jsou pro všechna } y \in \mathbf{X} \text{ otevřené.}$$

Věta 1.5 Nechť $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(1)} \times \mathbf{X}^{(2)} \times \ldots \times \mathbf{X}^{(n)}$ a platí axiomy (A1), (A2), (A3) a (A4), potom existuje spojitá ordinální užitková funkce na $\mathbf{X}$.

Přidáme-li k předchozím předpokladům navíc ještě předpoklad konvexity relace $\prec$ (A5) v následujícím smyslu, získáme postačující podmínku pro kvazi-konkavitu ordinální užitkové funkce.

Definice 1.8 Relace $\prec$ se nazývá konvexní preferenční relace na $\mathbf{X}$, jestliže množiny $L_y \equiv \{x \in \mathbf{X} | x \succsim y\}$ jsou konvexní podmnožiny $\mathbf{X}, \forall y \in \mathbf{X}$.

Věta 1.6 Preferenční relace $\prec$ splňující axiomy (A1), (A2) a (A3) na $\mathbf{X}$ je konvexní právě tehdy, když

1. $\forall X^{(1)} \precsim X^{(2)} \in \mathbf{X} \Rightarrow X^{(1)} \precsim \alpha X^{(1)} + (1-\alpha) X^{(2)}, \forall \alpha \in (0,1)$
2. $L_y \equiv \{x \in \mathbf{X} | x \succ y\}$ jsou konvexní podmnožiny $\mathbf{X}, \forall y \in \mathbf{X}$
3. ordinální užitková funkce u na $\mathbf{X}$ je kvazi-konkávní.

Poznámka.
- Funkce u je kvazi-konkávní právě tehdy, když $L_y = \{x \in \mathbf{X} | u(x) \geq y\}$ jsou konvexní $\forall y \in \mathbb{R}$.
- Nechť $X^{(1)}, X^{(2)} \in \mathbf{X}$. Funkce u je konkávní, pokud $\forall \lambda \in (0,1)$ platí
$$\lambda u(X^{(1)}) + (1-\lambda)u(X^{(2)}) \leq u(\lambda X^{(1)} + (1-\lambda)X^{(2)}).$$
- Nechť $X^{(1)}, X^{(2)} \in \mathbf{X}$. Funkce u je kvazi-konkávní, pokud $\forall \lambda \in (0,1)$ platí
$$\min\{u(X^{(1)}), u(X^{(2)})\} \leq u(\lambda X^{(1)} + (1-\lambda)X^{(2)}).$$

Definice 1.9 Relace $\prec$ se nazývá striktně konvexní, jestliže $\forall X^{(1)} \prec X^{(2)} \in \mathbf{X} \Rightarrow X^{(1)} \prec \alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(2)}, \forall \alpha \in (0,1)$.

Množina nejlepších prvků

Nyní si s využitím znalostí z teorie optimalizace uveďme podmínky pro existenci nejlepšího prvku v nějaké podmnožině $M \in \mathbf{X}$ množiny množiny všech alternativ.

Definice 1.10 Nechť $M \subset \mathbf{X}$. Prvek $\bar{x} \in M$ se nazývá nejlepším prvkem množiny M, jestliže $\bar{x} \gtrsim x, \forall x \in M$.

Věta 1.7 Nechť množina $M \subset \mathbf{X}$ je konvexní a nechť relace $\prec$ je rovněž konvexní. Potom množina nejlepších prvků (MNP) je konvexní.

Věta 1.8 Nechť množina $M \subset \mathbf{X}$ je konvexní a nechť relace $\prec$ je striktně konvexní. Potom, pokud v M existuje nejlepší prvek, je jediný (množina MNP je tedy jednobodová).

Pokud je množina M kompaktní, což je v $\mathbb{R}^n$ ekvivalentní omezenosti a uzavřenosti, pak je pro spojitou relaci $\prec$ již MNP neprázdná.

Důsledek. Pokud je navíc relace $\prec$ spojitá a M kompaktní, potom

- v situaci Věty 1.7 je MNP neprázdná a konvexní.
- v situaci Věty 1.8 je MNP jednobodová.

V praxi nám však nestačí porovnávat pouze dvojici alternativ, chceme totiž být schopni porovnat také dvojice těchto porovnání, viz následující příklad.

Příklad. Raději budeme mít 1000 Kč než 10 Kč, také můžeme mít raději jahodovou zmrzlinu více než meruňkovou. Získaný užitek v prvním případě však bude (za standardních podmínek) výrazně vyšší, než když si dáme druhý druh zmrzliny.

1.1.2 Kardinální užitkové funkce

V této sekci si zavedeme pojem kardinální užitkové funkce, která má kvůli svým vlastnostem větší využití. Ke konstrukci využijeme novou sadu axiomů.

(AI) Relace $\prec$ je slabé uspořádání.

(AII) Nechť $P \lesssim Q \lesssim R \in \mathbf{X}$, potom $\{\alpha | \alpha P + (1-\alpha)R \lesssim Q\}$ a $\{\alpha | \alpha P + (1-\alpha)R \gtrsim Q\}$ jsou uzavřené množiny.

(AIII) Nechť $P \sim Q \in \mathbf{X}$, pak $\alpha P + (1-\alpha)R \sim \alpha Q + (1-\alpha)R, \forall R \in X, \forall \alpha \in (0,1)$ (kontaminace neporuší indiferenci).

Definice 1.11 Nechť $P, Q, R \in \mathbf{X}$. Řekneme, že $u : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ je kardinální užitková funkce, pokud platí:

1. $u(P) < u(Q)$ právě tehdy, když $P \prec Q$ (tedy když Q je lepší než P)
2. P je preferováno před Q více než R před S právě tehdy, když $u(P) - u(Q) > u(R) - u(S)$

Za zmínku stojí, že kardinální užitková funkce je indiferentní vůči lineární transformaci s pozitivním koeficientem, tedy $v(P) = au(P) + b, a > 0$.

Věta 1.9 Nechť platí axiomy (AI), (AII) a (AIII), potom existuje kardinální užitková funkce.

Kardinální užitková funkce v teorii rozhodování za rizika

Uvažujme funkci $u : W \to \mathbb{R}, W \subset \mathbb{R}^+$ (W má význam majetku jistého investora). V dalším uvažujeme užitkové funkce v následujícím smyslu.

Definice 1.12 Řekneme, že u je užitková funkce, pokud je spojitá a neklesající.

Poznámka. Předpoklad spojitosti není pro budování teorie nutný, avšak je používán historicky. Zásadní vlastností užitkové funkce je neklesajícnost, která vyjadřuje předpoklad nenasycenosti, tedy že mít více je vždy lepší, než mít méně.

Značení. V následujícím budeme písmenem w označovat reálnou náhodou veličinu.

Definice 1.13 Nechť u je užitková funkce a W je hladina majetku investora. Uvažujme vhodnou (existuje střední hodnota $\mathbb{E}w$ a $\mathbb{E}u(W+w)$) hru w s rozdělením P_w, potom investor:

1. je rizikově averzní na hladině majetku W, jestliže $\mathbb{E}u(W+w) < u(W+\mathbb{E}w)$
2. je rizikově neutrální na hladině majetku W, jestliže $\mathbb{E}u(W+w) = u(W+\mathbb{E}w)$
3. je riziko vyhledávající na hladině majetku W, jestliže $\mathbb{E}u(W+w) > u(W+\mathbb{E}w)$

Příklady.

- Jednoduchým příkladem hry je následující situace $W = 100$ Kč, $w = \pm 50$ Kč s pravděpodobností $1/2$. Tato hra je spravedlivá ve smyslu, že $\mathbb{E}w = 0$.
- Typickým příkladem rizikově averzních investorů jsou banky, či penzijní fondy, jelikož "nesmí"přijít o svěřené peníze.
- Příkladem riziko vyhledávajících investorů jsou například sázející v loteriích, pravděpodobnost výhry je velmi malá, a proto se špatně odhaduje.

Definice 1.14 Investor je globálně rizikově averzní/neutrální/oblibující riziko, jestliže je rizikově averzní/neutrální/oblibující riziko na každé hladině majetku W.

Věta 1.10 Nechť $u : I \to \mathbb{R}$, pro $I \subset \mathbb{R}^+$ interval, je užitková funkce. Potom investor je

1. globálně rizikově averzní právě tehdy, když u je striktně konkávní
2. globálně rizikově neutrální právě tehdy, když u je lineární
3. globálně oblibující riziko právě tehdy, když u je striktně konvexní

Příklad. Nyní se podívejme na různé druhy investorů v situaci hry popsané v předchozím příkladu (viz Obrázek 1.1).

Riziková prémie

Riziková prémie je hodnota, která zajistí, že investor je lhostejný (indiferentní) ke hraní hry ve smyslu následující definice.

Definice 1.15 Riziková prémie $\Pi(W, P_w)$ je definována jako řešení rovnice $\mathbb{E}u(W + w) = u(W + \mathbb{E}w - \Pi(W, P_w))$.

Z definice plyne, že riziková prémie závisí na užitkové funkci, majetku a rozdělení náhodné veličiny hry (ne však na její konkrétní realizaci!).

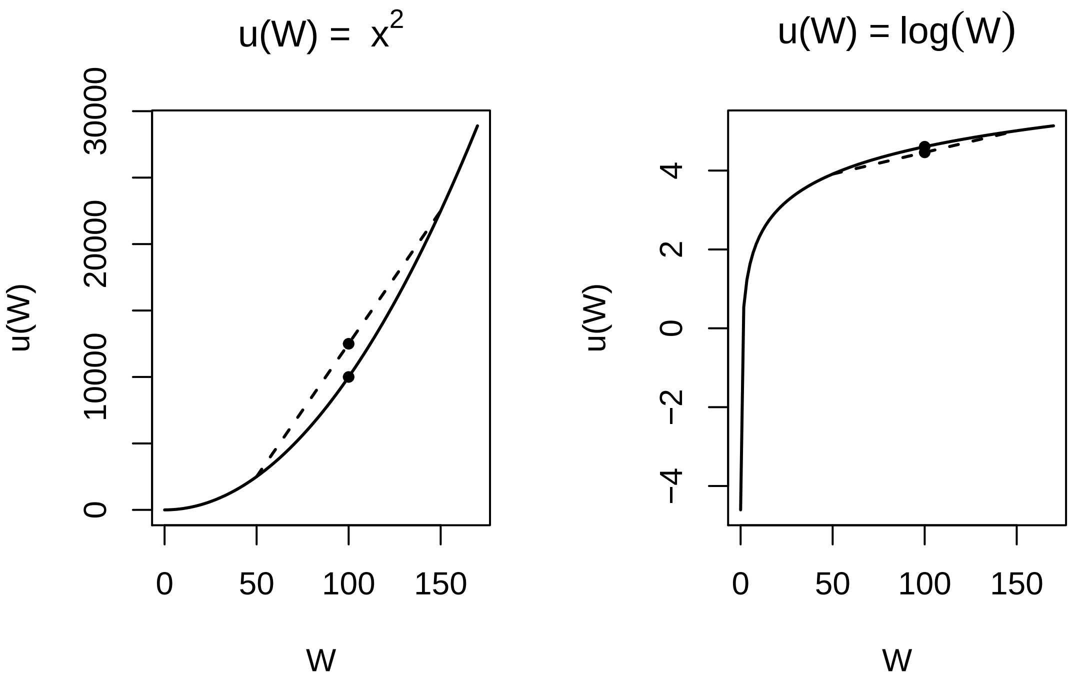
Poznámka. Riziková prémie je invariantní vůči posunutí majetku a rozdělení hry ve smyslu $\Pi(W, P_w) = \Pi(W + \delta, P_{w+\delta})$.

Naproti tomu pojistná prémie je maximální částka, kterou je investor ochoten zaplatit, aby se vyhnul hraní hry (aby zabránil vzniku velkých škody).

Definice 1.16 Pojistnou prémii definujeme jako $\Pi_I(W, P_w) = \Pi(W, P_w) - \mathbb{E}w$.

Analogií v opačném smyslu je peněžní ekvivalent, tedy částka, kterou by investor musel nejprve obdržet ke svému majetku, aby byl ochoten hru hrát, přirozeně ji definujeme jako hodnotu opačnou pojistné prémii.

Definice 1.17 Peněžní ekvivalent definujeme jako $\Pi_a(W, P_w) = -\Pi_I(W, P_w) = \Pi(W, P_w)$.



Obrázek 1.1: Příklady užitkových funkcí pro riziko vyhledávajícího a rizikově averzního investora, čárkovaně rizikově neutrální

Míry rizikové averze

Vzhledem k tomu, že chceme být schopni porovnávat averzi investora nezávisle na konkrétní hře (resp. konkrétní investici), podíváme se na míry rizikové averze. Předpokladem v této sekci bude spravedlivost hry (tedy $\mathbb{E}w = 0$), rozptyl hry označíme σ_w^2.

