Endomorfismus f prostoru $\mathbb{R}_{\leq 4}[x]$ je definován předpisem

$$f : p(x) \mapsto p(x-1) + p'(x) + xp''(x).$$

Najděte bázi B prostoru $\mathbb{R}_{\leq 4}[x]$ takovou, že $[f]_B^B$ je v Jordanově kanonickém tvaru.

Řešení. Matice endomorfismu f vzhledem k bázi $K = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ je

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom matice $\boldsymbol{A}$ je $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (1-\lambda)^5$. Prostor vlastních vektorů matice $\boldsymbol{A}$ příslušných vlastnímu číslu 1 je $\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} - 1 \cdot \boldsymbol{I}) = \left\langle (1,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}, (0,1,0,0,0)^{\mathrm{T}} \right\rangle$. Jordanův kanonický tvar matice $\boldsymbol{A}$ je tedy tvořen dvěma buňkami, a to buď řádu 2 a 3 nebo řádu 1 a 4. Vzhledem k tomu, že $\operatorname{rank}((\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^3) = 1$, je jedna z buněk řádu 4 a nastává tedy druhá varianta, tj. $[f]_B^B = \operatorname{diag}(\boldsymbol{J}_{1,4}, \boldsymbol{J}_{1,1})$.

Nyní najdeme matici $\boldsymbol{R} = [\mathrm{id}]_K^B = (\boldsymbol{v}_1^{(1)} \mid \boldsymbol{v}_2^{(1)} \mid \boldsymbol{v}_3^{(1)} \mid \boldsymbol{v}_4^{(1)} \mid \boldsymbol{v}_1^{(2)})$. Jak známo, platí $[f]_K^K = [\mathrm{id}]_K^B [f]_B^B [\mathrm{id}]_B^K$. Tuto rovnost můžeme přepsat do podoby, která je nám lépe známá z cvičení, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R} \operatorname{diag}(\boldsymbol{J}_{1,4}, \boldsymbol{J}_{1,1}) \boldsymbol{R}^{-1}$. Začneme tím, že zvolíme vhodnou bázi $(\boldsymbol{v}_1^{(1)}, \boldsymbol{v}_1^{(2)})$ prostoru vlastních vektorů matice $\boldsymbol{A}$ příslušných vlastnímu číslu 1. Vektor $\boldsymbol{v}_1^{(1)}$ musí ležet v

$$\operatorname{Im}((\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^3) \cap \operatorname{Ker}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) = \left\langle (72,144,0,0,0)^{\mathrm{T}} \right\rangle \cap \left\langle (1,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}, (0,1,0,0,0)^{\mathrm{T}} \right\rangle.$$

Zvolme tedy $\boldsymbol{v}_1^{(1)} = (72,144,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ a druhý vektor stačí zvolit tak, aby společně s $\boldsymbol{v}_1^{(1)}$ tvořily bázi $\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})$, např. $\boldsymbol{v}_1^{(2)} = (1,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$. Dopočítáme zobecněné vlastní vektory $\boldsymbol{v}_2^{(1)}$, $\boldsymbol{v}_3^{(1)}$ a $\boldsymbol{v}_4^{(1)}$. Za vektor $\boldsymbol{v}_4^{(1)}$ zvolíme libovolné řešení soustavy

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^3 \boldsymbol{v}_4^{(1)} = \boldsymbol{v}_1^{(1)} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 72 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 144 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_4^{(1)} = \begin{pmatrix} 72 \\ 144 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{např. } \boldsymbol{v}_4^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Potom $\boldsymbol{v}_3^{(1)} = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_4^{(1)} = (1,-4,6,12,0)^{\mathrm{T}}$ a $\boldsymbol{v}_2^{(1)} = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_3^{(1)} = (-6,48,72,0,0)^{\mathrm{T}}$. Vektory $\boldsymbol{v}_1^{(1)}$, $\boldsymbol{v}_2^{(1)}$, $\boldsymbol{v}_3^{(1)}$, $\boldsymbol{v}_4^{(1)}$, $\boldsymbol{v}_1^{(2)}$ udávají souřadnice vektorů báze B vzhledem k bázi K, což znamená, že

$$B = (144x + 72,\ 72x^2 + 48x - 6,\ 12x^3 + 6x^2 - 4x + 1,\ x^4,\ 1).$$