VÍCEKRITERIÁLNÍ ROZHODOVANÍ

Obsah

- Typy modelů vícekriteriálního rozhodování
- Základní pojmy
- Typy informací
- Cíl modelů
- Užitek, funkce užitku
- Grafické zobrazení
- Metody vícekriteriální analýzy variant

Typy modelů

- Vícekriteriální optimalizační model
  - Množina přípustných řešení je nekonečná
- Model vícekriteriální analýzy variant
  - Množina přípustných řešení je konečná

Model vícekriteriální analýzy variant

- Množina přípustných řešení je konečná
- Každá varianta je hodnocena podle několika kritérií

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & \cdots & f_k \end{array} \\
\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{array} & \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1k} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{p1} & y_{p2} & \cdots & y_{pk} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Koupě motorové kosy

Vyberte nejvhodnější motorovou kosu ze tří možností podle ceny, výkonu a hmotnosti.

	Cena	Výkon	Hmotnost	Názor
722 S	9600,-	0,7 kW/min	5,8	ne
726 D	10900,-	0,8 kW/min	6,2	nevím
735 S	12950,-	1,1 kW/min	6,2	ano
	min	max	min	

Základní pojmy

- Ideální a bazální varianta
- Dominance řešení
- Paretovské řešení
- Kompromisní řešení

Ideální a bazální varianta

- *Ideální řešení (varianta) je hypotetické nebo reálné řešení, reprezentované ve všech kritériích současně nejlepšími možnými hodnotami.*
  - varianta H s ohodnocením (h_1, ..., h_k)
  - absolutní vs. relativní
- *Bazální řešení (varianta) je hypotetické nebo reálné řešení, reprezentované nejhorším ohodnocením podle všech kritérií.*
  - varianta D s ohodnocením (d_1, ..., d_k)
  - absolutní vs. relativní.

Dominance řešení

V této definici předpokládáme všechna kritéria maximalizační. Minimalizační se převedou na maximalizační.

- Varianta a_i dominuje variantu a_j , jestliže pro její ohodnocení platí

  $(y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ik}) \geq (y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jk})$

  a existuje alespoň jedno kritérium f_l , že $y_{il} > y_{jl}$.
- Řešení je nedominované (efektivní) řešení problému, pokud neexistuje žádné jiné řešení, které by jej dominovalo.

Paretovské řešení

- Varianta (řešení), která není dominovaná žádnou jinou variantou, je nedominovaná varianta, často se též nazývá efektivní nebo paretovská.

(Wilfredo Paretto)

Kompromisní řešení

- *Kompromisní varianta (řešení) má od ideální varianty (řešení) nejmenší vzdálenost podle vhodné metriky (měřenou vhodným způsobem).*
- *Kompromisem může být i zanedbání některých kritérií.*
- *Pokud nezanedbáme žádné kriterium, kompromisní varianta bude jedna z paretovských*

Cíl řešení modelů

- Nalezení jediné kompromisní varianty, kompromisního řešení (Nalezení určitého počtu kompromisních variant, např. pro různé metriky)

- Rozdělení řešení na efektivní a neefektivní

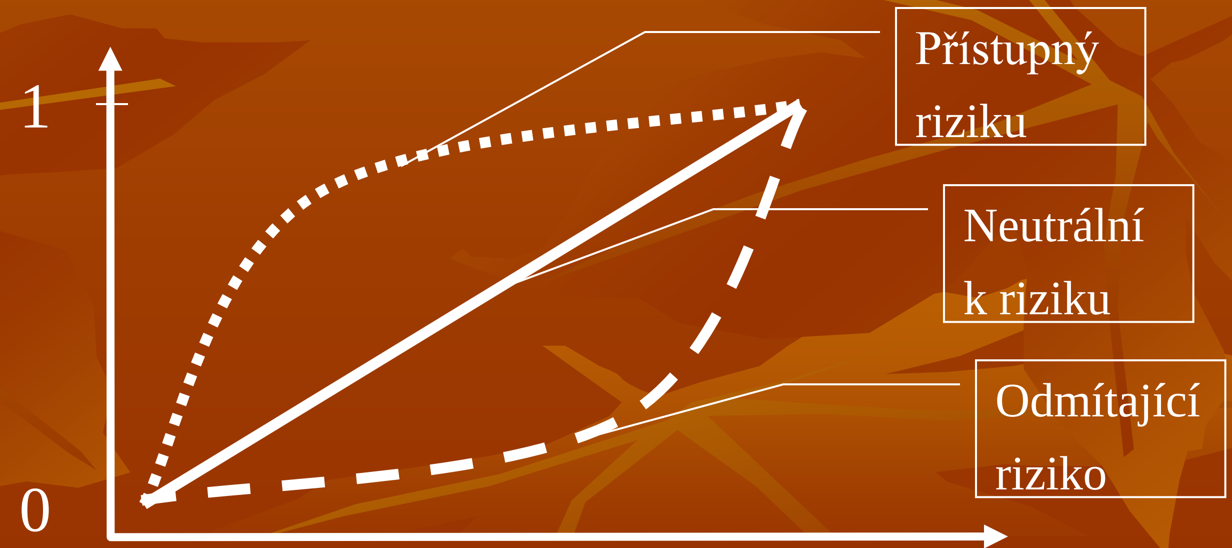
- Uspořádání všech řešení od nejlepšího k nejhoršímu