Vyjdeme z toho, že pro spravedlivou hru platí $\mathbb{E}u(W+w) = u(W - \Pi(W, P_w))$. Pro nalezení odhadu míry riziky využijeme Taylorův rozvoj postupně na obou stranách.

$$u(W - \Pi(W, P_w)) = u(W) - \Pi(W, P_w)u'(W) + O(\Pi^2(W, P_w)) \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}u(W+w) &= \mathbb{E}[u(W) + wu'(W) + \frac{1}{2}w^2u''(W) + O(w^3)] \qquad (1.2) \\ &= \mathbb{E}u(W) + \frac{1}{2}\sigma_w^2 u''(W) + o(\sigma_w^2), \end{aligned}$$

což dohromady (neboť W není náhodná veličina a tedy $\mathbb{E}u(W) = u(W)$) dává aproximaci (při zanedbání členů nižšího řádu)

$$\Pi(W, P_w) \approx \frac{1}{2}\sigma_w^2\Big[-\frac{u''(W)}{u'(W)}\Big]. \tag{1.3}$$

Příjemnou vlastností aproximace je fakt, že obsahuje faktorizaci rizikové prémie na vlastnost hry (σ_w^2) a vlastnost investora ($-u''(W)/u'(W)$). Část aproximace připadající investorovi se pro dostatečně hladké rostoucí užitkové funkce nazývá absolutně rizikově averzní míra, či Arrow-Prattova míra (ARA).

Definice 1.18 Nechť $u : I \to \mathbb{R}, I$ interval je dvakrát diferencovatelná rostoucí funkce. ARA míru definujeme jako $r(W) = -\frac{u''(W)}{u'(W)} = -\frac{d}{dW} ln(u'(W))$.

Poznámka. Podívejme se na chování ARA míry pro různé typy investorů. Nechť $\sigma_w^2 > 0$.

1. $r(W) > 0$ (právě tehdy, když $\Pi(W, P_w) > 0$) právě tehdy, když investor je rizikově averzní
2. $r(W) = 0$ (právě tehdy, když $\Pi(W, P_w) = 0$) právě tehdy, když investor je rizikově neutrální
3. $r(W) < 0$ (právě tehdy, když $\Pi(W, P_w) < 0$) právě tehdy, když investor je riziko oblibující
4. Pro dvojici investorů platí $r_1(W) > r_2(W)$ (právě tehdy, když $\Pi_1(W, P_w) > \Pi_2(W, P_w)$) právě tehdy, když je první z investorů více rizikově averzní než druhý.

Nyní si uveďme další příklady rizikových měr, které se využívají. RRA míra je modifikací ARA míry, kterou získáme jejím vynásobením hodnotou majetku W.

Definice 1.19 RRA míru definujeme jako $r_A(W) = Wr(W)$.

V případě, že W je kladný, pak poznámka platí i pro míru RRA. Důsledkem toho, že obě míry závisí na hodnotě W, hovoříme někdy o lokálních mírách rizikové averze.

Definice 1.20 Nechť $w \sim N(\mu, \sigma^2)$. Rubinsteinovu rizikově averzní míru definujeme jako $R(W) = -\frac{W\mathbb{E}u''(W+w)}{\mathbb{E}u'(W+w)}$.

Klasifikace užitkových funkcí podle míry rizikové averze

1. Konstantní ARA ($\frac{u''(W)}{u'(W)} = -c, c > 0$)

Věta 1.11 Dvakrát diferencovatelná užitková funkce je konstantně ARA právě tehdy, když $u_{\text{CARA}}(W) = ae^{-cW} + b, a \leq 0, c > 0, b \in \mathbb{R}$.

Podívejme se blíže na parametry ve znění věty – c je parametr rizikové averze, čím větší je c, tím více je investor rizikově averzní, parametr a je škálovací faktor a b je parametr posunutí. Povšimněme si, že v případě $c < 0$ by se jednalo o investora, který vyhledává riziko.

2. HARA funkce

Definice 1.21 Investor je hyperbolicky absolutně rizikově averzní, pokud pro jeho ARA míru platí $r(W) = \frac{1}{aW+b}$ pro $aW + b > 0$.

Věta 1.12 Dvakrát diferencovatelná užitková funkce u je HARA právě tehdy, když $u(W) = u_{\mathrm{HARA}}(W)$ nabývá následujících hodnot

1. $\frac{c}{a-1}(aW+b)^{\frac{a-1}{a}} + d, a \neq 0, a \neq 1, aW + b > 0, c > 0, d \in \mathbb{R}$ (mocninná)
2. $c\ln(W + b) + d, W + b > 0, c > 0, d \in \mathbb{R}$ (logaritmická)
3. $-ce^{-\frac{W}{b}} + d, b > 0, c > 0, d \in \mathbb{R}$ (exponenciální)
4. $-\frac{c}{2}(b - W)^2, b > W, c > 0, d \in \mathbb{R}$ (kvadratická)

3. DARA funkce

1.1.3 Stochastická dominance

V této sekci si představíme principy porovnávání náhodných veličin mezi sebou. Nechť G je nějaká množina užitkových funkcí.

Definice 1.22 Mějme X, Y náhodné veličiny, pak X dominuje Y $(X \succcurlyeq_G Y)$ vzhledem ke generátoru G, jestliže $\mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y), \forall u \in G$ taková, že střední hodnoty existují.

Dominanci v definici výše nazýváme slabou/základní dominancí, naopak dominanci v té následující nazýváme silnou/striktní. V následující definici již X nedominuje samo sebe, což je v budování ekonomické teorie užitečné.

Definice 1.23 Mějme X, Y náhodné veličiny, pak X dominuje Y $(X \succ_G Y)$ vzhledem ke generátoru G, jestliže $\mathbb{E}u(X) > \mathbb{E}u(Y), \forall u \in G$ taková, že střední hodnoty existují.

Typy generátorů

- $U_1 = \{$množina všech užitkových funkcí$\}$ nazýváme stochastická dominance prvního řádu (FSD)
- $U_2 = \{$množina všech konkávních užitkových funkcí$\}$ nazýváme stochastická dominance druhého řádu (SSD)
- $U_N = \{u \in U_1,$ dostatečně hladké: $u^{(n)}(x)(-1)^{n+1} \geq 0\}$ nazýváme stochastická dominance N-tého řádu (NSD), v praxi 3./4. řád
- $U_\infty = \{u \in U_1,$ dostatečně hladké: $u^{(n)}(x)(-1)^{n+1} \geq 0\ n = 1, 2, ...\}$ nazýváme stochastická dominance ∞-tého řádu (ISD)
- $U_{\mathrm{CARA}} = \{u(x) \sim e^{-ax}, a \geq 0\}, U_{\mathrm{HARA}}, ...$

Z konstrukce je patrné, že $U_N \subset U_{N-1}$ a tedy pokud platí dominance $N-1$-ho řádu, platí i dominance řádu N-tého.

1. Stochastická dominance 1. řádu (FSD)

Z definice platí $\mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y), \forall u \in U_1$. Následující třída funkcí je reprezentativní pro FSD

$$V_1 = \{u_{\eta,v}(x) : u_{\eta,v}(x) = \max\{v, \min\{x-\eta, 0\}\}, \eta \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^-\}.$$

Vzhledem k tomu, že platí $\mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y), \forall u \in U_1$ právě tehdy, když $\mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y), \forall u \in V_1$, není potřeba vyšetřovat definující nerovnost pro všechny funkce z U_1, ale stačí vyšetřovat pouze pro ty z V_1.

Uveďme si dvojici nutných a postačujících podmínek pro stochastickou dominanci prvního řádu, které využívají distribuční (1. verze) a kvantilové (2. verze) funkce.

Věta 1.13 Nechť X, Y jsou náhodné veličiny, F_X, F_Y jsou příslušné distribuční funkce a $F_X^{-1}(v) = \min\{z : F_X(u) \geq v\}, F_Y^{-1}(v) = \min\{z : F_Y(u) \geq v\}$ jsou jejich kvantilové funkce. Potom platí

1. $X \succcurlyeq_{FSD} Y$ právě tehdy, když $F_X(x) \leq F_Y(x), \forall x \in \mathbb{R}$
2. $X \succ_{FSD} Y$ právě tehdy, když $F_X(x) \leq F_Y(x), \forall x \in \mathbb{R}$ a $\exists x_0 : F_X(x_0) < F_Y(x_0)$
3. $X \succcurlyeq_{FSD} Y$ právě tehdy, když $F_X^{-1}(v) \geq F_Y^{-1}(v), \forall v \in [0,1]$
4. $X \succ_{FSD} Y$ právě tehdy, když $F_X^{-1}(v) \geq F_Y^{-1}(v), \forall v \in [0,1]$ a $\exists v_0 : F_X(v_0) > F_Y(v_0)$

Pro některá běžná rozdělení máme odvozená jednodušší pravidla pro nahlédnutí stochastické dominance prvního řádu.

1. Diskrétní rozdělení se stejně pravděpodobnými atomy
   X nabývá hodnot $x_1, x_2, ..., x_T$ s pravděpodobností $1/T, x_1 \leq ... \leq x_T$
   Y nabývá hodnot $y_1, y_2, ..., y_T$ s pravděpodobností $1/T, y_1 \leq ... \leq y_T$
   porovnání distribučních funkcí se tedy zjednoduší na podmínku

   $$X \succcurlyeq_{FSD} Y \Leftrightarrow x_i \geq y_i, i = 1, ..., T, \text{ resp. } X \succ_{FSD} Y \Leftrightarrow x_i \geq y_i, i = 1, ..., T, \exists j : x_j > y_j$$

2. $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2), Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

   $$X \succcurlyeq_{FSD} Y \Leftrightarrow \mu_X \geq \mu_Y \wedge \sigma_X^2 = \sigma_Y^2, \text{ resp. } X \succ_{FSD} Y \Leftrightarrow \mu_X > \mu_Y \wedge \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$$

   Zde si povšimněme, že podmínky na střední hodnotu je nutnou podmínkou stochastické dominance a rovnost rozptylů je vyžadována, aby se distribuční funkce neprotínaly.

3. Lognormální rozdělení ($Z \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow e^Z$ má lognormální rozdělení s hustotou $f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{(lnx-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$). Uvažujme $X \sim LN(\mu_X, \sigma_X^2), Y \sim LN(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

$$X \succcurlyeq_{FSD} Y \Leftrightarrow \mu_X \geq \mu_Y \wedge \sigma_X^2 = \sigma_Y^2, \text{ resp. } X \succ_{FSD} Y \Leftrightarrow \mu_X > \mu_Y \wedge \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$$

   Není příliš překvapující, že jsme obdrželi stejné podmínky jako u normálního rozdělení.

4. Gamma rozdělení ($X \sim \Gamma(k, \theta)$ s hustotou $f(x) = \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}, \mathbb{E}X = k\theta, \text{var}X = k\theta^2$. Uvažujme $X \sim \Gamma(k_X, \theta_X), Y \sim \Gamma(k_Y, \theta_Y)$.

$$X \succcurlyeq_{FSD} Y \Leftrightarrow \theta_X \geq \theta_Y \wedge k_X \geq k_Y, \text{ resp. } X \succ_{FSD} Y \Leftrightarrow \theta_X \geq^* \theta_Y \wedge k_X \geq^* k_Y,$$

   kde * znamená, že alespoň jedna z nerovností je ostrá.

Stochastická dominance prvního řádu nám umožňuje porovnávat investiční příležitosti a rozpoznat ty, které jsou dobré a které špatné. Lze také hledat nejlepší (eficientní) řešení.

2. Stochastická dominance 2. řádu

Hlavním rozdílem oproti stochastické dominanci prvního řádu je uvažování jiné množiny generátorů, konkrétně funkcí, které jsou konkávní, investor je tedy rizikově averzní.

Definice 1.24 Řekneme, že $X \gtrsim_{SSD} Y$, jestliže $\mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y), \forall u \in U_2$. Řekneme, že $X \succ_{SSD} Y$, jestliže $\mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y), \forall u \in U_2, \exists u_0 \in U_2 : \mathbb{E}u(X) > \mathbb{E}u(Y)$.

Podobně jako u stochastické dominance prvního řádu máme k dispozici reprezentativní množinu, která má následující tvar

$$V_2 = \{u_\eta(x) : u_\eta(x) = \min\{x - \eta, 0\}, \eta \in \mathbb{R}\}$$

Věta 1.14 $X \gtrsim_{SSD} Y$ právě tehdy, když $\mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y), \forall u \in V_2$.

Uveďme si nutné a postačující podmínky pro stochastickou dominanci druhého řádu.

Definice 1.25

- $F_X^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^t F_X(s)ds$
- $F_X^{(-2)}(p) = \int_{-\infty}^p F_X^{(-1)}(q)dq, p \in (0,1)$
- $F_X^{(-2)}(0) = 0$
- $F_X^{(-2)}(p) = \infty, p \notin [0,1)$

$F_X^{(-2)}$ z definice výše je duální funkcí k $F_X^{(2)}$ ve smyslu Fenchelovy duality. Existuje i alternativní způsob výpočtu funkce $F_X^{(2)}$, který je užitečný, neboť integrování distribuční funkce může být někdy obtížné. V důkazu se objevuje pojem dolního parciálního momentu prvního řádu ($\mathrm{LPM}_X(t)$)

Věta 1.15 $F_X^{(2)}(t) = \mathbb{E}[t - X \mid X \le t]\mathbb{P}[X \le t] = \mathbb{E}[\max(t - X, 0)]$

Důkaz:

$$
\begin{aligned}
F_X^{(2)}(t) &= \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{y} f(x)dxdy \overset{Fub.}{=} \int_{-\infty}^{t}\int_{x}^{t} f(x)dydx = \int_{-\infty}^{t}(t-x)f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{t}(t-x)f(x)dx + \int_{t}^{\infty} 0f(x)dx = \mathbb{E}max(t-X,0) \overset{Def}{=} \mathrm{LPM}_X(t) \\
&= \mathbb{E}[t - X \mid X \le t]\mathbb{P}[X \le t]
\end{aligned}
$$

□

V ekonometrie je často využívána tzv. (podmíněná) hodnota v riziku ((conditional) value at risk – (C)VaR), připomeňme si jejich definici a ukažme si způsob výpočtu CVaR s pomocí funkce $F_X^{(-2)}$.

