Optimalizace (4)
(s aplikací ve financích)

Plán: $clp(A_0, b_0, c_0; A_1, b_1, c_1) = \min_{x \in M^*} \max_{y \in N^*} c_1^T x + b_1^T y - y^T A_1 x$

$NLP(y)$: $\min f(x,y)$; y = parametr

s.t. $g_i(x,y) \leq 0$; $1 \leq i \leq m$

$h_r(x,y) = 0$; $1 \leq r \leq p$

$L(x,u,v,y) = f(x,y) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x,y) + \sum_{r=1}^{p} v_r h_r(x,y)$ Kuhn-Tucker vektor = $u(y), v(y) \geq 0$

$[x(y), u(y), v(y)] =: w(y)$ KUHN-TUCKER BOD (splňuje ~~LPO, řešení~~ ?)

= základní věta o lokálních podmínkách optimality = množina směrů

Základní věta NLP: x^* je optimální řešení, $\exists u^*, \exists v^*$ splňující LPO $\Leftrightarrow Z(x^*) = \emptyset$, kde

$Z(x^*) = \{ z \in \mathbb{R}^n;\ z^T \nabla_x g_i(x^*) \leq 0,\ i \in B(x^*)$; $B(x^*) = \{ i \in \{1, \dots, m\} : g_i(x^*) = 0 \}$

$z^T \nabla_x h_r(x^*) = 0,\ r = 1, \dots, p$

$z^T \nabla_x f(x^*) < 0 \}$

! LPO(y) (i) přípustnost: $g_i(x,y) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$

$h_r(x,y) = 0$; $r = 1, \dots, p$

(ii) komplementarita: $u(y) \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x,y) = 0$

(iii) optimalita: $\nabla_x L(x,u,v,y) = 0$

Postačující podmínky pro $Z(x^*, y) = \emptyset$ = Podmínka REGULARITY 1. ŘÁDU, KUHN-TUCKEROVA podmínka, podmínka LINEÁRNÍ NEZÁVISLOSTI (LI).

! (LI): $\nabla_x h_r(x,y)$, $\nabla_x g_i(x,y)$, $i \in B(x,y)$ jsou lineárně nezávislé pro y

postačující podmínka druhého řádu (second Order Sufficient Condition)

! Podmínka (SOSC): $\forall z \in \mathbb{R}^n, z \neq 0$: $z^T \nabla_x g_i(x,y) = 0$, $i \in B(x,y)$ ($u_i > 0$)

$z^T \nabla_x h_r(x,y) = 0$ $r = 1, \dots, p$

$z^T \nabla_x g_i(x,y) \leq 0$; $i \in B(x,y)$ ($u_i = 0$) $\leq$ = Lachout

pro libovolný směr splňující tyto podmínky, platí

$\Rightarrow z^T \nabla_{xx}^2 L(w(y), y)\, z > 0$

! Silná podmínka (SOSC): stejná, ale musí platit i pro $z^T \nabla_x g_i(x,y) \leq 0$ ($<$?) ; $i \in B(x,y)$

Věta: bod $(w(y), y)$ splňuje LPO a SOSC, pak x^* je lokální minimum úlohy (ostré) $NLP(y)$.

!

Podmínka SILNÉ KOMPLEMENTARITY (SC): pro $\forall i \in B(x,y)$:

$u_i(y) > 0$; $\sum_{i=1}^{m} u_i(y)\, g_i(x,y) = 0$.

