KOHERENCE VaR a CVaR

UKÁŽEME, ŽE $CVaR_\alpha(X)$ JE KOHERENTNÍ MÍRA RIZIKA. PRO JEDNODUCHOST ABSTRAHUJEME OD PATOLOGICKÝCH PŘÍPADŮ KDY "min" NEEXISTUJE A $a^* = -\infty$. T.J.

$$CVaR_\alpha(X) = \min_{a \in R} \left\{ a + \frac{1}{1-\alpha} E\left(\max(0, X-a)\right) \right\}$$

$\max(0, X-a) := [X-a]^+$ .... značení

1) TRANSLAČNÍ EKVIVARIANCE

$$CVaR_\alpha(X+c) = \min_{a \in R} \left\{ a + \frac{1}{1-\alpha} E[X+c-a]^+ \right\}$$

$b := a - c$

$$= \min_b \left\{ b + c + \frac{1}{1-\alpha} E[X-b]^+ \right\}$$

$$= c + \min_b \left\{ b + \frac{1}{1-\alpha} E[X-b]^+ \right\}$$

$$= c + CVaR_\alpha(X) \checkmark$$

2) POZITIVNÍ HOMOGENITA

$$CVaR_\alpha(0) = 0 \checkmark$$

$\lambda > 0$

$$CVaR_\alpha(\lambda X) = \min_{a \in R} \left\{ a + \frac{1}{1-\alpha} E[\lambda X - a]^+ \right\}$$

$b := \frac{a}{\lambda}$

$$= \min_{b \in R} \left\{ b\lambda + \frac{1}{1-\alpha} E \lambda \cdot [X-b]^+ \right\}$$

$$= \lambda \min_{b \in R} \left\{ \lambda + \frac{1}{1-\alpha} E[X-b]^+ \right\}$$

$$= \lambda \cdot CVaR_\alpha(X) \checkmark$$