Požadavky ke zkoušce z předmětu Lineární algebra II

Přehled základních typů početních úloh

1. Je dán podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem a vektor, určete ortogonální projekci vektoru na podprostor.
2. Je dána báze prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem, pomocí Gramova-Schmidtova algoritmu ortogonalizujte a normalizujte zadanou bázi.
3. Je dán podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem, najděte [bázi / ortogonální bázi] ortogonálního doplňku zadaného podprostoru.
4. Je dána reálná matice $\boldsymbol{A}$ a vektor $\boldsymbol{b}$, najděte vektor $\boldsymbol{x}$, který minimalizuje $\|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|$, jinými slovy najděte nejlepší aproximaci řešení soustavy $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$.
5. Je dána báze a vektor, najděte souřadnice vektoru vzhledem k zadané bázi.
6. Jsou dány dvě báze a souřadnice vektoru vzhledem k jedné z nich, určete jeho souřadnice vzhledem k druhé bázi.
7. Jsou dány dvě báze, určete matici přechodu od jedné báze k druhé.
8. Je dána matice lineárního zobrazení vzhledem k nějakým bázím, určete matici zadaného lineárního zobrazení vzhledem k jiným bázím.
9. Je dána čtvercová matice, rozhodněte, zda je diagonalizovatelná.
10. Je dána čtvercová matice, najděte její vlastní čísla a pro každé z nich určete algebraickou a geometrickou násobnost a nějakou bázi příslušného vlastního podprostoru.
11. Jsou dány čtvercové matice, rozhodněte, zda jsou podobné.
12. Je dána čtvercová matice $\boldsymbol{A}$, najděte její Jordanův normální tvar $\boldsymbol{J}$ a regulární matici $\boldsymbol{P}$ takovou, že $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PJP}^{-1}$.
13. Je dáno lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Najděte nějakou jeho Jordanovu bázi.
14. Je dána [symetrická bilineární / kvadratická] forma, najděte polární bázi formy.
15. Je dána [symetrická bilineární / kvadratická] forma na prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem, najděte ortonormální polární bázi formy.
16. Je dána reálná [symetrická bilineární / kvadratická] forma, určete její signaturu.
17. Je dána kvadrika v $\mathbb{R}^2$. Rozhodněte, zda jde o elipsu, hyperbolu nebo parabolu. (Pozn.: kružnice je také elipsa.)
18. Je dáno zobrazení, rozhodněte, zda je to [bilineární forma / kvadratická forma / skalární součin].

Definice

Měli byste znát definice následujících pojmů: skalární součin, norma vektoru, ortogonální doplněk, vlastní číslo, algebraická a geometrická násobnost vlastního čísla, vlastní vektor, Jordanova buňka, Jordanův tvar matice, Jordanova báze, charakteristický polynom, podobnost matic, bilineární forma, matice bilineární formy, hodnost bilineární formy, ortogonální matice.

Otázky z teoretické části

1. Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Dokažte, že
   (a) $\forall \boldsymbol{x} \in V : (\boldsymbol{x} \mid 0) = 0$;
   (b) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V : (\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{z})$;
   (c) $\forall a \in \mathbb{C}\ \forall \boldsymbol{x} \in V : \|a\boldsymbol{x}\| = |a|\|\boldsymbol{x}\|$.
2. Dokažte, že ortonormální podmnožina unitárního prostoru je lineárně nezávislá.
3. Formulujte a dokažte Cauchyovu-Schwarzovu nerovnost.
4. Formulujte a dokažte trojúhelníkovou nerovnost.
5. Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem, $\boldsymbol{v} \in V$ a U je podprostor prostoru V. Dokažte, že $\boldsymbol{v}$ leží v ortogonálním doplňku podprostoru U právě tehdy, když je kolmý na všechny vektory v množině generátorů podprostoru U.
6. Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a U je podprostor prostoru V. Dokažte, že $U^{\perp}$ je podprostor prostoru V a $U \cap U^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.
7. Formulujte a dokažte Pythagorovu větu.
8. Formulujte a dokažte větu o ortogonálním rozkladu.
9. Nechť vektorový prostor V je direktním součtem podprostorů V_1 a V_2. Dokažte, že každý vektor $\boldsymbol{v} \in V$ lze vyjádřit právě jedním způsobem jako $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, kde $\boldsymbol{v}_1 \in V_1$ a $\boldsymbol{v}_2 \in V_2$.
10. Formulujte a dokažte větu o aproximaci.
11. Formulujte a dokažte kosinovou větu.
12. Nechť M je báze prostoru V. Dokažte, že každá bilineární forma na prostoru V je jednoznačně určena svými hodnotami na množině $M \times M$.
13. Jak se změní matice bilineární formy při přechodu k jiné bázi? Dokažte.
14. Definujte pojem *hodnost bilineární formy* a dokažte, že tato definice je jednoznačná.
15. Jak vypadá inverzní matice k ortogonální matici?
16. Jak vypadají sloupce ortogonální matice? Dokažte.
17. Jak vypadají řádky ortogonální matice? Dokažte a nezapomeňte uvést potřebný předpoklad.
18. Jak vypadá determinant ortogonální čtvercové matice? Dokažte.
19. Nechť $\boldsymbol{A}$ je ortogonální čtvercová matice řádu n a $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Jak vypadá norma vektoru $\boldsymbol{Au}$ a úhel mezi vektory $\boldsymbol{Au}$ a $\boldsymbol{Av}$? Dokažte.
20. Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineární zobrazení a M, N dvě báze $\mathbb{R}^n$. Dokažte, že $\langle f \rangle_M^M$ a $\langle f \rangle_N^N$ jsou podobné.
21. Jak souvisí vlastní čísla matice a její charakteristický polynom? Dokažte.
22. Dokažte, že podobné matice mají stejná vlastní čísla se stejnými algebraickými a geometrickými násobnostmi.
23. Dokažte, že dva vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům matice jsou lineárně nezávislé.
24. Formulujte a dokažte větu charakterizující diagonalizovatelné matice. V důkazu můžete použít pomocná tvrzení, která byla probrána na přednášce.
25. Formulujte tvrzení o existenci a jednoznačnosti Jordanova tvaru komplexní matice.
26. Dokažte, že vlastní čísla symetrické matice jsou reálná.