Definice 1.26 Nechť X je náhodná veličina a $\alpha \in (0,1)$, potom definujeme $\mathrm{CVaR}_\alpha(-X) = \min_z z + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}[\max(-X - z, 0)]$. Dále definujeme $\mathrm{VAR}_\alpha(-X) = F_X^{-1}(\alpha)$.

Věta 1.16 $\mathrm{CVaR}(-X) = -\frac{F_X^{(-2)}(1-\alpha)}{1-\alpha}$.

Vzhledem k tomu, že jsme si již zadefinovali veškeré potřebné pojmy, můžeme si uvést hlavní větu této sekce, tedy nutné a postačující podmínky pro stochastickou dominanci druhého řádu.

Věta 1.17

i $X \succcurlyeq_{SSD} Y$ právě tehdy, když $F_X^{(2)}(t) \le F_Y^{(2)}(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

ii $X \succ_{SSD} Y$ právě tehdy, když $F_X^{(2)}(t) \le F_Y^{(2)}(t), \forall t \in \mathbb{R} \wedge \exists t_0 : F_X^{(2)}(t_0) < F_Y^{(2)}(t_0)$.

iii $X \succcurlyeq_{SSD} Y$ právě tehdy, když $F_X^{(-2)}(p) \ge F_Y^{(-2)}(p), \forall p \in [0,1]$.

iv $X \succ_{SSD} Y$ právě tehdy, když $F_X^{(-2)}(p) \ge F_Y^{(-2)}(p), \forall p \in [0,1] \wedge \exists p_0 : F_X^{(-2)}(p_0) > F_Y^{(-2)}(p_0)$.

v $X \succcurlyeq_{SSD} Y$ právě tehdy, když $\mathrm{LPM}_X(t) \le \mathrm{LPM}_X(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

vi $X \succ_{SSD} Y$ právě tehdy, když $\mathrm{LPM}_X(t) \le \mathrm{LPM}_X(t), \forall t \in \mathbb{R} \wedge \exists t_0 : \mathrm{LPM}_X(t_0) < \mathrm{LPM}_X(t_0)$.

vii $X \succcurlyeq_{SSD} Y$ právě tehdy, když $\mathrm{CVaR}_\alpha(-X) \le \mathrm{CVaR}_\alpha(-Y), \forall \alpha \in [0,1]$.

viii $X \succ_{SSD} Y$ právě tehdy, když $\mathrm{CVaR}_\alpha(-X) \leq \mathrm{CVaR}_\alpha(-Y), \forall \alpha \in [0,1] \wedge \exists \alpha_0 : \mathrm{CVaR}_\alpha(-X) < \mathrm{CVaR}_\alpha(-Y)$.

Podmínky v bodech (vii) a (viii) můžeme číst tak, že "X je méně rizikové než Y na všech hladinách α". Při dosazení $\alpha = 0$ do CVaR získáváme střední hodnotu a pro $\alpha = 1$ nejhorší možnou ztrátu.

Pro vyšší řády stochastické dominance obecně platí, že kvůli tomu, že množina generátorů je širší, je vlastnost stochastické dominance slabší (a jsme tedy schopni nalézt menší množství dominujících prvků). Pro úplnost si však uveďme definice, některé vlastnosti a speciální případy stochastické dominance vyššího řádu.

3. N-tý řád stochastické dominance

Definice 1.27 Řekneme, že $X \succsim_{NSD} Y$, jestliže $\mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y), \forall u \in U_N$. Řekneme, že $X \succ_{NSD} Y$, jestliže $\mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y), \forall u \in U_N, \exists u_0 \in U_N : \mathbb{E}u(X) > \mathbb{E}u(Y)$.

4. ∞-tý řád stochastické dominance

Definice 1.28 Řekneme, že $X \succsim_{ISD} Y$, jestliže $\mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y), \forall u \in U_\infty$. Řekneme, že $X \succ_{ISD} Y$, jestliže $\mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y), \forall u \in U_\infty, \exists u_0 \in U_\infty : \mathbb{E}u(X) > \mathbb{E}u(Y)$.

I pro NSD a ISD máme věty, které nám umožňují prozkoumat, jestli nějaká veličina X stochasticky dominuje náhodou veličinu Y ve smyslu N-/∞-tého řádu.

Věta 1.18 Nechť X a Y mají nosič v $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Potom $X \succcurlyeq_{NSD} Y$ právě tehdy, když $F_X^{(k)}(b) \leq F_Y^{(k)}(b), \forall k = 2, 3, ..., N-1 \wedge F_X^{(N)}(t) \leq F_Y^{(N)}(t), \forall t \in (a,b)$.

Věta 1.19 $X \succcurlyeq_{ISD} Y$ právě tehdy, když $\mathbb{E}(e^{-aX} - e^{-aY}) \leq 0, \forall a \geq 0$. $X \succ_{ISD} Y$ právě tehdy, když $\mathbb{E}(e^{-aX} - e^{-aY}) \leq 0, \forall a \geq 0 \wedge \exists a_0 \geq 0 : \mathbb{E}(e^{-a_0 X} - e^{-a_0 Y}) < 0$

Podobně jako tomu bylo u stochastické dominance prvního řádu, tak pro některá běžná rozdělení máme odvozená jednodušší pravidla pro nahlédnutí stochastické dominance řádu vyššího.

1. Diskrétní rozdělení se stejně pravděpodobnými atomy
   X nabývá hodnot $x_1, x_2, ..., x_T$ s pravděpodobností $1/T, x_1 \leq ... \leq x_T$
   Y nabývá hodnot $y_1, y_2, ..., y_T$ s pravděpodobností $1/T, y_1 \leq ... \leq y_T$
   porovnání integrovaných distribučních funkcí se tedy zjednoduší na podmínku

$$X \succcurlyeq_{SSD} Y \Leftrightarrow \sum_i^t x_i \geq \sum_i^t y_i, t = 1, ..., T$$

$$X \succ_{SSD} Y \Leftrightarrow \sum_i^t x_i \geq \sum_i^t y_i, t = 1, ..., T, \exists t_0 : \sum_i^{t_0} x_i > \sum_i^{t_0} y_i$$

   Vidíme, že podmínka se oproti FSD změnila velice přirozeným způsobem. Pro stochastickou dominance vyššího řádu však již nic podobného neplatí.

2. $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2), Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

$$X \succcurlyeq_{SSD} Y \Leftrightarrow \mu_X \geq \mu_Y \wedge \sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2, \text{ resp. } X \succ_{SSD} Y \Leftrightarrow \mu_X \geq^* \mu_Y \wedge \sigma_X^2 \leq^* \sigma_Y^2,$$

   kde symbol * značí, že alespoň jedna z nerovností musí být ostrá. Stejné kritérium získáme pro NSD a ISD, podmínce se v literatuře říká Markowitzovo kritérium.

3. Lognormální rozdělení ($Z \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow e^Z$ má lognormální rozdělení s hustotou $f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{(lnx-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$). Uvažujme $X \sim LN(\mu_X, \sigma_X^2), Y \sim LN(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

$$X \succcurlyeq_{SSD} Y \Leftrightarrow \mathbb{E}X \geq \mathbb{E}Y \wedge \frac{\sigma_X}{\mathbb{E}X} \leq \frac{\sigma_Y}{\mathbb{E}Y}, \text{ resp. } X \succ_{SSD} Y \Leftrightarrow \mathbb{E}X \geq^* \mathbb{E}Y \wedge \frac{\sigma_X}{\mathbb{E}X} \leq^* \frac{\sigma_Y}{\mathbb{E}Y},$$

   kde symbol * značí, že alespoň jedna z nerovností musí být ostrá. Stejné podmínky opět získáme i pro NSD a ISD.

4. Gamma rozdělení ($X \sim \Gamma(k, \theta)$ s hustotou $f(x) = \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}, \mathbb{E}X = k\theta, \text{var}X = k\theta^2$. Uvažujme $X \sim \Gamma(k_X, \theta_X), Y \sim \Gamma(k_Y, \theta_Y)$. Na rozdíl od příkladů s normálním rozdělením zde již nejsou podmínky pro SSD a ISD stejné.

$$X \succcurlyeq_{SSD} Y \Leftrightarrow \frac{k_X}{k_Y} \geq \max(1, \frac{\theta_Y}{\theta_X}), \text{ resp. } X \succcurlyeq_{SSD} Y \Leftrightarrow \frac{k_X}{k_Y} \geq \max(1, \frac{\theta_Y}{\theta_X})$$

   s ostrou nerovností pro případ $\theta_Y / \theta_X = 1$.

$$X \succcurlyeq_{ISD} Y \Leftrightarrow k_X \geq k_Y \wedge \theta_X k_X \geq \theta_X k_Y, \text{ resp. } X \succ_{ISD} Y \Leftrightarrow k_X \geq^* k_Y \wedge \theta_X k_X \geq^* \theta_X k_Y$$

   kde * znamená, že alespoň jedna z nerovností je ostrá.

Stochastická dominance je široce využitelný nástroj, některé příklady jejího použití si nyní uvedeme.

Příklady.
- Optimalizační problemy s omezením ve tvaru stochastické dominance max $f(x)$ za $X \succcurlyeq_{SD} Y$. Využívá se například pro maximalizaci portfolia za podmínky, že výnos dominuje jistý index Y.
- Testování eficience portfolia – zpravidla je požadována ostrá dominance.

Příklady

Příklad. Uvažujte užitkovou funkci $u(W) = \log(W/10)$ a počáteční majetek 100€. Jaká je přesná a přibližná hodnota rizikové prémie pro hru w takovou, že:

$$1.\ w = \begin{cases} 1, \text{s pstí } \frac{1}{2} \\ -1, \text{s pstí } \frac{1}{2} \end{cases} \quad 2.\ w = \begin{cases} 2, \text{s pstí } \frac{1}{3} \\ 0, \text{s pstí } \frac{1}{3} \\ -2, \text{s pstí } \frac{1}{3} \end{cases} \quad 3.\ w = \begin{cases} 10, \text{s pstí } \frac{1}{2} \\ -10, \text{s pstí } \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$4.\ w = \begin{cases} 50, \text{s pstí } \frac{1}{4} \\ 0, \text{s pstí } \frac{1}{2} \\ -50, \text{s pstí } \frac{1}{4} \end{cases} \quad 5.\ w = \begin{cases} 50, \text{s pstí } \frac{1}{2} \\ -99, \text{s pstí } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Řešení.

1. $\mathbb{E}w = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0, \sigma_w^2 = \mathbb{E}w^2 = 1$

   (P) $\log\left(\frac{100+0-\pi}{10}\right) = \mathbb{E}\log\left(\frac{100+w}{10}\right)$

   $\log\left(10 - \frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{101}{10}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{99}{10}\right) \implies \pi = 10\left(10 - \frac{\sqrt{101 \cdot 99}}{10}\right) \approx 5 \cdot 10^{-3}$

   (A) $r(W) = -\frac{-\frac{1}{W^2}}{\frac{1}{W}} = \frac{1}{W} \implies \pi^* = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{200} = 0.005$

2. $\mathbb{E}w = 2 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + (-2) \cdot \frac{1}{3} = 0, \sigma_w^2 = \mathbb{E}w^2 = 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 0^2 \cdot \frac{1}{3} + (-2)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

   (P) $\log\left(10 - \frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{3}\log\left(\frac{102}{10}\right) + \frac{1}{3}\log\left(\frac{100}{10}\right) + \frac{1}{3}\log\left(\frac{98}{10}\right) \implies$

   $\pi = 10 \cdot \left(10 - \frac{\sqrt[3]{102 \cdot 100 \cdot 98}}{10}\right) \approx 0.013335$

   (A) $\pi^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{75} \approx 0.01\bar{3}$

3. $\mathbb{E}w = 0, \sigma_w^2 = \mathbb{E}w^2 = 100 \cdot \frac{1}{2} + 100 \cdot \frac{1}{2} = 100$

   (P) $\log\left(10 - \frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{110}{10}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{90}{10}\right) \implies \pi = 10 \cdot \left(10 - \frac{\sqrt{110 \cdot 90}}{10}\right) \approx 0.50126$

   (A) $\pi^* = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{2}$

4. $\mathbb{E}w = 0, \sigma_w^2 = \mathbb{E}w^2 = \frac{50^2}{4} \cdot 2 = 1250$

(P) $\log\left(10-\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{4}\log(15)+\frac{1}{2}\log(10)+\frac{1}{4}\log(5) \implies$
$\pi = 10\cdot(10-\sqrt[4]{15\cdot 100\cdot 5})\approx 6.25$

(A) $\pi^* = \frac{1}{2}\cdot 1250\cdot\frac{1}{100}\approx 6.25$

5. $\mathbb{E}w = \frac{-99+50}{2}=\frac{-49}{2}, \mathbb{E}w^2=\frac{99^2}{2}+\frac{50^2}{2}=\frac{12301}{2}, \sigma_w^2=\frac{12301}{2}-\left(\frac{49}{2}\right)^2=\frac{22201}{4}$

(P) $\log\left(10-\frac{49}{2\cdot 10}-\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{2}\log(15) \implies \pi = 75.5-\sqrt{150}\approx 63.25$

(A) $\pi^* = \frac{1}{2}\cdot\frac{22201}{4}\cdot\frac{1}{100-\frac{49}{2}}=36.75$

Příklad. Spočtěte ARA míru a diskutujte vztah investora k riziku (dle W ap.).

