Jméno a příjmení: ______________________________

Matematická analýza NOFY151, ZS 20/21, Cvičení s L. Krumpem

Domácí úkol č. 1, Termín odevzdání: 18.10.2020.

V úlohách 1 a 2 k danému výroku zapište jeho negaci. Rozhodněte, zda platí původní výrok nebo jeho negace, zdůvodněte.

1. (0,2 bodu)

$$\exists c \in \langle -2, 2\rangle\ \exists d \in \langle -2, 2\rangle : c \neq d \wedge c^2 = d^2$$

2. (0,2 bodu)

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists a \in \mathbb{Z}\ \exists b \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) : x = a + b$$

V úlohách 3 a 4 dokažte množinové rovnosti ($A, B, \dots$ značí množiny).

3. (0,2 bodu)

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$$

4. (0,2 bodu) Je-li $B_n = \bigcap_{j=1}^{n} A_j$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, dokažte, že

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

5. (0,2 bodu) Je-li $f : X \to Y$ zobrazení, $B \subset Y$, označíme

$$f^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\},$$

této množině říkáme **vzor množiny** B **při zobrazení** f. Dokažte, že

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X).$$

6. (0,6 bodu) Dokažte matematickou indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ platí

$$2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2n)! > ((n+1)!)^n.$$

7. (0,4 bodu) Označme množinu

$$M = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Určete maximum, minimum, supremum a infimum množiny M, pokud existují, případně ukažte jejich neexistenci, vše podle příslušných definic.