Užitek, funkce užitku

- Každé ohodnocení varianty je možno vyjádřit ve formě užitku, který tato varianta přináší
- Dílčí hodnoty užitku lze sloučit do celkového užitku varianty a podle toho varianty vybírat

Funkce užitku

- Funkce užitku převádí ohodnocení řešení do intervalu ⟨0, 1⟩
- Podle jejího tvaru lze charakterizovat rozhodovatele



Grafické zobrazení problému I

Typy informací

- Preference (váhy) jednotlivých kritérií
- Hodnocení variant podle každého kritéria
  - žádná informace
  - nominální informace - *aspiračních úrovně*
  - ordinální informace - *kvalitativní – uspořádání*
  - kardinální informace - *kvantitativní*

Metody odhadu vah kritérií

- Přímé určení vah
- Ordinální srovnání kritérií
  - všech najednou (***metoda pořadí***)
  - párové (***Fullerova metoda***)
- Kardinální srovnání kritérií
  - všech najednou (***bodovací metoda***)
  - párové (***Saatyho metoda***)

Metoda pořadí

Mějme p kritérií a q expertů. Kritéria jsou uspořádána přiřazením přirozených čísel p, $p - 1$, … , 1. Nejdůležitějšímu kritériu je přiřazeno číslo p, nejméně důležitém číslo 1.

Nechť a_{ij} je číslo přiřazené i-tému kritériu j-tým expertem.

Váha i-tého kritéria podle j-tého experta:

$$v_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{p} a_{ij}} = \frac{a_{ij}}{\frac{p(p+1)}{2}}$$

Výsledná váha i-tého kritéria:

$$v_i = \frac{\sum_{j=1}^{q} v_{ij}}{q} = \frac{\sum_{i=1}^{p} a_{ij}}{\frac{p(p+1)q}{2}}$$

Bodovací metoda

Mějme p kritérií a q expertů. Pro zvolenou bodovací stupnici musí j-tý expert ohodnotit i-té kritérium hodnotou a_{ij} ležící v dané stupnici. Čím je kritérium důležitější, tím je bodové ohodnocení větší.

Váha i-tého kritéria podle j-tého experta:

$$v_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{p} a_{ij}}$$

Výsledná váha i-tého kritéria:

$$v_i = \frac{\sum_{j=1}^{q} v_{ij}}{q}$$

Fullerova metoda

Mějme p kritérií a q expertů. Každý expert postupně srovnává každá 2 kritéria mezi sebou, takže tedy provede

$$N = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$ srovnání.

Srovnání se mohou provádět v tzv. *Fullerově trojúhelníku*, v němž jsou zachyceny všechny možné dvouprvkové kombinace kritérií. Experti u každé dvojice zakroužkují to kritérium, které pokládají za důležitější. Nechť a_{ij} je počet zakroužkování i-tého kritéria u j-tého experta.

