1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.

1. KNÍŽKY

2009

2. SKRIPTA

(1) PARAMETRICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

Úloha lineárního programování

$\max c^T x$

$Ax = b, \; x \geq 0$

Úloha parametrického lineárního programování

$\max c(\lambda)^T x$

$A(\lambda) x = b(\lambda) \quad x \geq 0$

kde $\lambda \in \Lambda \subset R^k$

1. parametr na pravé straně (lin. závislost)

$\max c^T x$

(3)

s.t. $Ax = b_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r b_r \qquad x \geq 0$ (4)

Věta 1 Množina $\Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda$ pro které existuje optimální řešení úlohy (3), (4)$\}$ je konvexní

• Důkaz: pokud $\Lambda_0 = \emptyset$ pak Λ_0 je konvexní (stejně tak $\Lambda_0 = \{\lambda_0\}$)

Předpokládejme, že $\Lambda_0 \neq \emptyset$: $\exists \lambda, \varphi \in \Lambda_0$

1) pro λ, φ (3)+(4) má přípustné řešení a i duální úloha má přípustné řešení.

duální úloha $\quad \min \left(b_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r b_r\right)^T y$

$\quad$ s.t. $A^T y \geq c, \quad y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ existuje přípustné řešení duální úlohy i pro parametr $\alpha\lambda + (1-\alpha)\varphi \quad \forall \alpha \in [0,1]$
(parametr se v omezení duální úlohy nevyskytuje) $\Rightarrow \exists$ příp. řešení duální úlohy

2) $\lambda, \varphi \in \Lambda_0$ a $x(\lambda), x(\varphi)$ optimální řešení úlohy (3)+(4) pro parametry λ, φ

$A(x(\lambda)) = b_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r b_r \quad / \cdot \alpha$

$A(x(\varphi)) = b_0 + \sum_{r=1}^{k} \varphi_r b_r \quad / \cdot (1-\alpha)$

$\exists$ příp. řešení primární úlohy

$\Rightarrow \alpha x(\lambda) + (1-\alpha) x(\varphi)$ je přípustným řešením pro parametr $\alpha\lambda + (1-\alpha)\varphi \quad \forall \alpha \in [0,1]$

3) primární úloha má přípustné řešení i duální úloha má přípustné řešení pro parametr $\alpha\lambda + (1-\alpha)\varphi \Rightarrow$ (3)+(4) má i optimální řešení pro parametr $\alpha\lambda + (1-\alpha)\varphi$. □

Definice 1: Funkce $F: \Lambda_0 \to \mathbb{R}$: $F(\lambda) = \max\{c^T x : Ax = b_0 + \sum_{r=1}^{k} b_r \lambda_r,\ x \geq 0\}$

Věta 2: F je konkávní na množině Λ_0.

• Důkaz: $\lambda, \varphi \in \Lambda_0$, $x(\lambda), x(\varphi)$ optimální řešení problému (3)+(4)

(opomíjíme triviální případy, kdy $\Lambda_0 = \emptyset$ a $\Lambda_0 = \{\lambda_0\}$)

$F(\lambda) = c^T x(\lambda)$ a $Ax(\lambda) = b_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r b_r, \quad x(\lambda) \geq 0$

$F(\varphi) = c^T x(\varphi)$ a $Ax(\varphi) = b_0 + \sum_{r=1}^{k} \varphi_r b_r, \quad x(\varphi) \geq 0$

			c^T
			x
c_L	L	$A_L^{-1} b_0$	$(A_L)^{-1} A$
		$c_L^T A^{-1} b_0$	$c^T A^{-1} A - c^T$

? $\alpha \in (0,1) \quad F(\alpha\lambda + (1-\alpha)\varphi) \overset{?}{\geq} \alpha F(\lambda) + (1-\alpha) F(\varphi)$?