Věta $SC \Rightarrow (SOSC \Leftrightarrow \text{silná } SOSC)$

[illegible] KPM

Věta (ZÁKLADNÍ VĚTA NLP(y)) (Fiacco 1976, Robinson 1974,

~~Nechť K-T bod splňuje LPO.~~ Předpokládejme, že existují všechny potřebné derivace a jsou spojité. Předpokládejme, že pro $y = y_0$ $w(y_0)$ splňuje LI, SC, SOSC, LPO, pak:

i, $x(y_0)$ je izolovaný bod lokálního minima a $u(y_0)$, $v(y_0)$ jsou dány jednoznačně.

ii, $x(y_0)$, pro $y \in O_\varepsilon(y_0)$ existuje spojité a diferencovatelné $w(y)$ a platí LI, SC, SOSC, LPO ($w(y)$ je K-T bod).

iii, $\varphi(y)$ je diferencovatelná v $y = y_0$.

iv, $\exists$ vzorec pro $\frac{\partial w}{\partial y}$ z věty o implicitní funkci:

$$\frac{\partial w}{\partial y}(y) = -\underbrace{\left(\nabla^2_{ww} L_0(w(y),y)\right)^{-1}}_{LI,\ SOSC,\ SC} \nabla^2_{wy} L_0(w(y),y)$$

$$\cancel{\varphi(y) = f(x^*(y),y) = L(w(y),y) = L_0(w_0^*(y),y)}$$

$$\cancel{\nabla_y \varphi(y) = \nabla_y L_0(w_0(y),y) + \nabla_w L_0(w_0(y),y)\frac{\partial w(y)}{\partial y} = 0}$$

$$\cancel{\nabla^2_{yy} \varphi(y) = \nabla_y\left(\nabla_y L_0(w_0(y),y) + \nabla_w L_0(w_0(y),y)\frac{\partial w(y)}{\partial y}\right) = 0}$$

pozn: ~~[illegible]~~ za předpokladu, že pro y_0 platí LI, SC, SOSC pro K-T bod splňující LPO $[x(y_0), u, v]$, pak to platí i na nějakém okolí y_0, a $x^*(y)$ je diferencovatelné. $\varphi(y)$ je o stupeň hladší než $x^*(y)$ tj $\exists\, \nabla^2_{yy}\varphi(y)$.

Aplikace na úlohu lineárního programování LP(y): $\min c^T x$

s.t. $Ax = y$ (parametr), $x \geq 0$

$L(x,u,v) = c^T x - u^T x + v^T(y - Ax)$

LPO: $u \geq 0$ $(v \in \mathbb{R})$, $u^T x = 0$, $v^T(y - Ax) = 0$

podm. přípustnosti $Ax = y$, $x \geq 0$

podm. optimality $\nabla_x L(x,u,v) = c^T - u^T - A^T v = 0$

} K-T bod

$\nabla_u L(x,u,v) = -x$

$\nabla_v L(x,u,v) = y - Ax$

$B = \{k : x_k = 0\} = B(y)$

SC: $k \in B \Rightarrow u_k > 0$ – jednoznačnost

LI: $\nabla_x(y - Ax) = -A$, $\nabla_x(-x) = -e^k$ pro $k \in B$ $\Rightarrow$ řádky matice A a vektory e^k, $k \in B$ jsou lineárně nezávislé

A_0 = matice vybraná z A (vybírám sloupce) a to tak, že má jenom sloupce k: $x_k(y) > 0$ (tj. vybírám pouze bazické sloupce) $\Rightarrow$ je ekvivalentní požadavku, aby A_0 měla plnou hodnost $h(A) = m$.

SOSC: $z^T \nabla_{xx} L(x,u,v) z > 0$, pro nějaké $z \neq 0$

! z podmínky optimality a SOSC $\Rightarrow$ nesmí existovat žádné $z \neq 0$ takové, že

$z^T \nabla_x (Ax - y) = 0 \iff z^T A = 0 \iff A_0^T z = 0$

$z^T \nabla_x (-x_k) = 0$ pro $k \in B$, $u_k > 0 \iff z_k = 0$ pro $k \in B$

$z^T \nabla_x (-x_k) \le 0$ pro $k \notin B$, $u_k = 0$

$\Rightarrow$ A_0 regulární matice (není degenerace)