1. $u(W)=\frac{c}{a-1}(aW+b)^{\frac{a-1}{a}}+d, a\neq 0, a\neq 1, aW+b>0, c\geq 0, d\in\mathbb{R}$
2. $u(W)=e^{-aW}+e^{-bW}, a>0, b>0, a>b$
3. $u(W)=(W-a)^3$
4. $u(W)=1-e^{-aW}, a>0$

Řešení.

1. $u'(W)=\frac{c}{a-1}\cdot\frac{a-1}{a}\cdot(aW+b)^{-\frac{1}{a}}\cdot a = c\cdot(aW+b)^{-\frac{1}{a}}$
$u''(W)=c\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot a\cdot(aW+b)^{-\frac{a+1}{a}}=-c\cdot(aW+b)^{-\frac{a+1}{a}}$
$r(W)=-\frac{-c\cdot(aW+b)^{-\frac{a+1}{a}}}{c\cdot(aW+b)^{-\frac{1}{a}}}=\frac{1}{aW+b} \implies$ HARA, navíc díky $aW+b>0$ platí $r(W)>0$ a investor je tedy rizikově averzní.

2. $u'(W)=-a\cdot e^{-aW}-b\cdot e^{-bW}$
$u''(W)=(-a)^2\cdot e^{-aW}+(-b)^2\cdot e^{-bW}=a^2\cdot e^{-aW}+b^2\cdot e^{-bW}$
$r(W)=-\frac{a^2\cdot e^{-aW}+b^2\cdot e^{-bW}}{-(a\cdot e^{-aW}+b\cdot e^{-bW})}=\frac{a^2\cdot e^{-aW}+b^2\cdot e^{-bW}}{a\cdot e^{-aW}+b\cdot e^{-bW}}$ Vzhledem k tomu, že $a,b>0$, platí $r(W)>0$ a investor je rizikově averzní.

3. $u'(W) = 3 \cdot (W-a)^2, u''(W) = 6 \cdot (W-a) \implies r(W) = -\dfrac{6 \cdot (W-a)}{(W-a)^2} = -\dfrac{2}{W-a}$
   Nyní je-li $W > a$, tak $r(W) < 0$ a investor je riziko oblibující, pokud naopak $W < a$, potom $r(W) > 0$ a investor je rizikově averzní.

4. $u'(W) = -e^{-aW} \cdot (-a), u''(W) = -(-a)^2 \cdot e^{-aW} \implies r(W) = a$, pro $a = 0$ investor riziku neutrální, $a > 0$, rizikově averzní, $a < 0$ riziko vyhledávající.

Příklad. Zjistěte jakou (přibližně) má investor užitkovou funkci, víte-li:

1. $r(W)$ je hyperbolická, kladná a klesající,
2. pro hru $w = \begin{cases} 3, \text{s pstí } \frac{1}{2} \\ -1, \text{s pstí } \frac{1}{2} \end{cases}$ má rizikovou prémii $\pi = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{pro } W = 10 \\ \frac{1}{4}, \text{pro } W = 20 \end{cases}$

Příklad. Pro případ předchozího příkladu porovnejte skutečné rizikové prémie s těmi aproximativními.

Příklad. Investor s užitkovou funkcí $u(W) = 1 - e^{-W/100}$ uvažuje investice:

1. do bezrizikového aktiva s výnosem 2%
2. do rizikového aktiva, jehož výnos v % p.a. se řídí $N(3, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$.

Spočtěte optimální rozložení investice 100€.

Příklad. Na trhu jsou 3 aktiva (A, B, C), jejichž výnosy pro daný scénář jsou shrnuty v následující tabulce:

Scénář	Aktivum			
	A	B	C	pst
negativní	1	–1	2	1/3
neutrální	1	4	0	1/3
pozitivní	4	5	4	1/3

Zodpovězte následující otázky:

1. Je nějaké aktivum dominantní (ve smyslu FSD) nějakým jiným?
2. Je možné najít lineární konvexní kombinaci aktiv A a B, která by dominovala C?
3. Je možné najít lineární konvexní kombinaci aktiv A a C, která by dominovala B?
4. Je možné najít lineární konvexní kombinaci aktiv B a C, která by dominovala A? Pokuste se identifikovat takovou, která dominuje A a má maximální $\mathbb{E}$.

Řešení.

1. Vzhledem k tomu, že atomy rozdělení mají stejnou pravděpodobnost, stačí seřadit nabývané hodnoty náh. veličin A, B a C podle velikosti, získáme $A_o = (1,1,4), B_o = (-1,4,5), C_o = (0,2,4)$. Nyní vidíme, že pro žádnou dvojici $X_o \neq Y_o \in \{A_o, B_o, C_o\}$ neplatí $X_o \geq Y_o$ s ostrou nerovností v alespoň jedné složce. Žádné aktivum tedy není dominantní jiným.

2. K řešení můžeme přistupovat dvěma způsoby, zde je patrné, že lineární konvexní kombinace A/2 + B/2 je dominantní C, neboť $(A/2+B/2)_o = (0, 2.5, 4.5)$ a platí $(A/2+B/2)_o \geq C_o$ se dvěma ostrými nerovnostmi. Druhý způsob si ukážeme u čtvrté otázky.

3. Není, jelikož $LKK \geq B \implies \mathbb{E}LKK > \mathbb{E}B$, což není možné, neboť $\mathbb{E}A = \frac{1}{3}(1+1+4), \mathbb{E}B = \frac{1}{3}(-1+4+5), \mathbb{E}C = \frac{1}{3}(2+0+4)$. Další zdůvodnění nalezneme při nahlédnutí nejvyšších nabývaných hodnot A a C (4) a B (5), neboť konvexní kombinace nepřekoná 5.

4. Hledejme lineární konvexní kombinaci B a C dominující A pomocí následující soustavy nerovnic (neboť $\forall \lambda \in (0,1) : \lambda + 4 \geq 4\lambda \;\;\&\;\; \lambda + 4 \geq -3\lambda + 2$).

   $-\lambda + (1-\lambda)\cdot 2 \geq 1 \implies \lambda \leq \dfrac{1}{3}$

$$4\lambda + (1-\lambda)\cdot 0 \geq 1 \implies \lambda \geq \frac{1}{4}$$
$$5\lambda + (1-\lambda)\cdot 4 \geq 4 \implies \lambda \geq 0$$

Libovolná lineární konvexní kombinace B a C pro $\lambda \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$ bude dominovat A. Jelikož $\mathbb{E}LKK(B,C) = \frac{1}{3}(2\lambda+6)$ je rostoucí, je pro $\lambda \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ maximalizovaná pro $\lambda = \frac{1}{3}$.

Příklad. Definujme náhodné veličiny X, Y následujícím způsobem:

$$X = \begin{cases} 1, \text{s pstí } \frac{1}{6} \\ 2, \text{s pstí } \frac{1}{3} \\ 3, \text{s pstí } \frac{1}{2} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 2.5, \text{s pstí } a \\ 3.5, \text{s pstí } 1-a \end{cases}$$

Pro jaké a platí $Y \succ_{FSD} X$?

Řešení. $F_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}, \text{na } [1,2) \\ \frac{1}{2}, \text{na } [2,3) \\ 1, \text{na } [3,\infty) \\ 0, \text{jinak} \end{cases} \qquad F_Y(t) = \begin{cases} a, \text{na } [2.5, 3.5) \\ 1, \text{na } [3.5,\infty) \\ 0, \text{jinak} \end{cases}$

Tedy $F_Y(t) \leq F_X(t), \forall t$ s alespoň jednou ostrou nerovností platí právě tehdy, když $a \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

Příklad. Nechť $X \sim U(a_x, b_x), Y \sim U(a_y, b_y)$. Odvoďte nutnou a postačující podmínku pro $Y \succ_{FSD} X$.

Příklad. Nechť $X \sim \text{Exp}(\lambda_x), Y \sim \text{Exp}(\lambda_y)$. Odvoďte nutnou a postačující podmínku pro $Y \succ_{FSD} X$.

Příklad. Nechť $X \sim \mathrm{Alt}(p_x), Y \sim \mathrm{Alt}(p_y)$. Odvoďte nutnou a postačující podmínku pro $X \succ_{SSD} Y$.

Příklad. Definujme náhodné veličiny X, Y následujícím způsobem:

$$X = \begin{cases} 1, \text{s pstí } \frac{1}{2} \\ 3, \text{s pstí } \frac{1}{2} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 0, \text{s pstí } \frac{1}{2} \\ 4, \text{s pstí } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Spočtěte $\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y, \mathrm{var}X, \mathrm{var}Y$. Platí $X \succ_{SSD} Y$?

Příklad. Definujme náhodné veličiny X, Y následujícím způsobem:

$$X = \begin{cases} 1, \text{s pstí } \frac{1}{4} \\ 3, \text{s pstí } \frac{3}{4} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 2, \text{s pstí } \frac{1}{2} \\ 5, \text{s pstí } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Platí $X \succeq_{SSD} Y$? Platí $X \succ_{SSD} Y$, nebo naopak? Platí potom $\mathrm{var}Y \leq \mathrm{var}X$?

Řešení. $F_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}, \text{na } [1,3) \\ 1, \text{na } [3,\infty) \\ 0, \text{jinak} \end{cases} \qquad F_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{na } [2,5) \\ 1, \text{na } [5,\infty) \\ 0, \text{jinak} \end{cases}$

Nyní jelikož $F_X(t) \geq F_Y(t), t \in (1,2)$, tak neplatí $X \succeq_{SSD} Y$. Navíc pro $t = \frac{3}{2}$ platí $I_2(t) = F_Y^{(2)}(t) - F_X^{(2)}(t) \leq 0$ a tedy neplatí $X \succ_{SSD} Y$, naopak díky tomu, že $I_2^*(t) = F_X^{(2)}(t) - F_Y^{(2)}(t) \geq 0, \forall t$, platí $Y \succ_{SSD} X$. Dále $\mathrm{var}X = \frac{3}{4}$ a $\mathrm{var}Y = \frac{9}{4}$ a tedy neplatí $\mathrm{var}Y \leq \mathrm{var}X$.

Příklad. Na trhu jsou 3 aktiva (A, B, C), jejichž výnosy pro daný scénář jsou shrnuty v následující tabulce:

Scénář	Aktivum			
	A	B	C	pst
S1	1	0	5	1/3
S2	2	–1	0	1/3
S3	1	9	0	1/3

Zodpovězte následující otázky:

1. Platí $A \succ_{SSD} C$? Platí $B \succ_{SSD} C$?
2. Existují lineární konvexní kombinace A a B, které dominují (ve smyslu SSD) C? Pokud ano, která z nich má největší $\mathbb{E}$ (nejmenší var)?
3. Existují lineární konvexní kombinace B a C, které dominují (ve smyslu SSD) A? Proč?
4. Existují lineární konvexní kombinace A a C, které dominují (ve smyslu SSD) B? Proč?

	1	2	3
A	1	2	4
B	0	–1	8
C	0	0	5

Řešení. 1. Pro každé aktivum seřadíme výnosy podle velikosti ($A_o = (1,1,2), B_o = (-1,0,9), C_o = (0,0,5)$) a sestavíme tabulku částečných součtů.

Z tabulky výše okamžitě vidíme, že neplatí ani $A \succ_{SSD} C$, ani $B \succ_{SSD} C$ (jelikož pro žádný řádek částečných součtů neplatí, že je větší nebo roven jinému).

2. Podle tabulky výše sestavíme soustavu nerovnic podobně jako při hledání dominující lineární konvexní kombinace pro FSD, platí

$\lambda \leq 3\lambda - 1 \leq -4\lambda + 8, \forall \lambda \in (0,1)$.

$\lambda + (1-\lambda)\cdot 0 \geq 0 \implies \lambda \geq 0$

$2\lambda + (1-\lambda)\cdot(-1) \geq 0 \implies \lambda \geq \frac{1}{3}$

$4\lambda + (1-\lambda)\cdot 8 \geq 5 \implies \lambda \leq \frac{3}{4}$

$\mathbb{E}(LKK) = \frac{1}{3}(-4\lambda + 8)$, maximum je tedy nabyto pro $\lambda = \frac{1}{3}$, rozptyl je minimální pro $\lambda = \frac{3}{4}$.

4. Neexistuje, neboť aktivum B na největší střední hodnotu.

Příklad. Nechť $X \sim U(a_x, b_x), Y \sim U(a_y, b_y)$. Odvoďte nutnou a postačující podmínku pro $Y \succ_{SSD} X$.

Příklad. Nechť $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda_x), Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda_y)$. Odvoďte nutnou a postačující podmínku pro $Y \succ_{SSD} X$.

Příklad. Nechť X, Y jsou absolutně spojité náhodné veličiny takové (nabývající hodnot na [a,b]), že $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y$. Je-li $X \succ_{SSD} Y$, potom $\mathrm{var}X \leq \mathrm{var}Y$. Dokažte.