$A(\alpha x(\lambda) + (1-\alpha) x(\varphi)) = b_0 + \sum_{r=1}^{k} (\alpha\lambda_r + (1-\alpha)\varphi_r) b_r \quad \& \quad \alpha x(\lambda) + (1-\alpha) x(\varphi) \geq 0$

$\Rightarrow \alpha x(\lambda) + (1-\alpha) x(\varphi)$ je přípustné řešení úlohy

optimální řešení úlohy: $F(\alpha\lambda + (1-\alpha)\varphi) \geq c^T(\alpha x(\lambda) + (1-\alpha) x(\varphi)) = \alpha F(\lambda) + (1-\alpha) F(\varphi)$ □

F = max úloha $\Rightarrow$ duální úloha = min

Věta 3 F je po částech lineární konkávní funkce na Λ_0. Podrobněji: pro každou duálně přípustnou bázi B tj. $c_B^T A_B^{-1} A - c \geq 0$, je $F(\lambda)$ lineární na množině
$\Lambda_{(B)} = \{\lambda \in \Lambda_0 \ A_B^{-1}(b_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r b_r) \geq 0\}$ a $\Lambda_0 = \bigcup_B \Lambda_{(B)}$;
$F(\lambda) = c_B^T A_B^{-1}(b_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r b_r)$ a optimální řešení $x_B(\lambda) = A_B^{-1}(b_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r b_r)$, $x_{\{1,2,\dots,n\} \setminus B}(\lambda) = 0$.

2, parametr pouze v účelové funkci (lineární)

$$\max \ (c_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r c_r)^T x \qquad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad Ax = b, \ x \geq 0 \qquad (2)$$

Věta 4: Množina $\Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda$ pro které ex. optimální řešení úlohy $(1)+(2)\}$ je konvexní

- Důkaz: Uvažujme duální úlohu k $(1)+(2)$

$$\min \ b^T y$$

$$\text{s.t.} \quad A^T y \geq c_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r c_r \qquad y \in R$$

Věta 1 předpokládá "max; $y \geq 0$" $\Rightarrow$ převod úlohy na úlohu ekvivalentní $y = u - v$

$$\max \ b^T v - b^T u$$

$$\text{s.t.} \quad A^T u - A^T v - w = c_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r c_r, \quad u, v, w \geq 0$$

$\Rightarrow$ aplikace Věty 1

Definice 2: $G: \Lambda_0 \to R$, $G(\lambda) = \max\{(c_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r c_r)^T x, \ Ax = b, \ x \geq 0\}$

Věta 5: Funkce G je na Λ_0 po částech lineární konvexní. Podrobněji: pro každou primárně přípustnou bázi $B \subset \{1, \dots, n\}$, tj. $A_B^{-1} b \geq 0$, je $G(\lambda)$ lineární na množině $\Lambda_B = \{\lambda \in \Lambda_0 : (c_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r c_r)_B^T A_B^{-1} A - (c_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r c_r) \geq 0$ a $\Lambda_0 = \bigcup_B \Lambda_B$.

$G(\lambda) = (c_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r c_r)^T A_B^{-1} b$ a optimální řešení $x_B(\lambda) = A_B^{-1} b$, $x_{\{1,\dots,n\}-B}(\lambda) = 0$.

3, parametr v účelové funkci, v pravých stranách (lineární)

$$\max \ (c_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r c_r)^T x \qquad (3)$$

$$\text{s.t.} \quad Ax = b_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r b_r, \quad x \geq 0 \qquad (4)$$

Věta 6 Množina $\Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda$ pro které existuje optimální řešení úlohy $(3)+(4)\}$ je konvexní

- Důkaz: vezmeme $\lambda, \varphi \in \Lambda_0$, pak pro $\forall \alpha$ $\alpha\lambda + (1-\alpha)\varphi$; pro $\alpha\lambda + (1-\alpha)\varphi$ ukážeme, že existuje příp. řešení úlohy $(3)+(4)$ a také její duální úlohy

$\rightarrow$ Kombinace důkazů věty 1 a věty 4 (dodělat, bude na zkoušce)

Definice 3: $H: \Lambda_0 \to R$: $H(\lambda) = \max\{(c_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r c_r)^T x, \ Ax = b_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r b_r, \ x \geq 0\}$

