Matematická analýza pro informatiky, LS 18/19

Příklady na cvičení 8+9 (12.+26.4.2019)

1. Spočtěte limitu nebo dokažte, že neexistuje: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.
2. Spočtěte limitu nebo dokažte, že neexistuje: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.
3. Spočtěte limitu nebo dokažte, že neexistuje: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
4. Spočtěte limitu nebo dokažte, že neexistuje: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2}$.
5. Spočtěte limitu nebo dokažte, že neexistuje: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^4+y^2}$.
6. Spočtěte limitu nebo dokažte, že neexistuje: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^4+y^2}$.
7. Uvažujme funkci

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^5+y^4}{x^4+y^2} \quad \text{pro}(x,y) \neq (0,0) \\ &= 0 \quad\quad\quad \text{pro}(x,y) = (0,0). \end{aligned}$$

   Zjistěte, zda má tato funkce totální diferenciál ve všech bodech $\mathbb{R}^2$, a čemu je roven.
8. Zjistěte, zda má funkce $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ totální diferenciál ve všech bodech $\mathbb{R}^2$, a čemu je roven.

Řešení:

1. Neexistuje, protože na každé přímce tvaru $y = kx$ je různá limita (závisí na k). Nechte si tuto funkci (i ostatní) vykreslit třeba ve Wolfram Alpha!
2. Je rovna 0, protože funkce je součinem omezené funkce $\frac{xy}{x^2+y^2}$ a funkce y, která má limitu 0. Nebo lze užít polárních souřadnic podobně jako v dalším příkladě.
3. Je rovna 0, můžeme nejprve otestovat, že po každé přímce $y = kx$ je limita rovna 0, a pokud tedy naše limita existuje, musí být také rovna 0. Pro důkaz existence této limity užijeme polární souřadnice: $x = c\cos\alpha, y = c\sin\alpha$, v nich má funkce tvar $\frac{c^2 \cos\sin\alpha}{c}$, jejíž limita pro $c \to 0+$ je 0.
4. Je rovna 0, opět použitím polárních souřadnic: $\lim\limits_{c\to 0+} f(c\cos\alpha, c\sin\alpha) = \lim\limits_{c\to 0+} \frac{c^3\sin^2\alpha}{c^4+c^2\sin^2\alpha} = 0$.
5. Neexistuje, protože po přímkách tvaru $y = kx, k \neq 0$ je limita $\frac{1}{k}$
6. Neexistuje, protože po přímkách tvaru $y = kx, k \neq 0$ a též pro přímku $x = 0$ je limita 1, pro přímku $y = 0$ je limita 0, a po parabole $y = x^2$ je limita dokonce $\frac{1}{2}$.

7. V bodech mimo počátek je totální diferencál roven

$$Df(x_0) = (\frac{x^8 + 5x^4y^2 - 4x^3y^4}{(x^4+y^2)^2}, \frac{2y^5 + 4y^3x^4 - 2yx^5}{(x^4+y^2)^2}),$$

protože parciální derivace jsou v každém takovém bodě zřejmě spojité. V počátku jsou parciální derivace $\partial_x f(0,0) = 1, \partial_y f(0,0) = 0$, ale funkce $\partial_x f$ není v počátku spojitá, takže máme podezření, že by ani totální diferenciál nemusel existovat. Tuto hypotézu dokážeme z definice tot. diferenciálu, totiž (při označení $h = (a,b)$) v bodě $x_0 = (0,0)$ limita

$$\lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(\frac{a^5+b^4}{a^4+b^2} - 0 - (1,0) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)$$

neexistuje (domyslete proč).

8. Parciální derivace jsou $\partial_x f = \left(\frac{x^3}{x^3+y^3}\right)^{\frac{2}{3}}, \partial_y f = \left(\frac{y^3}{x^3+y^3}\right)^{\frac{2}{3}}$. Ty jsou definovány a spojité všude kromě přímky $y = -x$, a tam také tedy existuje totální diferenciál, složený z těchto parc. derivací.