Řešení.

$$
\begin{aligned}
0 = \mathbb{E}Y - \mathbb{E}X &= \int_a^b x(f_Y(x) - f_X(x))dx \\
&\overset{PP}{=} [x(F_Y(x) - F_X(x))]_a^b - \int_a^b (F_Y(x) - F_X(x))dx = -\int_a^b (F_Y(x) - F_X(x))dx
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}Y - \mathrm{var}X &= \mathbb{E}(Y^2 - X^2) = \int_a^b x^2(f_Y(x) - f_X(x))dx \\
&\overset{PP}{=} [x^2(F_Y(x) - F_X(x))]_a^b - 2\int_a^b x(F_Y(x) - F_X(x))dx \\
&\overset{PP}{=} -2\Big(\Big[x\int_a^x (F_Y(t) - F_X(t))dt\Big]_a^b - \int_a^b \int_a^x (F_Y(t) - F_X(t))dt dx\Big) \\
&= -2\Big(0 - \int_a^b I_2(t)dx\Big) = 2\int_a^b I_2(x)dx \geq 0, \text{neboť } I_2(x) \geq 0.
\end{aligned}$$

2 Teorie chování spotřebitele

V této kapitole se budeme zabývat snahou zapsat a analyzovat chování spotřebitele pomocí matematického jazyka.

Uvažujme následující situaci, ve které máme n statků (různé výrobky či služby). V této kapitole budeme využívat následující značení: $\mathbf{X}$ je množina spotřebních vektorů, přičemž předpokládáme, že $\mathbf{X} = \mathbb{R}^n_+$, X_i je potom množství spotřeby i-tého statku. p_i označuje cenu i-tého statku, přičemž zpravidla platí $p_i > 0$, opačné situace, tedy $p_i = 0$ (o zboží nemá nikdo zájem), nebo $p_i < 0$, (zboží má zápornou hodnotu – může se stát např. v případě nadměrného zatížení elektrické sítě) však také mohou nastat. Písmenem I značíme důchod, tedy množství prostředků, které máme k dispozici pro nákup statků (předpokládáme $I > 0$).

Předpokládáme, že relace $\prec$ je slabé uspořádání, spojitá a striktně konvexní (to nám zaručuje existenci nejlepšího prvku a spojité striktně kvazikonkávní ordinální užitkové funkce) a používáme značení $[x \leq y, x \neq y] \Rightarrow x \prec y, \forall x, y \in \mathbf{X}$.

Rozpočtová množina

Rozpočtová množina $M(p, I) = \{x \in \mathbf{X} : p^T x \leq I\}$ zahrnuje všechny možné spotřební vektory, které je možné realizovat s daným rozpočtem. Pro spotřebitele je nejvýhodnější spotřebovávat statky na tzv. rozpočtové přímce, tedy množině $p^T x = I$.

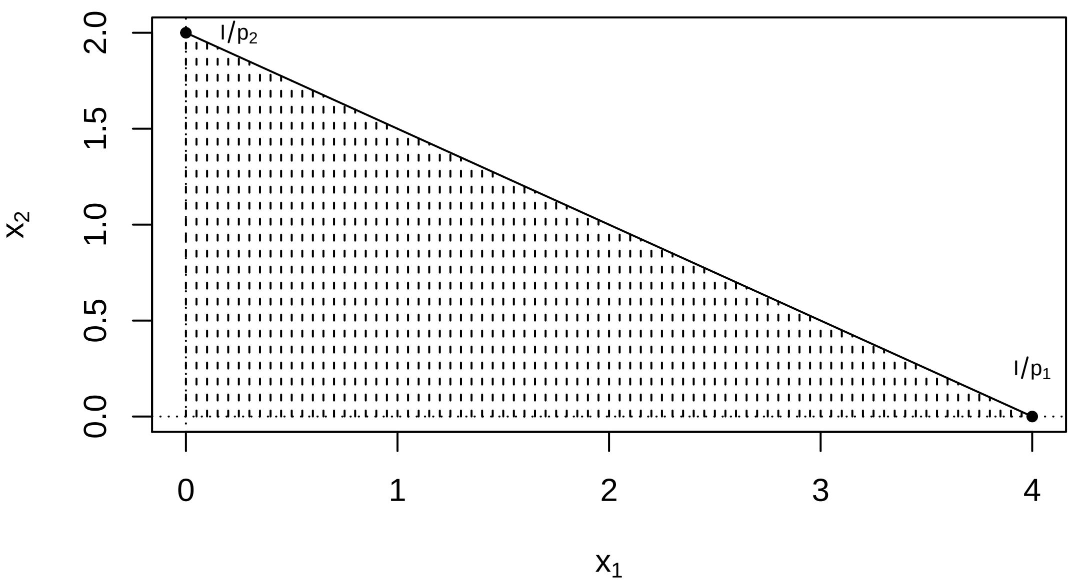
Rozpočtová množina má ze své definice mnoho (užitečných) vlastností, je: nespočetná, neprázdná, omezená, uzavřená i konvexní. Díky těmto vlastnostem a striktní konvexitě relace $\prec$ víme, že existuje právě jeden nejlepší prvek, značíme $\psi(p, I)$ a nazýváme individuální poptávková funkce. Jedná se o řešení úlohy

$$\max u(\mathbb{x}) \text{ za podmínky } \mathbb{x} \in M(p, I).$$

Často uvažujeme také úlohu

$$\min q^T x \text{ za podmínky } x \gtrsim a,$$

kde spotřebitel chce minimalizovat náklady za zachování určitého životního standardu a (nechce spotřebovat celý svůj důchod I). I tato úloha má optimální řešení (jelikož a je také možné řešení, přidání podmínky $q^T x \leq q^T a$ úlohu nezmění a máme opět omezenou a uzavřenou množinu, na které existuje maximum), které značíme $\sigma(q, a)$, dále $J(q, a) = q^T \sigma(q, a)$ značí optimální hodnotu účelové funkce (vyjadřující minimální náklady).

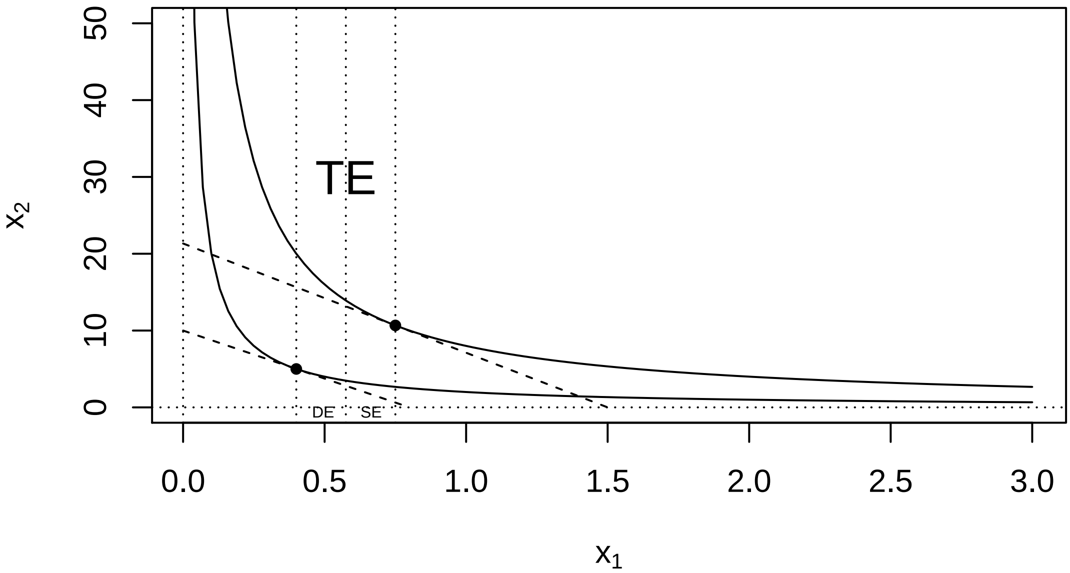


Obrázek 2.1: Ukázka rozpočtové množiny a rozpočtové přímky, body značí mezní situace, kdy nakupujeme pouze jednu komoditu

Věta 2.1 Nechť platí axiomy (A1), (A2) a (A3) (relace je striktně konvexní, spojitá a slabé uspořádání) a nechť $p > 0, q > 0, I > 0$, potom pro optimální řešení $\sigma(q, a)$ platí následující:

1. $\sigma(q, a) \sim a$
2. $\sigma(q, a)$ je spojité zobrazení v q, a
3. $J(q, a) > 0$, pokud $a \neq 0$
4. $\frac{\partial J(q,a)}{\partial q_i} = \sigma_i(q, a)$
5. $\sigma(p, \phi(p, I)) = \phi(p, I), J(p, \phi(p, I)) = I$
6. $\phi(q, J(q, a)) = \sigma(q, a)$
7. $\Delta\sigma^T \Delta q \leq 0$, kde Δq je změna ceny, $\Delta\sigma = \sigma(q + \Delta q, a) - \sigma(q, a)$

Věta nám dává do souvislosti dvojici optimálních řešení úlohy, body 5. a 6. ukazují určitou konzistenci ve smyslu "pokud za a ve druhé úloze zvolíme $\psi(p, I)$, potom je optimálním řešením právě $\phi(p, I)$ a podobně naopak".



Obrázek 2.2: Ilustrace Hicksova přístupu – rozkladu celkového efektu změny cen na substituční a důchodový efekt

Citlivost na cenu

Při změně ceny se dá očekávat změna poptávky, zajímá nás tedy chování $\Delta\psi = \psi(p + \Delta p, I) - \psi(p, I)$. Klíčovým nástrojem pro jeho studium je tzv. Hicksův přístup.

Věta 2.2 Za předpokladů předchozí věty platí:

$$\Delta\phi = \phi(p + \Delta p, J(p, \phi(p, I)) - \phi(p + \Delta p, J(p + \Delta p, \phi(p, I))) \tag{2.1}$$
$$+ \sigma(p + \Delta p, \phi(p, I)) - \sigma(p, \phi(p, I)) \tag{2.2}$$

Efektu na první řádce říkáme důchodový efekt a efektu na řádce druhé efekt substituční.

Při změně ceny klient může substituovat x_1 větším nákupem x_2. Pokud celkově zchudl, omezí spotřeba x_1 i x_2. Substituční efekt je v případě zdražení vždy záporný, naopak v případě zlevnění je kladný. Důchodový efekt může být i kladný, což se může projevit tak, že celkový efekt bude také kladný, to však není příliš časté.

Důkaz: Platí $\Delta\phi = \phi(p+\Delta p, I) - \phi(p, I) + \sigma(p+\Delta p, \phi(p, I)) - \sigma(p+\Delta p, \phi(p, I))$. Označme $q = p + \Delta p$, $a = \phi(p, I)$. Využijeme body 5. a 6. věty 2.1.

Nyní $\phi(p+\Delta p, I) = \phi(p+\Delta p, J(p, \phi(p, I)))$, $\phi(p, I) = \sigma(p, \phi(p, I))$ a $\sigma(p+\Delta p, \phi(p, I)) = \phi(p + \Delta p, J(p + \Delta p, \phi(p, I)))$. □

Předchozí větu lze zapsat pomocí parciálních derivací následujícím způsobem. Interpretovat můžeme tak, že s rostoucím důchodem roste spotřeba normálního zboží, zatímco spotřeba zboží podřadného klesá (můžeme si dovolit něco lepšího).

Věta 2.3 Za předpokladů předchozí věty platí:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial p_j}(p, I) = -\phi_j(p, I)\frac{\partial \phi_i}{\partial I}(p, I) + \frac{\partial \sigma_i}{\partial p_j}(p, \phi(p, I)), \forall i, j = 1, ..., n$$

Typicky uvažujeme jednu z následujících úloh – max $u(x)$ za podmínky $p^T x = I, x \geq 0$, resp. min $q^T x$ za podmínky $u(x) = u(a), x \geq 0$.

Příklady

Příklad. Řešte max $u(x)$, t.ž. $p^T x = I, x \geq 0$ pomocí Lagrangeových multiplikátorů.

Řešení. Lagrangeovy multiplikátory mají následující tvar.

$$L(x, \lambda) = u(x) + \lambda(I - p^T x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0, i = 1, ..., n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - p^T x = 0$$

Příklad (Cobb-Douglas)**.** V úloze z předchozího příkladu uvažujte $u(x) = \sqrt{x_1 x_2}, p = (1, 2)$. Spočtěte marginální užitek (zisk/ztrátu za zvýšení/snížení spotřeby daného statku) a marginální míru substituce (poměr mezi marginálními užitky, míra, při níž je spotřebitel přijmout jiný statek jako náhradu za jednotku původního). Nalezněte řešení pomocí Lagrangeových multiplikátorů a uvědomte si využití Hicksova substitučního efektu.

Řešení. Všimněme si, že každý prvek (x_1, x_2) leží na nějaké indiferenční křivce $\sqrt{x_1 x_2} = c$, které se nikdy neprotínají.

$$MU_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{u}{2x_1}, MU_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2}, MRS_{12} = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

Řešením Lagrangeových multiplikátorů popsaných v předchozím příkladě získáme řešení ve tvaru $(x_1, x_2) = (5, \frac{5}{2})$.

3 Základy teorie firmy

Uvažujme situaci, kdy máme n vstupních komodit, jejichž množství značíme $x_i, i = 1, ..., n$, 1 výstupní komoditu, jejíž množství značíme q a produkční funkci f takovou, že $q = f(x_1, ..., x_n)$. Předpokládejme (P1), že funkce f je na R_+^n dvakrát diferencovatelná a striktně konkávní (tento předpoklad zajišťuje, že lokální maximum je i maximem globálním.