Věta 7 Funkce H je po částech kvadratická spojitá. Podrobněji: pro každou primárně i duálně přípustné báze B je $H(\lambda)$ kvadratická na množině $\Lambda_B = \{\lambda \in \Lambda :$ podmínka optimality; podmínka přípustnosti:

tj. $\{ (c_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r c_r)_B^T A_B^{-1} A - (c_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r c_r)^T \geq 0 \;\&\; A_B^{-1} (b_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r b_r) \geq 0 \}$

$H(\lambda) = (c_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r c_r)^T A_B^{-1} (b_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r b_r)$ a optimální řešení $x(\lambda)$ splňuje

$x_B(\lambda) = A_B^{-1} (b_0 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r b_r)$, $\quad x_{\{1,2,\dots,n\} \setminus B}(\lambda) = 0$

NELINEÁRNÍ PARAMETRICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

$$\left.\begin{aligned} \min\ & f(x,y) \qquad x \in R^n,\ y \in R^l \\ \text{s.t. } & g_k(x,y) \geq 0 \qquad k = 1,\dots,m \\ & h_j(x,y) = 0 \qquad j = 1,\dots,p \end{aligned}\right\} \quad NLP(y) \qquad y = \text{parametr}$$

$y = y_0 \Rightarrow$ vyřešit $NLP(y_0)$ $\quad \varphi(y_0) = \min_{x \in M(y_0)} f(x, y_0)$

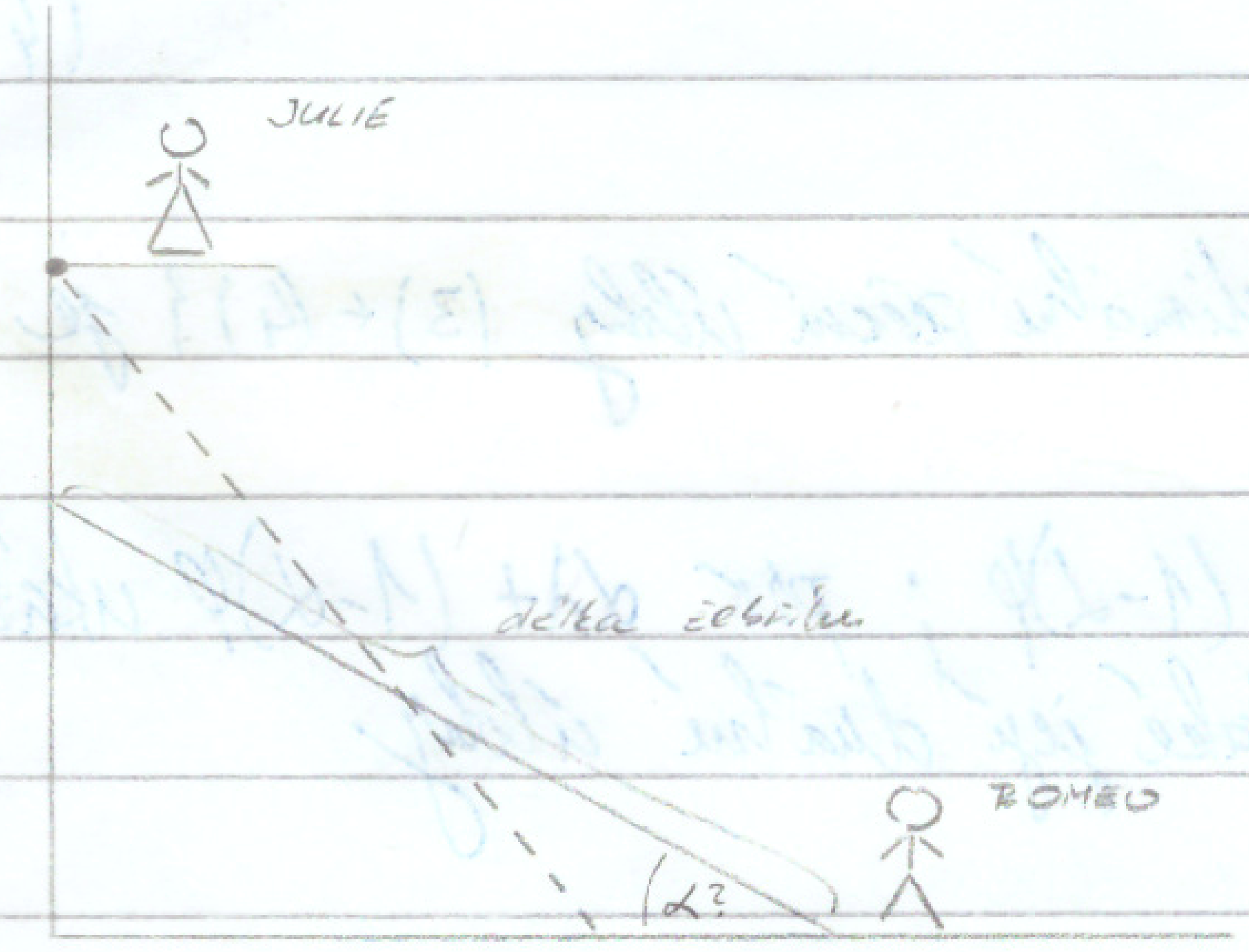
$M(y_0) = \{x : g_k(x, y_0) \geq 0,\ k = 1,\dots,m;\ h_j(x,y_0) = 0,\ j = 1,\dots,p\}$ = množina příp. řešení