Váha i-tého kritéria podle j-tého experta: $$v_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{p} a_{ij}} = \frac{a_{ij}}{N}$$

Výsledná váha i-tého kritéria: $$v_i = \frac{\sum_{j=1}^{q} v_{ij}}{q}$$

Saatyho metoda

Metoda kvantitativního párového porovnání

- Stupnice:
  - S_{ij} = 1…rovnocenné
  - S_{ij} = 3…slabá preference
  - S_{ij} = 5…silná preference
  - S_{ij} = 7…velmi silná preference
  - S_{ij} = 9…absolutní preference
- Saatyho matice – čtvercová, recipročnί: $S_{ij} = 1/S_{ji}$
- Váhy – normalizovaný geometrický průměr řádků Saatyho matice

Saatyho metoda

- Například ať má Saatyho matice následující podobu:

	K1	K2	K3	K4	K5
K1	**1**	1/5	1/3	6	8
K2	5	**1**	2	2	5
K3	3	1/2	**1**	1/3	1/3
K4	1/6	1/2	3	**1**	7
K5	1/8	1/5	3	1/7	**1**

Váhy chceme stanovat tak, aby platilo

součet = 1 a podíly vah jsou rovny S_{ij} (pokud S_{ij} udává, kolikrát preferuji K_i před K_j, mělo by se to odrazit i v poměru vah).

Saatyho metoda

Není možné splnit všechny podmínky, proto se chceme alespoň co nejvíce přiblížit:

$$\sum_{i,j=1}^{5}\left(S_{ij}-\frac{v_i}{v_j}\right)^2 \to \min$$

- (odchylky jsme umocnili na druhou, aby se vzájemně nevyrušily)
- Za podmínek: $v_1+v_2+v_3+v_4+v_5=1 \quad v_i \geq 0, i=1,\ldots,5$
- Pomocí kvadratického programování lze ukázat, že tato funkce nabývá svého minima právě pro geometrický průměr.

Saatyho metoda

Výsledek:

Kritérium	geom. průměr	váha
K1	$\sqrt[5]{1\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\times 6\times 8}=1{,}26$	$1{,}26/5{,}99 = 0{,}211$
K2	$\sqrt[5]{5\times 1\times 2\times 2\times 5}=2{,}51$	$2{,}51/5{,}99 = 0{,}419$
K3	$\sqrt[5]{1\times\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}=0{,}70$	$0{,}70/5{,}99 = 0{,}117$
K4	$\sqrt[5]{\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times 3\times 1\times 7}=1{,}12$	$1{,}12/5{,}99 = 0{,}186$
K5	$\sqrt[5]{\frac{1}{8}\times\frac{1}{5}\times 3\times\frac{1}{7}\times 1}=0{,}40$	$0{,}40/5{,}99 = 0{,}067$
celkem	**5,99**	**1,000**

Nejdůležitejší K2, nejméně důležité K5

Saatyho metoda

Problém s nekonzistencí:

	K1	K2	K3
K1	1	2	5
K2	1/2	1	3
K3	1/5	1/3	1

$$S_{13} = 5 = \frac{v_1}{v_3} \neq \frac{v_1}{v_2} \times \frac{v_2}{v_3} = 2 \times 3 = 6$$

Tento problém se nazývá „nekonzistence matice S“ a SW pro vícekriteriální rozhodování vrací např. index nekonzistence (čím je větší, tím je matice více nekonzistentní).

Příklad k procvičení

Výběr firmy na realizaci www portálu

Bylo vypsáno výběrové řízení na realizaci www portálu. Nabídky jednotlivých firem jsou hodnoceny pomocí čtyř kritérií takto:

	Cena (Kč)	Doba realizace (měs.)	Reference	Věcné řešení (body)
Firma 1	80000	12	bez zkušeností	70
Firma 2	160000	12	výborné	80
Firma 3	180000	15	dobré	65
Firma 4	240000	7	vynikající	95

1) Určete ideální a bazální variantu

2) Prověřte, zda v souboru neexistuje dominovaná varianta

3) Podle vlastního uvážení stanovte pomocí různých metod váhy kritérií

Metody řešení

- Bodovací metoda nebo metoda pořadí
- Metoda aspiračních úrovní
- Metoda váženého součtu
- Metoda TOPSIS

Bodovací metoda nebo metoda pořadí

- Jednotlivé varianty budou ohodnoceny pořadovými čísly mezi 1 a počtem variant
- Jednotlivé varianty budou ohodnoceny podle jednotlivých kritérií vždy ve stejné bodové stupnici, např. 1 až 10
- Pořadí nebo body se sečtou
- Oba postupy mohou být rozšířeny o váhy kritérií

