

Diagonalizace endomorfismu

Úloha 1. Endomorfismus φ prostoru $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ (tj. prostoru reálných polynomů stupně nejvýše 2) přiřazuje polynomu $f(x)$ polynom

$$(x^2 - x)f(0) - 2xf'(x) + f(x + 1).$$

Najděte bázi C prostoru $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, vůči níž má endomorfismus φ diagonální matici.

Řešení. Nejdříve určíme matici endomorfismu vzhledem k bázi $B = (1, x, x^2)$:

$$\varphi(1) = (x^2 - x) \cdot 1 - 2x \cdot 0 + 1 = 1 - x + x^2$$

$$\varphi(x) = (x^2 - x) \cdot 0 - 2x \cdot 1 + x + 1 = 1 - x$$

$$\varphi(x^2) = (x^2 - x) \cdot 0 - 2x \cdot 2x + x^2 + 2x + 1 = 1 + 2x - 3x^2$$

$$\mathbf{A} = [\varphi]_B^B = \left(\begin{array}{c|c|c} [\varphi(1)]_B & [\varphi(x)]_B & [\varphi(x^2)]_B \\ \hline \hline \hline \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom této matice je $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = -(\lambda + 3)(\lambda + 1)(\lambda - 1)$.

Spočítáme vlastní vektory příslušné jednotlivým vlastním číslům

$$\text{Ker}(\mathbf{A} + 3) = \langle (0, -1, 1)^T \rangle,$$

$$\text{Ker}(\mathbf{A} + 1) = \langle (2, -5, 1)^T \rangle,$$

$$\text{Ker}(\mathbf{A} - 1) = \langle (4, -1, 1)^T \rangle.$$

Odtud vidíme, že za C můžeme zvolit např. (g_1, g_2, g_3) , kde $[g_1]_B = (0, -1, 1)^T$, $[g_2]_B = (2, -5, 1)^T$ a $[g_3]_B = (4, -1, 1)^T$. Čili $C = (x^2 - x, x^2 - 5x + 2, x^2 - x + 4)$.

Na závěr můžeme ověřit, že matice φ vzhledem k bázi C je skutečně diagonální:

$$\varphi(x^2 - x) = (x^2 - x) \cdot 0 - 2x(2x - 1) + (x + 1)^2 - (x + 1) = -3(x^2 - x)$$

$$\varphi(x^2 - 5x + 2) = (x^2 - x) \cdot 2 - 2x(2x - 5) + (x + 1)^2 - 5(x + 1) + 2 = -(x^2 - 5x + 2)$$

$$\varphi(x^2 - x + 4) = (x^2 - x) \cdot 4 - 2x(2x - 1) + (x + 1)^2 - (x + 1) + 4 = x^2 - x + 4$$

$$[\varphi]_C^C = \left(\begin{array}{c|c|c} [\varphi(g_1)]_C & [\varphi(g_2)]_C & [\varphi(g_3)]_C \\ \hline \hline \hline \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Úloha 2. Endomorfismus $\varphi : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ přiřazuje polynomu $f(x)$ polynom $f'(x^2 + 1) - f(2)$. Najděte bázi C prostoru $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, vůči níž má endomorfismus φ diagonální matici.

Výsledek. Matice endomorfismu φ vzhledem k bázi $B = (1, x, x^2)$ je

$$[\varphi]_B^B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Obdobným postupem jako v předchozí úloze lze dospět např. k bázi $C = (1, x - 1, 3x^2 - 2)$.