optimální řešení: $x^*(y_0) = \arg\min_{x \in M(y_0)} f(x, y_0) = \{x : f(x,y_0) = \varphi(y_0)\}$

OTÁZKA má úloha řešení pro y blízké y_0? Pokud ano, je φ spojitá funkce v y_0?
Pokud ANO $\Rightarrow$ PERSISTENCE (poměrně častý jev)

OTÁZKA $x^*(y) \sim x^*(y_0)$ pro y z okolí y_0? Někdy ano jindy ne....
pomáhá jednoznačnost řešení, linearita, konvexita a jiné vlastnosti.

MOTIVACE příběh Romeo a Julie

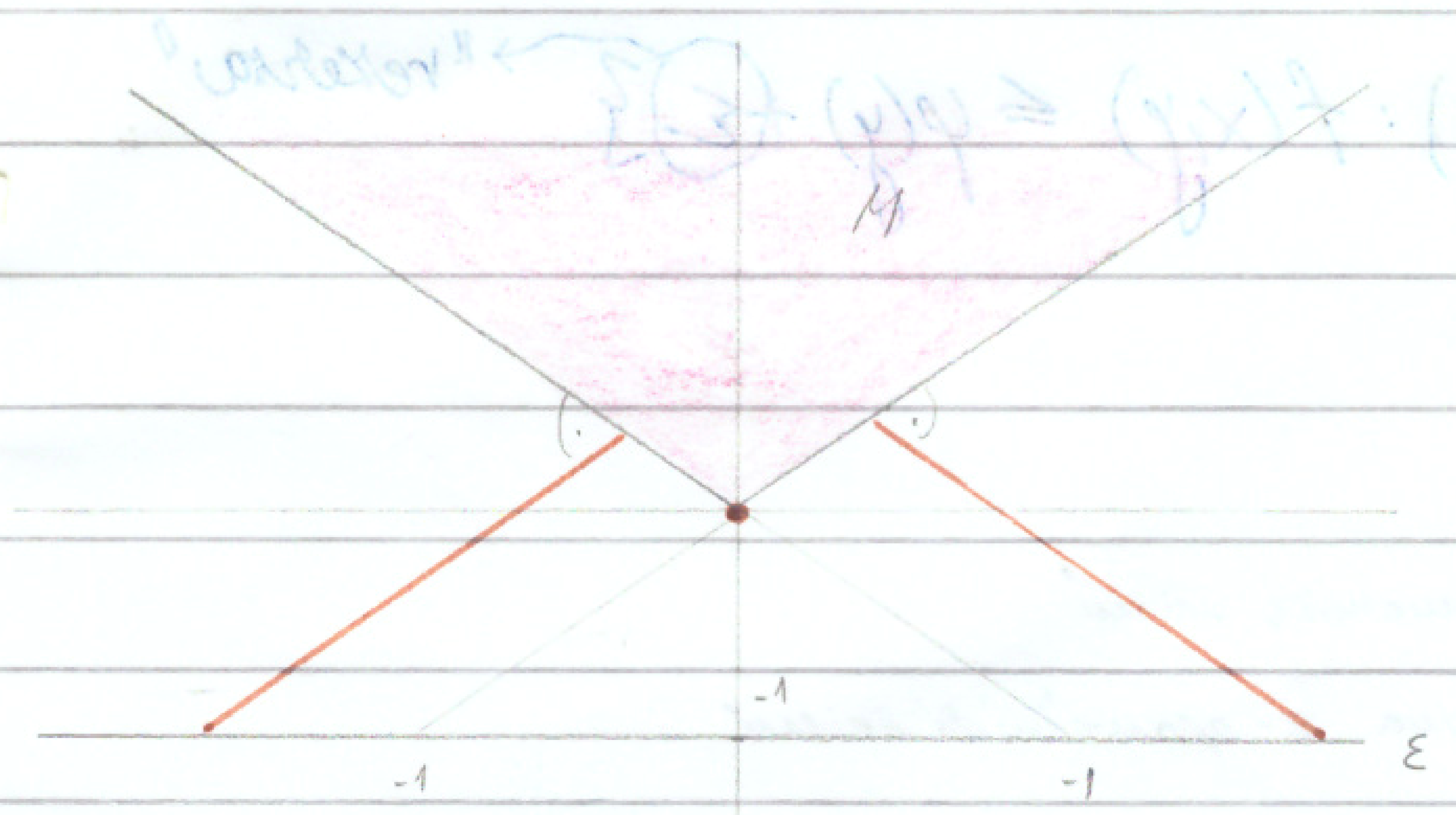


- parametr = délka žebříku

= PERSISTENCE

příklad $\min (x_1 - \varepsilon)^2 + (x_2 + 1)^2$
s.t. $x_2 \geq x_1$
$x_2 \geq -x_1$ $\quad M$

} úloha o projekci bodu $\binom{\varepsilon}{-1}$ do M



řešení $x^*(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{1+\varepsilon}{2} \\ -\frac{1+\varepsilon}{2} \end{pmatrix}$ pro $\varepsilon < -1$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pro $\varepsilon \in \langle -1, 1 \rangle$

$= \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon-1}{2} \\ \frac{\varepsilon-1}{2} \end{pmatrix}$ pro $\varepsilon > 1$

závěry z hlediska persistence

1, jednoznačné optimální řešení $x^*(\varepsilon)$

2, $x^*(\varepsilon)$ je po částech lineární funkce, spojitá a hladká $\left(\exists \frac{\partial x^*(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)$ kromě $\varepsilon = \pm 1$

3, $\varphi(\varepsilon) = 2 \cdot \left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)^2$ pro $\varepsilon < -1$

$= \varepsilon^2 + 1$ pro $-1 \leq \varepsilon \leq 1$

$= 2 \cdot \left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^2$ pro $\varepsilon > 1$

je po částech kvadratická spojitá, diferencovatelná $\left(\exists \frac{\partial \varphi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)$, dvakrát diferencovatelná kromě $\varepsilon = \pm 1$.

příklad $\min \varepsilon x$

s.t. $x \geq -1$

řešení $x^*(\varepsilon) = -1$ pro $\varepsilon > 0$

$= [-1, \infty)$ pro $\varepsilon = 0$

$= \emptyset$ pro $\varepsilon < 0$

závěry

1, $\Lambda_0 = [0, \infty)$

2, $\varphi(\varepsilon)$ je ~~po částech lineární, konečná na intervalu $(-\infty, 0]$~~ $[0,\infty)$