Definice 3.1 Nechť $x_1^0, ..., x_n^0$ jsou pevně dané nezáporné hodnoty a $x^{(i)} = (x_1^0, ..., x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, ..., x_n^0), i = 1, ..., n$. Pak definujeme $\mathrm{AP}_i \equiv \frac{f(x^{(i)})}{x_i}$ průměrný produkt i-tého vstupu, $\mathrm{MP}_i \equiv \frac{\partial f(x^{(i)})}{\partial x_i}$ mezní produkt i-tého vstupu $\omega_i \equiv \frac{\mathrm{MP}_i}{\mathrm{AP}_i}$ výstupní elasticitu i-tého vstupu.

Předpokládáme (P2), že $\mathrm{AP}_i > 0, \mathrm{MP}_i > 0, i = 1, ..., n$. Mezní produkt často bývá klesající, což vede k dalším kladeným omezením.

3.1 Úloha 1 – maximalizace produkce při daném rozpočtu

Nyní jsme v situaci max $f(x)$ za podmínky $r^T x \leq c, x \geq 0$, kde r je cena vstupů a c rozpočet firmy. Z teorie víme (viz poznámka v úvodním odstavci), že existuje právě jedno řešení této úlohy, které označíme $\psi(r, c)$. Lagrangeova funkce má tvar $L(x, \lambda) = f(x) - \lambda(c - r^T x)$, derivováním získáme lokální podmínky optimality v následujícím tvaru, z nichž dostaneme optimální řešení $\psi(r, c)$.

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - r_i \lambda = 0, i = 1, ..., n \ \ \& \ \ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = c - r^T x = 0.$$

3.2 Úloha 2 – naplnění poptávky s minimálními náklady

Matematicky si tuto úlohu zapíšeme následujícím způsobem – min $r^T x$ za podmínky $f(x) \geq q_0, x \geq 0$, kde q_0 je (minimální) poptávka. Opět se jedná o úlohu konvexního programování (lineární účelová funkce, konvexní podmínka), existuje tedy právě jedno řešení $\xi(r, q_0)$ a platí $f(\xi(r, q_0)) = q_0$. Lagrangeova funkce má tvar $L(x, \mu) = r^T x + \mu(q_0 - f(x))$ a lokální podmínky optimality, jejichž řešením získáme řešení $\xi(r, q_0)$ mají tvar

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = r_i - \mu \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = 0, i = 1, ..., n \ \ \& \ \ \frac{\partial L}{\partial \mu} = q_0 - f(x) = 0.$$

Mezi dvojicí řešení existují následující vztahy

$$\psi(r,c) = \xi(r, f(\psi(r,c))), \xi(r,q_0) = \psi(r, r^T\xi(r,q_0)) = c.$$

3.3 Úloha 3 – maximalizace zisku – nejčastější

Řečí optimalizace max $Z(x)(\equiv sf(x) - r^T x)$ za podmínky $x \geq 0$, kde s je cena výstupu. Řešení nalezneme opět s pomocí Lagrangeovy funkce, která má tvar $L(x,v) = sf(x) - r^T x$, lokální podmínky optimality jsou pak dány jako $\frac{\partial Z}{\partial x_i} = s\frac{\partial f}{\partial x_i} - r_i = 0, i = 1,...,n$. Odtud dostáváme, že pro libovolné $i,j = 1,...,n$ platí

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_j}} = \frac{r_i}{r_j} = \frac{\mathrm{MP}_i(x)}{\mathrm{MP}_j(x)} = \mathrm{RTS}_{i,j}(x),$$

kde $\mathrm{RTS}_{i,j}(x)$ nazýváme míra technické substituce komodit.

Elasticita substituce komodit

Nechť $\phi_{ji}(x) = \frac{x_j}{x_i}$, $\mathrm{RTS}_{i,j} = \frac{\mathrm{MP}_i(x)}{\mathrm{MP}_j(x)}$. Elasticitu substituce komodit i,j definujeme jako

$$\sigma_{ij}(x) = \frac{\frac{d\phi_{ji}(x)}{\phi_{ji}(x)}}{\frac{d(\mathrm{RTS}_{ij}(x))}{\mathrm{RTS}_{ij}(x)}}, i \neq j = 1,...,n.$$

Důležitým a častým případem zároveň je $\sigma_{ij} = k, \forall i \neq j = 1,...,n$ (konstantní elasticity substituce CES)

Definice 3.2 Funkce $\phi(x_1,...,x_n)$ se nazývá homogenní stupně k, jestliže $\phi(tx_1,...,tx_n) = t^k\phi(x_1,...,x_n)$.

Lemma 3.1 Nechť $\phi(x_1,...,x_n)$ je homogenní stupně k, potom $\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x_1,...,x_n)$ je homogenní stupně $k-1$.

Důkaz: Platí $\phi(tx_1,...,tx_n) = t^k\phi(x_1,...,x_n)/\frac{\partial}{\partial x_i}$.
Odtud derivováním obou stran $\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(tx_1,...,tx_n)t = t^k\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x_1,...,x_n)$. □

Příklady.

- Cobb-Douglasova produkční funkce – $f(x_1,...x_n) = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}$, kde $A > 0, \alpha_i \in (0,1), \forall i, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Platí CES, je homogenní stupně 1.
- CES produkční funkce lze vyjádřit ve tvaru $f(x_1,...,x_n) = A(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}}$, kde $A > 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \alpha_i \in (0,1)\forall i, \sigma_{ij}(x) = \frac{1}{1+\rho}, \forall i \neq j = 1,...,n$

Nyní se zabývejme zobecněním na více výstupů, uvažujme tedy m z nich, vyrobené množství označme $q_1, ..., q_m$. Pro budování teorie předpokládáme existenci výrobního procesu F takového, že $F(q_1, ..., q_m, x_1, ..., x_n) = 0$, F je dvakrát diferencovatelná, přičemž první i druhá derivace nejsou nulové a $\frac{\partial F}{\partial q_i}(q, x) > 0, \forall i = 1, ..., m$ a $\frac{\partial F}{\partial x_j}(q, x) < 0, \forall j = 1, ..., n$. Uvažujme úlohu maximalizace zisku, tedy max $Z(q, x)(\equiv \sum_{i=1}^{m} s_i q_i - \sum_{j=1}^{n} r_j x_j)$ za podmínky $F(q, x) = 0$. K řešení úlohy opět využijeme Lagrangeovu funkci, která má tvar $L(q, x, \lambda) = \sum_{i=1}^{m} s_i q_i - \sum_{j=1}^{n} r_j x_j + \lambda F(q, x)$. Derivováním získáme lokální podmínky optimality ve tvaru

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = s_i + \lambda \frac{\partial F}{\partial q_i} = 0, i = 1, ..., m \;\; \& \;\; \frac{\partial L}{\partial x_j} = -r_j + \lambda \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, j = 1, ..., n \;\; \& \;\; F(q, x) = 0.$$

Řešením této úlohy však často nalezneme pouze lokální, nikoliv globální, extrém.

Příklady

Příklad. Nechť $f(x_1,...,x_n) = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}, A > 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \alpha_i \in (0,1)$. Ukažte, že platí:

1. f je funkce CES
2. f je homogenní stupně 1
3. křivka rozvoje prochází počátkem

Řešení. 1. $\phi_{ji}(x) = \frac{x_j}{x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_i} = A\alpha_i x_i^{\alpha_i-1}x_1^{\alpha_1}...x_{i-1}^{\alpha_{i-1}}x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}x_n^{\alpha_n}$ a tedy $RTS_{ij}(x) = \frac{MP_i(x)}{MP_j(x)} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\frac{x_j}{x_i}$. Navíc $dRTS_{ij}(x) = -\frac{\alpha_i}{\alpha_j}x_j x_i^{-2}dx_i + \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\frac{1}{x_i}dx_j$ a tedy $\frac{dRTS_{ij}(x)}{RTS_{ij}(x)} = -\frac{dx_i}{x_i} + \frac{dx_j}{x_j}$ a vzhledem k tomu, že $\frac{d\phi_{ji}}{\phi_{ji}} = -\frac{dx_i}{x_i} + \frac{dx_j}{x_j}$, platí $\sigma_{ij}(x) = 1$ a funkce je CES.

2. $f(tx_1,...,tx_n) = A(tx_1)^{\alpha_1}...(tx_n)^{\alpha_n} = Atx_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$

3. $k_{ij} = RTS_{ij}(x) \implies \frac{k_{ij}}{\frac{\alpha_i}{\alpha_j}}x_i = x_j$

Příklad. Uvažujme produkční funkce ve tvaru $f(x_1,...,x_n) = A(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}}, A > 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \alpha_i \in (0,1), \rho \geq -1$.

1. Ukažte, že je CES a spočtěte elasticitu substituce komodit. Diskutujte limitní chování pro $\rho \to \{-1, 0, \infty\}$. Je tato funkce homogenní st. 1?
2. Lze Cobb-Douglasovu funkci z předchozího příkladu převést na tento tvar?

4 Dynamické modely rovnováhy nabídky a poptávky

V dalším budeme na nabídku a poptávku nahlížet jako na funkce ceny, která se (zpravidla) mění.

4.1 Model I – statický model

Nejprve si uveďme příklad statického modelu, ve kterém předpokládáme, že $D(p), S(p)$ (D od anglického demand, S od supply) jsou lineární funkcí ceny p a p je konstantní v čase (ve skutečnosti zcela nereálný předpoklad). Poptávka je s rostoucí cenou zpravidla klesající, tedy $D(p) = \alpha + ap, a < 0\alpha \in \mathbb{R}$ a nabídka naopak rostoucí, tedy $S(p) = \beta + bp, b > 0, \beta \in \mathbb{R}$, přičemž obě jsou nezáporné.

Hledáme rovnovážnou cenu $\bar{p}$ takovou, že $D(\bar{p}) = S(\bar{p})$. Kdyby $p > \bar{p}$, vyrábí se více, než zákaznici požadují, což by vedlo k poklesu ceny. Pokud $p < \bar{p}$ na trhu není dostatek zboží, což povede k nárůstu ceny. Řešením soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých získáme rovnovážnou cenu ve tvaru

$$\bar{p} = \frac{\alpha - \beta}{b - a}.$$

4.2 Model II – diskrétní čas

U mnoha produktů je plně dostačující uvažovat změnu ceny v diskrétním čase. Předpokládáme, že p není konstantní v čase a že nabídka v čase t je funkcí p_{t-1} (to odpovídá situaci, kdy je cena známá v okamžiku zahájení výroby), nabídka a poptávka jsou i nadále lineárními funkcemi – $D_t = D(P_t) = \alpha + aP_t, S_t = S(P_{t-1}) = \beta + bP_{t-1}$. (Pseudo)rovnovážnou cenu (neboť ve porovnáváme vlastně ceny ve dvou různých časech) získáme řešením soustavy

$$\alpha + ap_t = \beta + bp_{t-1}, \forall t \ \ \& \ \ \alpha + a\bar{p} = \beta + b\bar{p}.$$

Odečtení rovnice pro $\bar{p}$ od rovnice pro nějaký čas t získáme soustavu ve tvaru

$$p_t - \bar{p} = \frac{b}{a}(p_{t-1} - \bar{p}), \forall t.$$

Známe-li p_0 (např. cena z dnešního rána), pak se soustava zjednoduší na

$$p_t - \bar{p} = (\frac{b}{a})^+(p_0 - \bar{p}), \forall t.$$

Pokud platí $|\frac{b}{a}| < 1$, potom $\lim_{t\to\infty}(p_t - \bar{p}) = 0$.

4.3 Model III – spojitý čas

Předpokládáme, že $P(t)$ není konstantní a jedná se o diferencovatelnou funkci času t a D závisí i na dynamice (změně) ceny v čase. Uvažujme $D(t) = \alpha + aP(t) + a_1\frac{dP(t)}{dt}$, $a < 0, a_1 < 0$ (negativní reakce na změnu ceny) a $S(t) = \beta + bp(t), b > 0$.

Rovnováhy je dosaženo, pokud $D(t) = S(t)$, tedy pokud

$$\alpha + aP(t) + a_1\frac{dP(t)}{dt} = \beta + bP(t). \tag{4.1}$$

Funkce $P(t) = \bar{P}, \forall t \geq 0$ je řešením diferenciální rovnice s počáteční podmínkou $P(0) = \bar{P}$, což vede na rovnici

$$\alpha + a\bar{P}(t) + a_1\frac{d\bar{P}(t)}{dt} = \beta + b\bar{P}(t). \tag{4.2}$$

Položme $p(t) = P(t) - \bar{P}, \forall t \geq 0$, potom odečtením (4.1) a (4.2) dostáváme $ap(t) + a_1\frac{dp(t)}{dt} = bp(t)$, což vede na řešení

$$p(t) = ce^{\frac{b-a}{a_1}t}, p(0) = P(0) - \bar{P}, \text{neboli}$$

$$p(t) = (P(0) - \bar{P})e^{\frac{b-a}{a_1}t}.$$

Nyní pro $t \to \infty$ dostáváme $\lim_{t\to\infty} p(t) = 0$, a tedy $\lim_{t\to\infty} P(t) = \bar{P}$. Pokud $a_1 > 0$, potom $p(t)$ diverguje, což si lze vyložit tak, že spotřebitel nesníží při nárůstu ceny tolik, kolik by se od něj očekávalo).