Závěr: nechť $x(y_0)$ je optimální řešení úlohy $LP(y_0)$: min $c^T x$ za podm. $Ax = y$, $x \ge 0$. Nechť $x(y_0)$ je nedegenerované základní řešení a také je jediné optimální řešení $\Rightarrow$ splňuje LI, SOSC, SC (jednoznačnost zaručuje splnění SC, LI a SOSC, i pro z nedeg.) Pak na okolí $\mathcal{O}_\varepsilon(y_0)$ má úloha jediné nedegenerované optimální řešení $x(y)$, které je navíc diferencovatelné v y. Navíc optimální hodnota $\varphi(y)$ je dvakrát diferencovatelná.

pozn.: "když uvolním jednoznačnost (SC nemusí platit), ale ponechám-li na $\mathcal{O}_\varepsilon(y_0)$ stejnou bázi, tak výsledky platí"

Příklad: max $x_1 + x_2$

s.t. $2x_1 + x_2 \le 30$

$-x_1 + 2x_2 \le 10$

$x_1 + x_2 = 24 - 2\lambda$

$x_{1,2,3} \ge 0$.

- $\lambda = 2$: $y_0 = 20 \iff$
  $2x_1 + x_2 + x_3 = 30$
  $-x_1 + 2x_2 + x_4 = 10$
  $x_1 + x_2 + x_5 = 20$
  $x_i \ge 0$

$\Rightarrow$ optimální řešení pro $\lambda = 2$: $(10, 10, 0, 0, 0)$ $\Rightarrow$ DEGENERACE

- malá změna 2 $(=\lambda)$ může změnit bázi $\Rightarrow$ problém s diferencovatelností

Aplikace na úlohu kvadratického programování $QP(p)$: $\min \frac{1}{2} x^T C x + p^T x$

$x \in M = \{x : Ax \leq b, \ x \geq 0\}$.

Předpokládáme: 1, C je pozitivně definitní! (pokud ne, není úloha QP)

2, množina $M \neq \emptyset$

$L(x,y) = p^T x + \frac{1}{2} x^T C x + y(Ax - b)$, $x \geq 0$! nezohledňuji člen $-u_2^T x$!

LI: $h(A) = m$

SC: $I_0 = \{i : \sum_j a_{ij} x_j = b_i\}$, $J_0 = \{j : x_j = 0\}$

- $i \in I_0 \Rightarrow y_i \geq 0$
- $j \in J_0 \Rightarrow \nabla_x L(x,y) = (p + Cx + A^T y) \geq 0 \iff u_2$

SOSC: $z^T \nabla_{xx} L(x,y) z = z^T C z > 0$ pro nějaké $z \neq 0$

! C je pozitivně definitní $\Rightarrow z^T C z > 0 \ \forall z \Rightarrow$ SOSC platí vždy

Bod, který splňuje LPO (K-T bod) je také optimálním řešením $\Rightarrow$ LPO nutné a postačující podmínky:

(i) podmínka přípustnosti $Ax \leq b$, $x \geq 0$

(ii) podmínka komplementarity $y^T(Ax - b) = 0$, $x^T(p + Cx + A^T y) = 0$

(iii) $p + Cx + A^T y \geq 0$, $y \geq 0$.

Závěr: optimální řešení pro $p = p_0$: $x(p_0) = \operatorname{argmax}_{x \in M} \{p_0^T x + \frac{1}{2} x^T C x\}$

- je jednoznačné (tj. funkce je ryze konvexní)
- může ležet ve vrcholu nebo na stěně nebo na hraně množiny M nebo uvnitř množiny M.