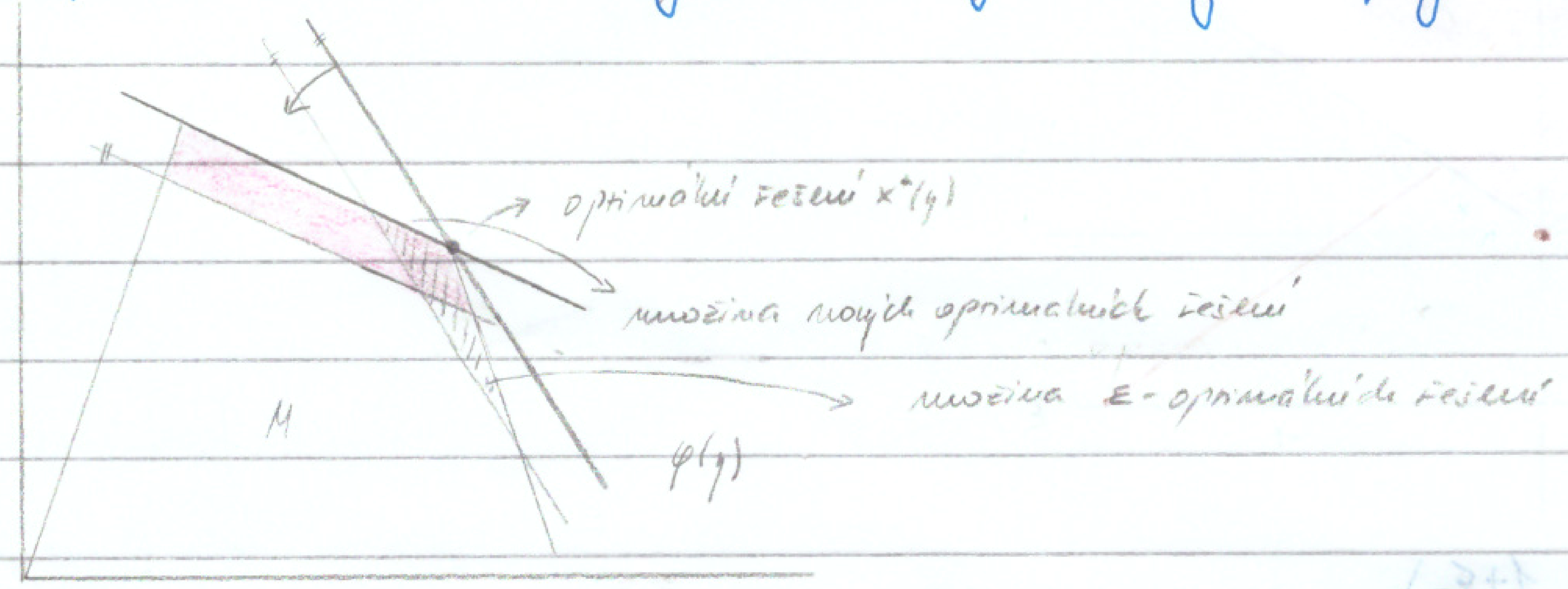
$\varphi(\varepsilon) = -\varepsilon$ na intervalu $(0, \infty)$ a $\varphi(0) = 0$

