

Domácí úkol 3: Entropie

Úloha 1. Máme konstantu $a \in \mathbb{R}$ a diskrétní náhodnou veličinu $X : \Omega \rightarrow A$, kde $A \subset \mathbb{R}$ a $\Pr(X=x) \neq 0$ pro všechna $x \in A$. V následujících případech popište vztah mezi $H(X)$ a $H(X')$ v závislosti na A a popřípadě v závislosti na konstantě a :

(a) $X' = X + a$,

(b) $X' = aX$,

(c) $X' = X^2$.

Úloha 2. Náhodný pokus probíhá tak, že současně hodíme n nerozlišitelnými mincemi. Výsledek pokusu lze tedy zaznamenat jako počet mincí, na kterých padl líc. Jaká je entropie jednoho hodu n nerozlišitelnými mincemi?

Úloha 3. Mějme náhodnou veličinu $X : \Omega \rightarrow A$, kde $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, s pravděpodobnostním rozdělením

x	a	b	c	d	e	f	g
$\Pr(X=x)$	0,06	0,09	0,10	0,14	0,15	0,21	0,25

Spočtete entropii náhodné veličiny X . Sestrojte Huffmanovo kódování pro X a spočtete průměrnou délku kódu.

Úloha 4. Vysvětlete, které z následujících kódů nemohou být Huffmanovy kódy hodnot žádné náhodné veličiny $X : \Omega \rightarrow A$.

- $\{f(x) : x \in A\} = \{0, 10, 111, 101\}$
- $\{f(x) : x \in A\} = \{00, 010, 011, 10, 110\}$
- $\{f(x) : x \in A\} = \{1, 000, 001, 010, 011\}$

Úloha 5. Uvažujme náhodné veličiny $X : \Omega \rightarrow A$ a $Y : \Omega \rightarrow A$, kde $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, s pravděpodobnostním rozdělením:

z	a	b	c	d	e
$\Pr(X=z)$	0,4	0,3	0,2	0,05	0,05
$\Pr(Y=z)$	0,3	0,25	0,2	0,2	0,05

Jedna z těchto dvou náhodných veličin byla vybrána a byl pro ni sestaven Huffmanův kód. Následně byl šestkrát po sobě proveden experiment, jehož pravděpodobnostní rozdělení odpovídá vybrané náhodné veličině. Výsledky experimentů byly zakódovány Huffmanovým kódem jako 10110000101. Která náhodná veličina byla vybrána?

Cvičení 1 (není součástí domácího úkolu). Nechť $X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$, $\Pr(X=0) = 0,1$ a $\Pr(X=1) = 0,9$. Spočtete $H(X)$.