Koupě motorové kosy

	Cena	Výkon	Hmotnost	Názor	
722 S	9600,-	0,7 kW/min	5,8	ne	
726 D	10900,-	0,8 kW/min	6,2	nevím	
735 S	12950,-	1,1 kW/min	6,2	ano	
	min	max	min		

Metoda aspiračních úrovní

- Konjunktivní metoda
  - připustíme pouze varianty, které splňují všechny aspirační úrovně
- Disjunktivní metoda
  - připustíme všechny varianty, které splňují alespoň jeden požadavek
- Iterační postup
  - zpřísňování nebo uvolňování aspiračních úrovní

Koupě motorové kosy

	Cena	Výkon	Hmotnost	Názor
722 S	9600,-	0,7 kW/min	5,8	ne
726 D	10900,-	0,8 kW/min	6,2	nevím
735 S	12950,-	1,1 kW/min	6,2	ano
	min	max	min	

Metoda váženého součtu

- Převedeme minimalizační kritéria na maximalizační podle vztahu

$$y_{ij} = \max_{i=1,\dots,s}(y_{ij}) - y_{ij}$$

- Určíme ideální variantu H s ohodnocením (h_1, ..., h_k) a bazální variantu D s ohodnocením (d_1, ..., d_k).
- Vytvoříme standardizovanou kriteriální matici **R**, jejíž prvky získáme pomocí vzorce

$$r_{ij} = \frac{y_{ij} - d_j}{h_j - d_j}$$

- Pro jednotlivé varianty vypočteme užitek

$$u(a_i) = \sum_{j=1}^{k} v_j r_{ij}$$

- Varianty seřadíme sestupně podle hodnot $u(a_i)$.

Koupě motorové kosy

	Cena	Výkon	Hmotnost	Názor	
722 S	9600	0,7	5,8	1	
726 D	10900	0,8	6,2	2	
735 S	12950	1,1	6,2	3	
	min	max	min	max	
	3350	0,7	0,4	1	
	2050	0,8	0	2	
	0	1,1	0	3	
D	0	0,7	0	1	
H	3350	1,1	0,4	3	Součet
722 S	1	0	1	0	0,5
726 D	0,61194	0,25	0	0,5	0,358582
735 S	0	1	0	1	0,5
	0,3	0,3	0,2	0,2	

Metoda TOPSIS

1. Převedeme minimalizační kritéria na maximalizační podle vztahu

$$y_{ij}' = -y_{ij}\,.$$

2. Zkonstruujeme normalizovanou kriteriální matici ***R* = (*r*$_{ij}$)** podle vzorce

$$r_{ij} = \frac{y_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{p} y_{ij}^{\,2}}}\,.$$

Sloupce matice ***R*** jsou vektory jednotkové délky.

3. Vypočteme normalizovanou váženou kriteriální matici ***W* = (*w*$_{ij}$)** dle vztahu

$$w_{ij} = v_j\, r_{ij}.$$

4. Určíme ideální variantu h s ohodnocením (h_1, ..., h_m) a bazální variantu d s ohodnocením (d_1, ..., d_m) vzhledem k hodnotám matice **W**.
5. Vypočteme vzdálenosti jednotlivých variant od ideální varianty

$$d_i^{+} = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (w_{ij} - h_j)^2}$$

a od bazální varianty

$$d_i^{-} = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (w_{ij} - d_j)^2}\,.$$

Metoda TOPSIS

6. Spočteme relativní ukazatele vzdáleností jednotlivých variant od bazální varianty podle vzorce

$$c_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-}.$$

Hodnoty těchto ukazatelů se pohybují mezi 0 a 1, přičemž hodnotu 0 nabývá bazální a hodnotu 1 ideální varianta.

7. Varianty seřadíme sestupně podle hodnot c_i a potřebný počet variant s nejvyššími hodnotami tohoto ukazatele považujeme za řešení problému.

Koupě motorové kosy

	Cena	Výkon	Hmotnost	Názor	
722 S	9600	0.7	5.8	1	
726 D	10900	0.8	6.2	2	
735 S	12950	1.1	6.2	3	
	min	max	min	max	
	-9600	0.7	-5.8	1	
	-10900	0.8	-6.2	2	
	-12950	1.1	-6.2	3	
	92160000	0.49	33.64	1	
	118810000	0.64	38.44	4	
	167702500	1.21	38.44	9	