4.4 Model IV – spojitý čas

Předpokládejme opět, že cena P není konstantní v čase a uvažujme navíc $Q(t)$ vyjadřující stav zásob v čase t, tedy $\frac{dQ(t)}{dt} = S(t) - D(t)$. Pokud tedy $S(t) > D(t)$, vyrábíme tzv. na sklad, pokud platí nerovnost opačná, skladové zásoby ubývají. Nyní uvažujeme $D(t) = \alpha + aP(t), S(t) = \beta + bP(t), a < 0, b > 0$ a navíc $Q(t) = Q_0 + \int_0^t (S(x) - D(x))dx$ a $\frac{dP(t)}{dt} = -\lambda\frac{dQ(t)}{dt}, \lambda > 0$. Odtud dostáváme diferenciální rovnici ve tvaru

$$\frac{dP(t)}{dt} = -\lambda(S(t) - D(t)) = -\lambda(\beta + bP(t) - \alpha - aP(t)). \tag{4.3}$$

Podobně jako u modelu III pozorujeme, že $\bar{P}(t) = \bar{P}, \forall t \geq 0$ je řešením diferenciální rovnice s poč. podmínkou $P(0) = \bar{P}$, neboť

$$\frac{d\bar{P}(t)}{dt} = -\lambda(\beta + b\bar{P}(t) - \alpha - a\bar{P}(t))(= 0). \tag{4.4}$$

Definujme $p(t) = P(t) - \bar{P}$ a odečteme rovnice (4.3) a (4.3), získáme rovnici, jejíž řešení (zcela analogicky jako u modelu III) je tvaru $p(t) = (P(0) - \bar{P})e^{-\lambda(b-a)t}$, opět platí, že $\lim_{t\to\infty} p(t) = 0$, a tedy $\lim_{t\to\infty} P(t) = \bar{P}$.

Příklady

Příklad. Uvažujte následující modifikaci modelu I. Nechť $D_t = \alpha + a_1 P_t + a_2(P_t - P_{t-1}, S_t = \beta + bP_{t-1}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, a_1, a_2 < 0, b > 0, P_0$ dáno, $t = 0, 1, 2, \dots$ Nalezněte řešení $D_t = S_t, \forall t$.

Řešení.

$D_t = \alpha + a_1 P_t + a_2(P_t - P_{t-1}), S_t = \beta + bP_{t-1}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, a_1, a_2 < 0, b > 0, P_0$ dáno, $t = 0, 1, 2, \dots$

$$
\begin{aligned}
D_t &= S_t \\
\alpha + a_1 P_t + a_2(P_t - P_{t-1}) &= \beta + bP_{t-1} \\
\alpha + a_1 \bar{P} + a_2(\bar{P} - \bar{P}) &= \beta + b\bar{P} \ (P_t = \bar{P}, \forall t), \text{ odtud} \\
a_1(P_t - \bar{P}) + a_2(P_t - \bar{P}) - a_2(P_{t-1} - \bar{P}) &= b(P_{t-1} - \bar{P}), \text{ přeznačme} \\
a_1 p_t + a_2 p_t - a_2 p_{t-1} &= bp_{t-1} \\
(a_1 + a_2)p_t - (a_2 + b)p_{t-1} &= 0 \implies \\
p_t &= \frac{a_2 + b}{a_1 + a_2} p_{t-1} \implies p_t = (P_0 - \bar{P}) \left(\frac{a_2 + b}{a_1 + a_2} \right)^t
\end{aligned}
$$

Nyní pokud $\left| \frac{a_2 + b}{a_1 + a_2} \right| < 1$, potom $\lim_{t \to \infty} P_t - \bar{P} = 0$. Pokud $\left| \frac{a_2 + b}{a_1 + a_2} \right| = 1$, potom $\lim_{t \to \infty} P_t - \bar{P} = P_0 - \bar{P}$, pokud $\frac{a_2 + b}{a_1 + a_2} < -1$, potom $\lim_{t \to \infty} P_{2t} - \bar{P} = \infty$ a $\lim_{t \to \infty} P_{2t+1} - \bar{P} = -\infty$, a když $\frac{a_2 + b}{a_1 + a_2} > 1$, tak $\lim_{t \to \infty} P_t - \bar{P} = \infty$.

5 Rovnováha meziodvětvových vztahů

5.1 Leontjevův model

Nyní se zabývejme situací, kdy máme n výrobků z n různých odvětví, předpokládejme, že každé odvětví produkuje právě jeden výrobek. Při výrobě umožňujeme spotřebu výrobků z jiných odvětví, mimo snahy o uspokojení vnější (exogenní) poptávky tedy část vyrobených výrobků použijeme při výrobě jiných. Výrobky si očíslujeme čísly $i = 1, \ldots, n$, množství jednotek výrobků potom označme $x_i, i = 1, \ldots, n$, množství jednotek výrobku i, které jsou zapotřebí pro výrobu jednotky výrobku j značíme $a_{ij} \geq 0, i \neq j = 1, \ldots, n$, exogenní poptávku po i-tém výrobku označíme c_i.

Modelem rozumíme $c_i = x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, i = 1, \ldots, n, x_j \geq 0, \forall j = 1, \ldots, n$, maticově zapsáno $(\mathbb{E} - \mathbb{A})\mathbb{x} = \mathbb{c}, \mathbb{x} \geq 0$, kde $\mathbb{E}$ je jednotková matice a $\mathbb{A}$ je tzv. technologická matice (čtvercová matice s nezápornými prvky) Pokud soustava má řešení, nazýváme ji produktivní.

Řešitelnost

Pro teoretické úvahy mějme zobecnění soustavy výše ve tvaru $(\rho\mathbb{E} - \mathbb{A})\mathbb{x} = \mathbb{c}, \mathbb{x} \geq 0$ (naši úlohu získáme volbou $\rho = 1$). Matici se zápornými prvky mimo diagonálu $(\rho\mathbb{E} - \mathbb{A})$ označíme $\mathbb{D}$. Řešitelností soustav ve tvaru

$$\mathbb{D}\mathbb{x} = \mathbb{c}, \mathbb{x} \geq 0, d_{ij} \leq 0, \forall i \neq j = 1, \ldots, n \tag{5.1}$$

se zabývá následující věta.

Věta 5.1 Následující tvrzení jsou ekvivalentní

1. Soustava $\mathbb{D}\mathbb{x} = \mathbb{c}, \mathbb{x} \geq 0, d_{ij} \leq 0, \forall i \neq j = 1, \ldots, n$ je řešitelná pro nějaké $c_i > 0, i = 1, \ldots, n$.

2. Soustava $\mathbb{D}\mathbb{x} = \mathbb{c}, \mathbb{x} \geq 0, d_{ij} \leq 0, \forall i \neq j = 1, \ldots, n$ je řešitelná pro všechna $c_i \geq 0, i = 1, \ldots, n$.

3. Nechť Δ_k značí hlavní subdeterminant (determinant podmatice, kterou tvoří prvních k řádků a prvních k sloupců) matice $\mathbb{D}$ pro $k = 1, \ldots, n$. Potom $\Delta_k > 0, \forall k = 1, \ldots, n$. (podmínka řešitelnosti)

5.2 Duální Leontjevův model

Nyní se zabývejme problémem nacenění výrobků tak, aby byl realizován zvolený zisk. Označme $\mathbb{p}^T = (p_1, ..., p_n)$ vektor cen jednotlivých výrobků, nyní předpokládejme, že prodejní i nákupní cena jsou stejné (tento předpoklad však není příliš realistický).

Modelem nyní rozumíme $v_j = p_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} p_i, v_j \geq 0, j = 1, ..., n, p_i \geq 0, i = 1, ..., n$ Menšenec odpovídá tržbě za prodej j-tého výrobku a menšitel potom celkovým nákladům, které musíme vynaložit k výrobě jednotky j-tého výrobku. Pokud existuje řešení soustavy rovnic dané modelem, nazýváme soustavu ziskutvornou.

Úlohu opět můžeme přepsat maticově jako $(\rho\mathbb{E} - \mathbb{A})^T \mathbb{p} = \mathbb{v}, \mathbb{p} \geq 0$, pro $\rho = 1$, obecněji

$$\mathbb{D}\mathbb{p} = \mathbb{v}, \mathbb{p} \geq 0, d_{ij} \leq 0, i \neq j = 1, ..., n, \tag{5.2}$$

tato úloha je duální k úloze uvažovaná v předchozí sekci.

Věta 5.2 Soustava je produktivní právě tehdy, když je ziskutvorná.

Věta 5.3 (Postačující podmínka – Brower-Sollow) Uvažujme soustavu $c_i = \rho x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$, $\forall i = 1, ..., n, x_j \geq 0, \forall j = 1, ..., n$ a nechť $r_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}, s_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}, \forall i, j = 1, ..., n$.

1. Pokud $\rho > r_i, \forall i = 1, ..., n$, potom soustava (5.1) je produktivní.
2. Pokud $\rho > s_j, \forall j = 1, ..., n$, potom duální soustava (5.2) je ziskutvorná.

Definice 5.1 Matice $\mathbb{D}$ je nezáporně invertibilní, jestliže je regulární a prvky $\mathbb{D}^{-1}$ jsou nezáporné.

Věta 5.4 (Nutná a postačující podmínka) Soustava (5.1) je produktivní, respektive soustava (5.2) je ziskutvorná právě tehdy, když $\mathbb{D} = \rho\mathbb{E} - \mathbb{A}$ je nezáporně invertibilní.

Věta 5.5 Nechť $\mathbb{A}$ je nezáporná čtvercová matice řádu n a $\rho > 0$. Potom

1. Je-li matice $(\rho\mathbb{E} - \mathbb{A})$ nezáporně invertibilní, platí $(\rho\mathbb{E} - \mathbb{A})^{-1} = \frac{1}{\rho} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^\nu}{\rho^\nu}$.
2. Je-li řada $\frac{1}{\rho} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^\nu}{\rho^\nu}$ konvergentní, potom matice $(\rho\mathbb{E} - \mathbb{A})$ je nezáporně invertibilní a platí $(\rho\mathbb{E} - \mathbb{A})^{-1} = \frac{1}{\rho} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^\nu}{\rho^\nu}$.

Spektrální vlastnosti

Lemma 5.6 Nechť $\mathbf{M}(\mathbb{A}) = \{\rho : (\rho\mathbb{E} - \mathbb{A})$ je nezáporně invertibilní$\}$, potom $\mathbf{M}(\mathbb{A}) = (\lambda, \infty), \lambda \geq 0$.

Lemma 5.7 Nechť $\lambda \equiv \inf \mathbf{M}(\mathbb{A})$. Potom existuje $\tilde{\mathbb{x}} > 0$ takový, že $\mathbb{A}\tilde{\mathbb{x}} = \lambda\tilde{\mathbb{x}}$.

Věta 5.8 (Perron-Frobenius) Nechť $\mathbb{A}$ je nezáporná čtvercová matice řádu n a nechť $\lambda \equiv \inf \mathbf{M}(\mathbb{A})$. Potom

1. λ je největší nezáporné vlastní číslo matice $\mathbb{A}$, kterému odpovídá nezáporný vlastní vektor. Matice $(\rho\mathbb{E} - \mathbb{A})$ je nezáporně invertibilní právě tehdy, když $\rho > \lambda$.
2. Nechť $\mathbb{y} > 0$, $\mu \geq 0$ a nechť $\mathbb{A}\mathbb{y} \geq \mu\mathbb{y}$, potom $\mu \leq \lambda$.
3. Nechť ω je libovolné vlastní číslo matice $\mathbb{A}$, potom $|\omega| \leq \lambda$.

Důsledek. ($\rho = 1$) Nechť λ je největší nezáporné vlastní číslo matice A. Pokud $\lambda < 1$, potom soustava (5.1) je produktivní, resp. soustava (5.2) ziskutvorná.

Rozložitelnost matice $\mathbb{A}$

Definice 5.2 Nezáporná čtvercová matice je rozložitelná (= reducibilní), jestliže existuje neprázdná podmnožina J množiny všech indexů $\{1, ..., n\}$ taková, že $a_{ij} = 0, \forall i \notin J, j \in J$. Matice je nerozložitelná, když není rozložitelná.

Důsledek. Matice $\mathbb{A}$ je rozložitelná právě tehdy, když existuje permutační matice $\mathbb{T}$ taková, že

$$\mathbb{T}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{T} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ \mathbb{0} & B_{22} \end{bmatrix}.$$

Důsledek lze v naší situaci interpretovat tak, že výrobky můžeme přerovnat takovým způsobem, že k výrobě j-tého výrobku se již nepoužívají další výrobky.

6 Teorie her

Hlavním cílem teorie her je modelování konfliktních situací, hledá se nejlepší možné rozhodnutí. S aplikacemi teorie her se setkáváme nejčastěji v ekonomii, či politice. Rozlišujeme dvě základní poněkud odlišné teorie – teorii nekooperativních her, kdy všichni hrají proti všem a teorii her kooperativních, kdy může docházet k tvorbě koalic.

Hru definujeme následujícím způsobem – nechť N je počet hráčů, označme $X = X_1 \times ... \times X_N$ množinu strategií všech hráčů (X_1 je množina strategií prvního hráče). Mějme reálné funkce $f_i(x_1, ..., x_N)$, které nazýváme výplatní funkcí i-tého hráče. Všimněme si, že výplatní funkce závisí i na rozhodnutí ostatních hráčů!

Hry dělíme podle počtu hráčů ($2/N$), podle výplaty (hry s konstantní (nulovým) součtem, tj. $\sum_{j=1}^{N} f_i(x_1, ..., x_N)$ je konst./hry s nekonstantním součtem), podle dynamiky (hry statické, tj. jednokolové/hry dynamické, speciálně hry evoluční, kde se hráči učí na základě předchozích kol), podle inteligence hráčů (p-inteligentní hráči, tj. s pstí p se hráč rozhoduje náhodně/inteligentní hráči).

