Charakteristický polynom homogenní lineární rekurentní rovnosti s konstantními koeficienty

Jak jsme si ukazovali na cvičení, problém hledání explicitního vzorce pro n-tý člen posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, která je zadaná rekurentní rovností

$$a_{n+k} \;=\; c_{k-1}a_{n+k-1} \;+\; c_{k-2}a_{n+k-2} \;+\; c_{k-3}a_{n+k-3} \;+\; \cdots \;+\; c_1 a_{n+1} \;+\; c_0 a_n,$$

vede na problém výpočtu charakteristického polynomu matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} c_{k-1} & c_{k-2} & c_{k-3} & \dots & c_1 & c_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ukážeme, že charakteristický polynom této matice je

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (-1)^k(\lambda^k \;-\; c_{k-1}\lambda^{k-1} \;-\; c_{k-2}\lambda^{k-2} \;-\; c_{k-3}\lambda^{k-3} \;-\; \cdots \;-\; c_1\lambda \;-\; c_0).$$

Pro $i = 0, 1, \dots, k-1$ definujme čtvercovou matici $\boldsymbol{M}_i$ řádu $k-1$ sestávající ze dvou čtvercových bloků, z nichž první je řádu $k-1-i$ a druhý je řádu i,

$$\boldsymbol{M}_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\lambda & & & & & & \\ & 1 & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & -\lambda & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ \hline & & & & -\lambda & & & \\ & & & & 1 & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & -\lambda & \\ & & & & & & 1 & -\lambda \end{array}\right).$$

Determinant matice $\boldsymbol{M}_i$ můžeme určit jako součin determinantu prvního bloku s determinantem druhého bloku, čili $\det \boldsymbol{M}_i = 1^{k-1-i} \cdot (-\lambda)^i = (-\lambda)^i$.

Charakteristický polynom matice $\boldsymbol{A}$ je roven determinantu matice $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_k$.

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_k) = \begin{vmatrix} c_{k-1}-\lambda & c_{k-2} & c_{k-3} & \dots & c_1 & c_0 \\ 1 & -\lambda & & & & \\ & 1 & -\lambda & & & \\ & & 1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & -\lambda & \\ & & & & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Tento determinant můžeme spočítat rozvojem podle prvního řádku

$$(c_{k-1}-\lambda)(-1)^{1+1}\det \boldsymbol{M}_{k-1} \;+\; c_{k-2}(-1)^{1+2}\det \boldsymbol{M}_{k-2} \;+\; c_{k-3}(-1)^{1+3}\det \boldsymbol{M}_{k-3} \;+\; \cdots$$
$$\cdots \;+\; c_1(-1)^{1+k-1}\det \boldsymbol{M}_1 \;+\; c_0(-1)^{1+k}\det \boldsymbol{M}_0.$$

Po dosazení za $\det \boldsymbol{M}_i$ pro $i = 0, 1, \dots, k-1$ dostaneme

$$(c_{k-1}-\lambda)(-1)^{k+1}\lambda^{k-1} + c_{k-2}(-1)^{k+1}\lambda^{k-2} + c_{k-3}(-1)^{k+1}\lambda^{k-3} + \cdots + c_1(-1)^{k+1}\lambda^1 + c_0(-1)^{k+1}\lambda^0.$$

Po vytknutí $(-1)^k$ máme

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_k) = (-1)^k(\lambda^k \;-\; c_{k-1}\lambda^{k-1} \;-\; c_{k-2}\lambda^{k-2} \;-\; c_{k-3}\lambda^{k-3} \;-\; \cdots \;-\; c_1\lambda \;-\; c_0).$$