MAF cvičení, 15.12.2020, 9^{00}

Doplňky k limitám posloupností:

1. Podílové/odmocninové kritérium pro posloupnosti: je-li

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \end{array}\right\} \text{, pak } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

je-li

$$\left.\begin{array}{l} \text{——''——} > 1 \\ \text{——''——} > 1 \end{array}\right\} \text{, pak } \lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$$

Př: Cv. 9 – 2 $\lim \frac{a^n}{n!}$, $a \in \mathbb{R}$

Podílové krit.:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|a|^n} = \frac{|a|}{n+1} \to 0 \underline{\underline{< 1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

? Odmocninové:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} \; ?$$

Př – sami doma:

$$\lim \frac{n^2}{a^n} = ?$$

② limity rekurentně zadaných posl.

Cv. 9 – ⑤ $\lim_{n\to\infty} a_n = ?$

kde $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$
$(n \geq 1)$

Věta: monotónní omezená posl. má vlastní limitu

Tedy ukážeme: a) $\{a_n\}$ je monot.

$a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{\sqrt{2}+2}$, $a_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+2}+2}$ ...

tipujeme, že bude rostoucí:

indukcí: $a_1 < a_2$ zřejmé

předp. $a_{n-1} < a_n$

$\Rightarrow a_{n-1} + 2 < a_n + 2$

$\Rightarrow \sqrt{a_{n-1} - 2} < \sqrt{a_n + 2}$ protože $\sqrt{x}$ je rostoucí fce

$\overset{\shortparallel}{a_n} < \overset{\shortparallel}{a_{n+1}}$

b) $\{a_n\}$ je omezená

zdola: $a_n \geq \sqrt{2}$

shora: $\overset{?}{\,} a_n \leq 2$

$a_1 = \sqrt{2} \leq 2$ ✓

indukcí $a_n \leq 2$

$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \leq \sqrt{4} = 2$ ✓

$\Rightarrow \exists$ vl. limita $a = \lim a_n$

$\Rightarrow$ spočteme ji:

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \sqrt{a_n + 2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & = & \sqrt{a+2} \end{array} \quad /(\ )^2$$

$a^2 = a + 2$

$a^2 - a - 2 = 0 \;\begin{cases} -1 & \text{nehodí se} \\ \underline{\underline{2 = a}} \end{cases}$

Sami: ⑥

Monotonie, extrémy, konvexita - konkavita

f je <u>monotónní</u> na int. I $\equiv$ f je na I
- <u>neklesající</u> $\equiv \forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$
- <u>nerostoucí</u> $\equiv$ ——"—— $f(x_1) \ge f(x_2)$

f je <u>ryze monotónní</u> na I $\equiv$ f je na I
- <u>rostoucí</u> $\equiv$ ——"—— $f(x_1) < f(x_2)$
- <u>klesající</u> $\equiv$ ——"—— $f(x_1) > f(x_2)$

$f'(x) > 0$ pro $\forall x \in I \Rightarrow f$ rostoucí v I

< 0 kles.

≥ 0 neklés.

≤ 0 nerost.

Postup vyšetření intervalů monotonie: 1) D_f

2) f',   3) položíme $f'(x) = 0$

→ dostaneme stacionární body

4) množina <u>výjimečných bodů</u>

V_f: - stacion. body
- body bez vlastní derivace
- krajní body D_f

5) V_f rozdělí D_f na intervaly, v nichž je f ryze monot.

Globální maximum má fce f v bodě x_0
$\equiv \forall x \in D_f: \ f(x) \le f(x_0)$

Globální minimum: —"— $f(x) \ge f(x_0)$

} Glob. extrémy

Lokální maximum:

$\exists \delta > 0 \ \forall x \in P(x_0, \delta): \ f(x) \le f(x_0)$

—"— min: $f(x) \ge f(x_0)$

$f(1) = 0$ – lok. max.
$f(3) = -4$ – lok. min.