6.1 Teorie nekooperativních her

Uvažujme hru N hráčů, která je nekooperativní, každý z hráčů chce tedy maximalizovat svoji výplatu (přirozeně tedy nelze vyhovět každému hráči).

Rovnovážný bod – Nashova rovnováha

Strategie $(x_1, ..., x_N)$ je Nashův rovnovážný bod, pokud $\forall i = 1, ..., N$ platí $f_i(x_1, ..., x_i, x_{i+1}, ..., x_N) \geq f_i(x_1, ..., y_i, x_{i+1}, ..., x_N), \forall y_i \in X_i$, pokud navíc platí ostrá nerovnost s výjimkou $y_i = x_i$, pak strategii nazýváme silný Nashův rovnovážný bod, pokud nastává rovnost pro alespoň jedno i, strategii nazýváme slabý Nashův rovnovážný bod. Podmínky můžeme číst tak, že pokud ostatní hráči zůstanou u svých zvolených strategií, i-tý hráč si již nemůže polepšit.

Nedominantnost

Strategie $(x_1, ..., x_N)$ je nedominovaná (efektivní), jestliže neexistuje žádná strategie $(y_1, ..., y_N) \in X$ taková, že $f_i(x_1, ..., x_N) \leq f_i(y_1, ..., y_N), \forall i = 1, ..., N$.

Nashův rovnovážný bod však nemusí být nedominovaný!

Příklad. (Vězňovo dilema) Nyní si povšimněme, že strategie (zradí, zradí) je Nashův

Vězeň 1	Vězeň 2			
	zradí		nezradí	
zradí	–8	–8	0	–10
nezradí	–10	0	–1	–1

Tabulka 6.1: Hodnoty výplatních funkcí pro dvojici hráčů v závislosti na rozhodnutí

rovnovážný bod – ani jednomu hráči se nevyplatí změnit strategii a nezradit, nejedná se ale o nedominovanou strategii, neboť (nezradí, nezradí) dominuje (zradí, zradí).

Strategie (nezradí, nezradí) naopak Nashův rovnovážný bod není, pokud si první vězeň zafixuje, že nezradí a druhý hráč změní své původní rozhodnutí a zradí, dostane 0 místo –1. Přesto však tato strategie dominuje strategii (zradí, zradí), která je Nashovým rovnovážným bodem.

Příklad. (Hledání Nashova rovnovážného bodu)

H1	H2			
	S1		S2	
S1	0	1	3	2
S2	1	0	2	3

Tabulka 6.2: Hodnoty výplatních funkcí pro dvojici hráčů v závislosti na rozhodnutí

(S1, S2) je zřejmě Nashův rovnovážný bod, jelikož se ani jednomu hráči nevyplatí při fixní volbě druhého z nich změnit svoje rozhodnutí. (S1, S1) a (S2, S1) Nashovými rovnovážnými body nejsou, neboť si oba hráči mohou změnou rozhodnutí přilepšit. (S2, S2) Nashovým rovnovážným bodem rovněž není, neboť pokud H2 zafixuje S2, potom se H1 vyplatí S1.

Nashových rovnovážných bodů může existovat více, což je jedna ze slabin této teorie, neboť není jasné, který máme zvolit. Ukázku získáme drobnou modifikací předchozího příkladu.

H1	H2			
	S1		S2	
S1	3	2	0	1
S2	1	0	2	3

Tabulka 6.3: Hodnoty výplatních funkcí pro dvojici hráčů v závislosti na rozhodnutí

Příklad. V tomto příkladu máme dvojici Nashových rovnovážných bodů (S1, S1) a (S2, S2).

Nashův rovnovážný bod také nemusí vůbec existovat (uvažujeme-li pouze čisté strategie), to nás vede k myšlence smíšených strategií – uvažujeme pravděpodobnostní rozdělení na čistých strategiích na X, potom již vždy alespoň jeden Nashův rovnovážný bod existuje.

Příklad. (Nashův rovnovážný bod neexistuje)

H1	H2			
	S1		S2	
S1	2	1	2	0
S2	3	0	1	1

Tabulka 6.4: Hodnoty výplatních funkcí pro dvojici hráčů v závislosti na rozhodnutí

6.2 Teorie kooperativních her

U kooperativních her umožňujeme vytváření koalic $S \subseteq N = \{1, ..., n\}$.

Definice 6.1 Nechť pro funkci $v : 2^N \to [0, \infty)$, která každé koalici S přiřadí nejvyšší možnou výhru, jakou si S může zajistit bez ohledu na ostatní hráče, platí

1. $v(\emptyset) = 0$
2. v je superaditivní, tj. $v(S) + v(K) \leq v(S \cup K), \forall S, K \subseteq \{1, ..., n\}, S \cap K = \emptyset$,

potom funkci v nazýváme charakteristická funkce hry.

Superaditivitu v definici charakteristické funkce můžeme chápat tak, že spojení koalic vede k alespoň stejnému zisku, který měly koalice předtím, dohromady. Tento předpoklad může být diskutabilní, spojí-li se například nejsilnější koalice s někým velmi slabým, může na spojení tratit. Někdy hráč nechce vstoupit do koalice z důvodu, že v rámci přerozdělování zisku by dostal méně, než kolik mu náleží samostatně. Charakteristická funkce tedy udává výhru koalice v nejhorším možném případě.

Definice 6.2 Nechť x_i je výplata i-tého hráče v koalici S, rozdělení výplaty koalice S se nazývá efektivní, pokud

1. $x_i \geq v(\{i\})$ (výplata v koalici musí být vyšší, než kdyby hráč zůstal sám).
2. $\sum_{i \in S} x_i = v(S)$ (rozděluje se celá výhra).

Množinu efektivních výplat označíme $E(v)$.

Definice 6.3 Nechť $\mathbb{x} = (x_1, ..., x_n)$, kde x_i je výplata i-tého hráče. Potom $\mathbb{x}$ se nazývá výplata (výplatní vektor).

Definice 6.4 Řekneme, že výplatní vektor $\mathbb{y}$ je dominován výplatním vektorem $\mathbb{x}$ vzhledem ke koalici $S \subseteq N$ (značení $\mathbb{y} <_S \mathbb{x}$), jestliže

1. $x_i > y_i, \forall i \in S$
2. $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$.

Výplata $\mathbb{y}$ je dominována výplatou $\mathbb{x}$ (značení $\mathbb{y} \prec \mathbb{x}$), jestliže existuje neprázdná koalice S taková, že $\mathbb{y} \prec_S \mathbb{x}$.

Stabilní množiny

Definice 6.5 Řekneme, že množina $\mathbf{S}(v) \subseteq E(v)$ je stabilní množina hry v, jestliže platí

1. $\forall x, y \in \mathbf{S}(v) : y \nprec x$,
2. pro každou efektivní výplatu $z \notin \mathbf{S}(v)$ existuje $x \in \mathbf{S}(v) : z \prec x$.

Může se však stát $y \prec z \prec x, x, y \in \mathbf{S}(v), z \notin \mathbf{S}(v)$. S řešením tohoto problému přišel v roce 1959 Gilles, kdy zavedl tzv. jádro hry.

Definice 6.6 Jádro kooperativní hry pro koalici N je množina efektivních výplat, které nejsou dominované žádnou výplatou. Značíme $C(v)$.

Věta 6.1 Výplatní vektor $\mathbb{x} = (x_1, ..., x_n) \in C(v)$ právě tehdy, když

1. $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$,
2. $\forall S \subseteq N : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$.

Větu výše můžeme interpretovat tak, že prvky jádra rozdělují veškerý zisk a pro všechny možné podkoalice N je výhodné být její součástí.

Věta 6.2 Jádro hry $C(v)$ je podmnožinou stabilní množiny hry $\mathbf{S}(v)$.

Jádro je ale stále množina, nikoliv konkrétní hodnota – můžeme uvažovat těžiště jádra (střední hodnotu rovnoměrného rozdělení na $C(v)$). Pokud by hráčům těžiště nevyhovovalo, je možné se trochu posunout a stále zůstat v jádru (výhodné). Výhodou jádra je, že pro lineární případ je jeho nalezení snadné (jedná se o polyedrickou množinu) a je určeno jednoznačně. Může se však stát, že jádro bude prázdné. Řešením je pak tzv. Shapleyho hodnota.

Shapleyho hodnota

Zabýváme se alternativním řešením hry, definujme

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N} \mathbb{1}_{[i \in S]} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})], \tag{6.1}$$

kde $|S|$ je počet členů koalice S, $|N| = n, v(S) - v(S\backslash\{i\})$ je benefit, který přinese i-tý hráč koalici S, tedy i výplata, kterou je koalice ochotna zaplatit za přistoupení i-tého hráče do koalice, člen $(|S|-1)!$ odpovídá všem pořadím, jakými se mohou hráči přiřadit před přidáním i-tého hráče, $(|N|-|S|)!$ odpovídá pořadím přiřazení hráčů po přidání i-tého, $|N|!$ jsou potom všechna pořadí. Hodnota $\Phi_i(v)$ je odhad střední hodnoty výhry i-tého hráče.

Shapleyho hodnota nemusí být ani pro případ neprázdného jádra hry jeho součástí.

Příklad. Uvažujme $n = 3, N = \{1,2,3\}$ a $v(1) = 1, v(2) = v(3) = v(\{2,3\}) = 0, v(\{1,2\}) = 2, v(\{1,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 3$. Hledáme jádro pomocí věty 6.1.

1. $x_1 + x_2 + x_3 = v(\{1,2,3\}) = 3,$
2. $x_1 \geq 1, x_2, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 2, x_1 + x_3 \geq 3, x_2 + x_3 \geq 0.$

Řešením soustavy získáme jádro ve tvaru $(x_1, x_2, x_3) = (k, 0, 3-k), k \in [2,3]$, jedná se o úsečku, jejíž těžiště je v bodě $(2.5, 0, 0.5)$. To vede na pravděpodobnou koalici hráče 1 a 3, neboť hráč 2 nic nepřináší (a ani jemu členství v koalici nic nepřináší).

Spočtěme rovněž Shapleyho hodnotu hry (nejprve uvažujeme koalice o velikosti 1, pak 2 a nakonec koalici o všech hráčích):

1. $\Phi_1(v) = \frac{0!2!}{3!}1 + \frac{1!1!}{3!}2 + \frac{1!1!}{3!}1 + \frac{2!0!}{3!}3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{13}{6}$ (součástí jádra)
2. $\Phi_2(v) = \frac{1!1!}{3!}1 = \frac{1}{6}$ (pro hráče 2 výhodnější než jádro)
3. $\Phi_3(v) = \frac{1!1!}{3!}2 + \frac{2!0!}{3!}1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (přibližně v jádru)

Příklady

Příklad. Uvažujme hru dvou hráčů s množinami strategií $X_1 = X_2 = \{2, 3\}$ a výplatními funkcemi $f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $f_2(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$. Nalezněte Nashův rovnovážný bod této úlohy.

Řešení. Nashův rovnovážný bod je v tomto případě bod $(x_1, x_2) = (3, 2)$, neboť oba hráči by si pohoršili v případě změny strategie v situaci, kdy soupeř zafixoval svoji volbu.

Příklad. Uvažujme následující hru. Nalezněte Nashův rovnovážný bod v situaci, kdy je možné uvažovat smíšené strategie (zároveň ukažte, že pro čisté strategie hra nemá NRB).

Hráč 1	Hráč 2			
	B_1		B_2	
A_1	2	–3	1	4
A_2	1	1	3	0

Příklad (Sourozenecká hádka)**.** Uvažujme následující hru. Nalezněte Nashův rovnovážný bod pro situaci, kdy uvažujeme jen čisté strategie i pro situaci, kdy dovolujeme strategie smíšené.

Sestra	Bratr			
	Míč		Panenka	
Míč	2	4	0	0
Panenka	0	0	4	2

Příklad (Kámen, nůžky, papír)**.** Uvažujme následující hru. Nalezněte Nashův rovnovážný bod pro situaci, kdy dovolujeme strategie smíšené a ukažte, že neexistuje NRB v čistých strategiích.

Hráč 1	Hráč 2					
	K		N		P	
K	0	0	1	–1	–1	0
N	–1	1	0	0	1	–1
P	1	–1	–1	1	0	0

Příklad. Uvažujme $n = 3, N = \{1, 2, 3\}$ a $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = 1$, $v(\{2, 3\}) = 2$, $v(\{1, 2\}) = 2$, $v(\{1, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 3$. Určete jádro a spočtěte Shapleyho hodnotu.

Řešení. Jádro je množina bodů (x_1, x_2, x_3) takových, že: $x_1+x_2+x_3 = 3 \rightarrow x_3 = 3-x_1-x_2$, navíc všechny složky jsou kladné a platí následující nerovnosti $x_1 + x_2 \geq 1, x_1 + x_3 \geq 1, x_2 + x_3 \geq 2$. Odtud dostáváme, že jádro je množina bodů $x_1 \in [0,1], x_2 \in [1 - x_1, 2]$ a $x_2 = 3 - x_1 - x_2$, tedy konvexní obal bodů $(1,2,0), (1,0,2), (0,1,2), (0,2,1)$.

Příklad. Uvažujme hru 3 hráčů A, B, C se dvěma strategiemi:

B	C 1	C 2	B	C 1	C 2
1	(0,3,1)	(2,1,1)	1	(1,0,0)	(1,1,1)
2	(4,2,3)	(1,0,0)	2	(0,0,1)	(0,1,1)
	A vybírá 1			A vybírá 2	

Nalezněte optimální rozložení do koalic.