Zápočtový test ze dne 6. 3.

Endomorfismus prostoru polynomů stupně nejvýše 2 nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ má vzhledem k bázím $B = (x^2, x, x+1)$ a $C = (x+2, x^2, 1)$ matici

$$[f]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Najděte nějakou bázi $\operatorname{Ker} f$ a nějakou bázi $\operatorname{Im} f$.

(b) Rozhodněte, zda f je monomorfismus.

(c) Rozhodněte, zda f je epimorfismus.

(d) Rozhodněte, zda f je automorfismus.

Řešení

(a) Nejdříve spočítáme jádro matice $[f]_C^B$. Matici $[f]_C^B$ převedeme do řádkově odstupňovaného tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že $\operatorname{Ker}[f]_C^B = \left\langle (3,3,1)^{\mathrm{T}} \right\rangle$ a víme, že $[\operatorname{Ker} f]_B = \operatorname{Ker}[f]_C^B$. To znamená, že jádro endomorfismu f je generováno jedním vektorem (polynomem), jehož souřadnice vzhledem k bázi B jsou $(3,3,1)^{\mathrm{T}}$. Jedná se tedy o polynom $3 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1 \cdot (x+1)$. Báze jádra endomorfismu f je $(3x^3 + 4x + 1)$.

Nyní najdeme nějakou bázi sloupcového prostoru matice $[f]_C^B$. Z řádkově odstupňovaného tvaru matice $[f]_C^B$, ke kterému jsme dospěli v předchozím kroku, vidíme, že pivoty se nacházejí v prvních dvou sloupcích. To znamená, že první dva sloupce matice $[f]_C^B$ tvoří bázi $\operatorname{Im}[f]_C^B$. Báze prostoru $[\operatorname{Im} f]_C = \operatorname{Im}[f]_C^B$ je tedy např. $((1,0,4)^{\mathrm{T}}, (4,2,0)^{\mathrm{T}})$. Čili obraz endomorfismu f je generován dvěma lineárně nezávislými polynomy, jejichž souřadnice vzhledem k bázi C jsou $(1,0,4)^{\mathrm{T}}$ a $(4,2,0)^{\mathrm{T}}$. Jedná se tedy o polynomy $1 \cdot (x+2) + 0 \cdot x^2 + 4 \cdot 1$ a $4 \cdot (x+2) + 2 \cdot x^2 + 0 \cdot 1$. Báze obrazu endomorfismu f je $(x+1, 2x^2 + 4x + 3)$.

(b) Endomorfismus f není monomorfismus, protože jeho jádro je netriviální (tj. $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$). Můžeme to také zdůvodnit přímo tak, že $f(3x^3 + 4x + 1) = 0$ a $f(0) = 0$, takže f není prosté.

(c) Endomorfismus f není epimorfismus, protože jeho obraz má dimenzi 2 zatímco prostor polynomů stupně nejvýše 2 má dimenzi 3.

(d) Endomorfismus f není automorfismus například proto, že to není monomorfismus.