3, $x^*(\varepsilon)$ nejsou vždy jednobodové

$\Rightarrow$ NESTABILITA OPT. ŘEŠENÍ

RADĚJI

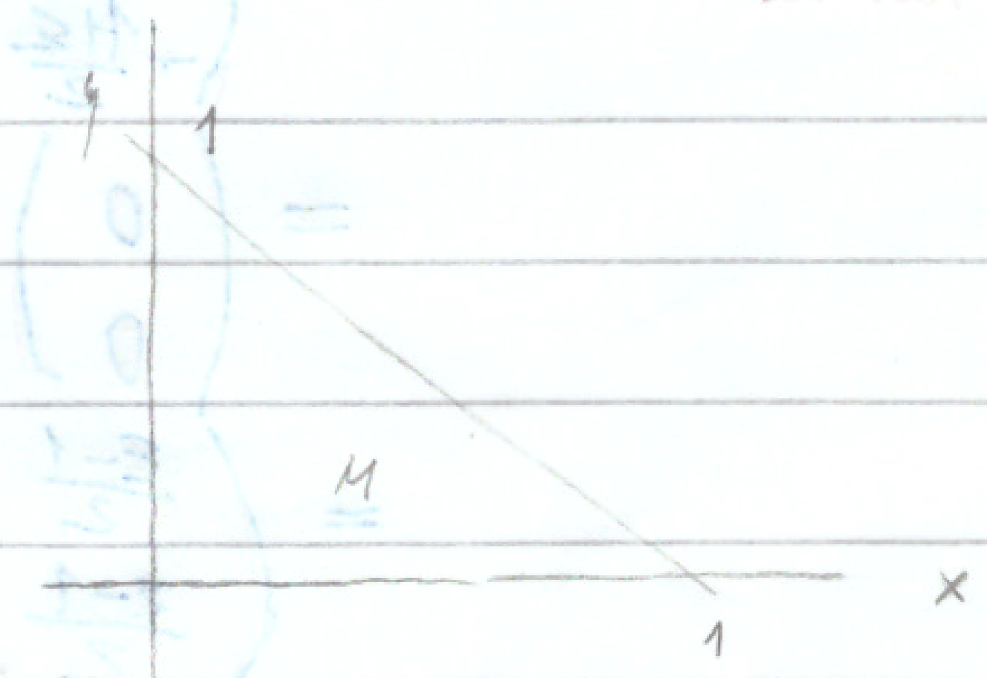
$\Rightarrow$ ε – optimální řešení: $X^*_\varepsilon(y) = \{ x \in M(y) : f(x,y) \le \varphi(y) + \varepsilon \}$ → "rekurze"



příklad: $\max\ \alpha x + \beta y$

s.t. $x + y \le 1$

$x \ge 0,\ y \ge 0$



1, $\alpha = \beta = 1 \Rightarrow (x^*, y^*) \in \{(x,y) ;\ x + y = 1,\ x, y \ge 0\}$

$\varphi(\alpha, \beta) = 1$

2, $\alpha = 0{,}9;\ \beta = 1{,}1 \Rightarrow (x^*, y^*) = (0,1),\ \varphi(\alpha,\beta) = 1{,}1$

3, $\alpha = 1{,}1;\ \beta = 0{,}9 \Rightarrow (x^*, y^*) = (1,0),\ \varphi(\alpha,\beta) = 1{,}1$ □

příklad: $\min\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4$

s.t. $x_1 + \frac{4}{3}x_2 + 2x_3 = \frac{3}{2}$ → $\frac{4}{3} \sim \frac{4}{3} - \varepsilon,\ \varepsilon > 0$

$x_2 + 3x_3 = \frac{3}{2}$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

optimální báze $L = \{2, 3, 4\}$

jednoznačné řešení $x^* = \{0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0\}$, $\varphi = 1$ $\Rightarrow$ degenerované řešení

$\frac{3}{4}$ v prvním omezení nahradíme $\frac{4}{3} - \varepsilon,\ \varepsilon > 0 \Rightarrow x^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0),\ \varphi(\varepsilon) = 2$

Důvod: problém není regulární, tj. je degenerovaný a duální úloha má neomezenou množinu optimálních řešení: $y_1^* = 1 - y_3^*;\ y_2^* = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}y_3^*;\ y_3^* \le 3$ □

Golstein, Yudin cca 1970 — úloha $\min c^T x$, s.t. $Ax = b,\ x \ge 0$

Věta 8: ( ) Nechť množina optimálních řešení primární úlohy M^* i duální úlohy N^* jsou neprázdné a omezené, pro $A = A_0,\ b = b_0,\ c = c_0$, pak pro libovolný směr (A_1, b_1, c_1) dimace $d_p(A_0, b_0, c_0, A_1, b_1, c_1)$ existuje a perturbovaný problém $\min\{(c_0 + \Delta c_1)^T x : (A_0 + \Delta A_1)x = (b_0 + \Delta b_1),\ x \ge 0\}$ má optimální řešení pro všechna Δ z nějakého pravého okolí 0.