M se rozdělí: $I(\Sigma) = \{i : \sum_j a_{ij} x_j = b_i\}$

$J(\Sigma) = \{j : x_j = 0\}$

$\Sigma = \{x : \sum_j a_{ij} x_j = b_i, \ i \in I(\Sigma); \ \sum_j a_{ij} x_j < b_i, \ i \notin I(\Sigma);$

$x_j = 0, \ j \in J(\Sigma); \ x_j > 0, \ j \notin J(\Sigma)\}$

$\Upsilon(\Sigma(p_0)) = \{p : x^*(p) \in \Sigma(p_0)\}$

Definice: množina lokální stability pro p_0: $\sigma(p_0) = \sigma(\Sigma(p_0)) = \{p : x^*(p_0) \in \Sigma(p_0)\}$

Věta: vlastnosti optimálních řešení x^*:

1, x^* je lineární v p na uzávěru $cl\,\sigma(\Sigma_I)$.

2, x^* je konstantní na $\sigma(\Sigma_I)$ pokud Σ_I je vrchol množiny M $\Rightarrow$ x^* je po částech lineární

3, optimální hodnota $\varphi(p)$ je konkávní v p na $\mathbb{R}^n$ ($\Rightarrow$ spojitá)

4, $\varphi(p)$ je diferencovatelná na množině int $\nabla(\Sigma_I)$.

5, když Σ_I je vrchol $\Rightarrow$ φ je lineární na $\nabla(\Sigma_I)$

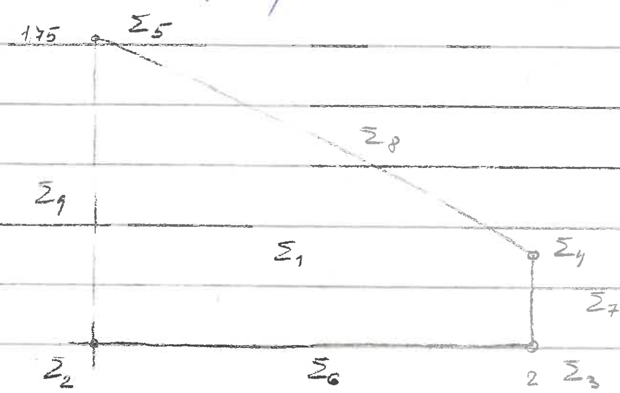
pozn: množiny lokální stability nemusejí být uzavřené ani otevřené

příklad: min $\frac{1}{2}x^TCx + px$

s.t. $Ax \leq b$, $x \geq 0$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

množina přípustných řešení:



$= \Sigma_i$ ~~množiny lokální stability~~

optimální řešení splňuje LPO.

- Σ_1: $+p + Cx + A^Ty^{=0} = 0$

  $x = -C^{-1}p$

  $-AC^{-1}p < b$, $-C^{-1}p > 0$

  $\Big\}$ $\nabla(\Sigma_1) = \{p : -AC^{-1}p < b, -C^{-1}p > 0\}$

- Σ_2: $y = 0$, $-p \geq 0$ $\Rightarrow$ $\nabla(\Sigma_2) = \{p : -p \geq 0\}$

příklad: min $(x-\varepsilon)^T(x-\varepsilon)$ $-\varepsilon^T\varepsilon$

s.t. $\mathbb{1}^Tx \leq 1$, $x \geq 0$ $\Rightarrow$ hledáme vzdálenost parametru od množiny, ta se mění parametrem

$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ parametr

- LI, SC, SOSC jsou splněné
- Lagrangeova funkce $L(x,\lambda,\varepsilon) = (x-\varepsilon)^T(x-\varepsilon) + \lambda(\mathbb{1}^Tx - 1)$, $x \geq 0$ pro symetrické úlohy
- LPO:

$\nabla_x L(x,\lambda,\varepsilon) \geq 0$ $\qquad$ $2(x-\varepsilon) + \lambda\mathbb{1} \geq 0$

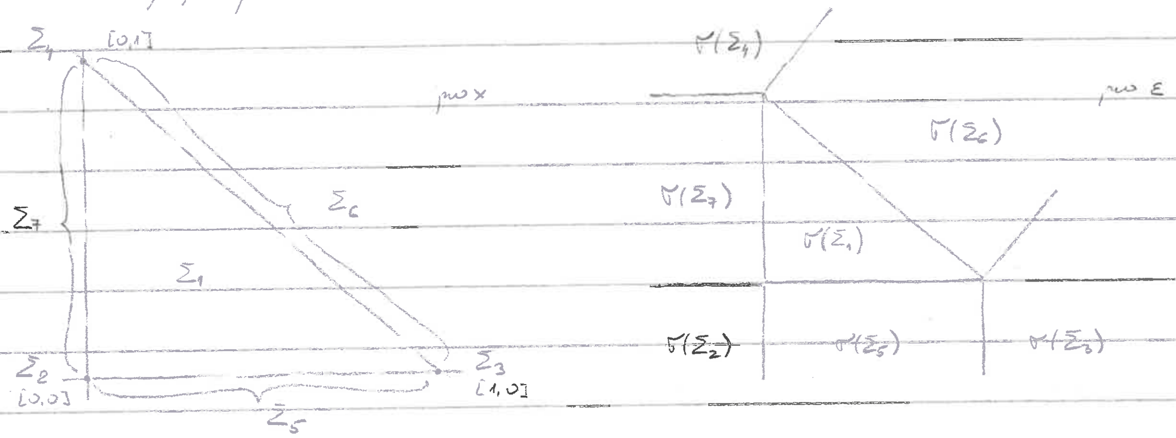
$\nabla_\lambda L(x,\lambda,\varepsilon) \leq 0$ $\qquad$ $\mathbb{1}^Tx - 1 \leq 0$

$x^T\nabla_x L(x,\lambda,\varepsilon) = 0$ $\qquad$ $x^T[2(x-\varepsilon) + \lambda\mathbb{1}] = 0$

$\lambda \frac{\partial L}{\partial\lambda} L(x,\lambda,\varepsilon) = 0$ $\qquad$ $\lambda(\mathbb{1}^Tx - 1) = 0$

$x \geq 0, \quad \lambda \geq 0$

- množina přípustných řešení



$$\sigma(\Sigma_1) = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 1, \ \varepsilon_1 > 0, \ \varepsilon_2 > 0 \right\} \Rightarrow x^*(\Sigma_1) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\Sigma_1) = 0 \quad - \varepsilon^T \varepsilon$$

$$\sigma(\Sigma_2) = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \ \varepsilon_1 \leq 0, \ \varepsilon_2 \leq 0 \right\} \Rightarrow x^*(\Sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\Sigma_2) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \cdot \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \quad \varepsilon^T \varepsilon$$

$$\sigma(\Sigma_7) = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \ \varepsilon_1 \leq 0, \ \varepsilon_2 \in [0,1] \right\} \Rightarrow x^*(\Sigma_7) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\Sigma_7) = \varepsilon_1^2 - \varepsilon^T \varepsilon$$

Aplikace QT(p)
1, věta o projekci
2, metoda nejmenších čtverců (např. modely GARCH, ARCH)
3, Markowitzův model

VÍCEKRITERIÁLNÍ ROZHODOVÁNÍ

= více kriteriální optimalizace

- typy modelů:
  - vícekriteriální optimalizační model (množina přípustných řešení je nekonečná)
  - model vícekriteriální analýzy variant (množina přípustných řešení je konečná)

MODEL VÍCEKRITERIÁLNÍ ANALÝZY VARIANT

- množina přípustných řešení je konečná
- každá varianta je hodnocena podle několika kritérií

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & \dots & f_k \end{array} = \text{kritéria} \\ \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1k} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{p1} & y_{p2} & & y_{pk} \end{pmatrix} \end{array}$$

= varianty

příklad: koupě motorové kosy: vybere nejvhodnější motorovou kosu ze tří možností podle ceny, výkonu a hmotnosti