2. způsob určení monotonie: porovnání hodnoty/limity f v $x \in V_f$

$x \in V_f$	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f(x)$ nebo $\lim f(x)$	$-\infty$	0	-4	$+\infty$

$\nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$

Cv. 10 - (1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

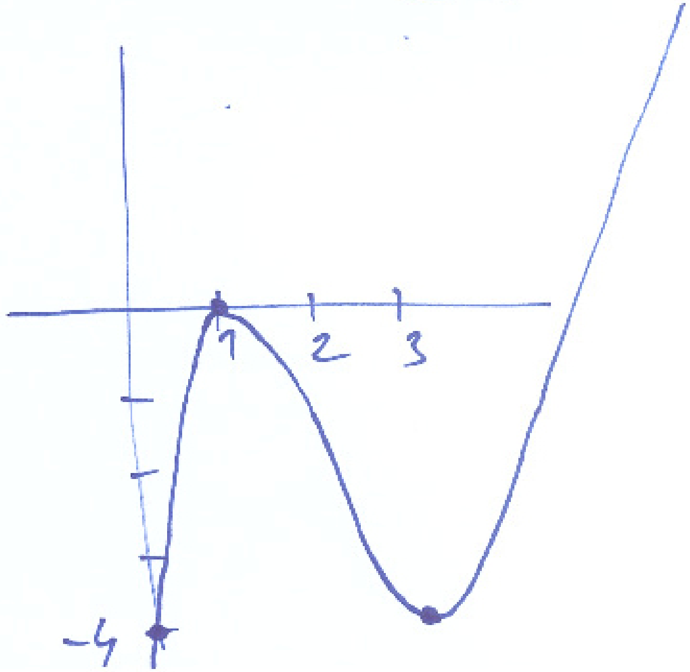
$D_f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$
$3(x-3)(x-1) = 0$

stac. body: $1; 3$

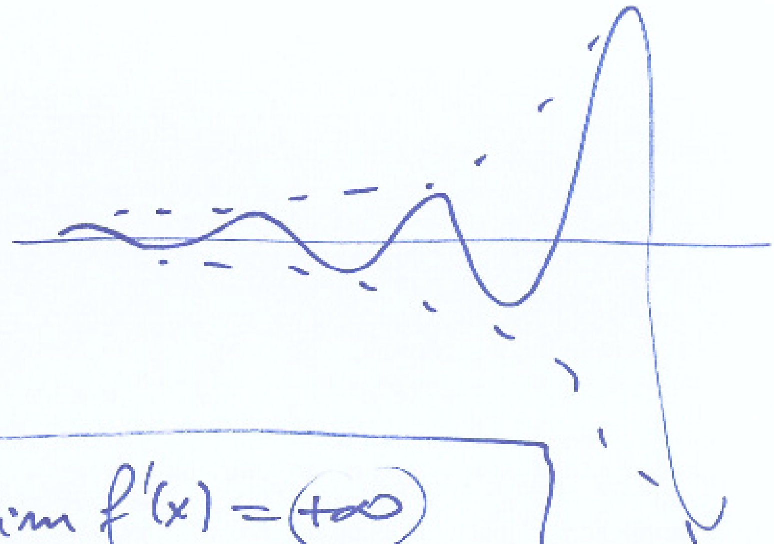
$V_f = \{-\infty, 1, 3, +\infty\}$

int.: $(-\infty, 1), (1, 3), (3, +\infty)$

f': $+$ $\quad -$ $\quad +$
f: roste $\quad$ klesá $\quad$ roste



② $f(x) = e^x \cdot \sin x$



stac. body: $-\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

roste: $\left(-\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right)$

klesá: $\left(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \frac{7\pi}{4} + 2n\pi\right)$

$\lim_{x \to 0\pm} f'(x) = +\infty$

③ $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \cdot (1-x)^{\frac{2}{3}}$

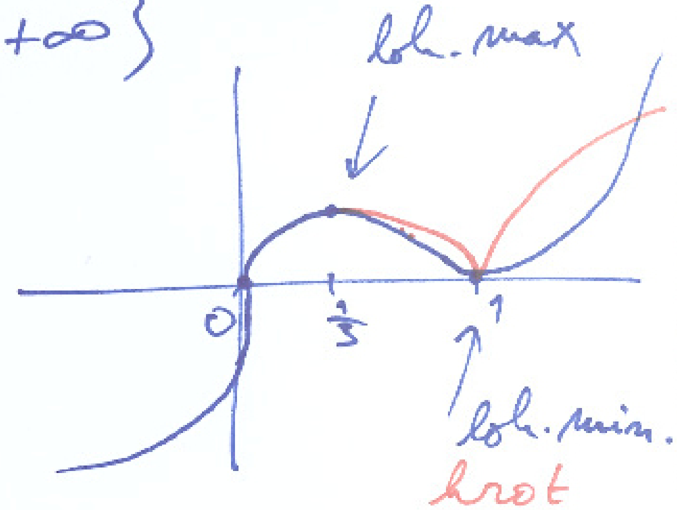
$\lim_{x \to 1\pm} f'(x) = \pm\infty$

$\Downarrow$

$$f'(x) = \frac{1-3x}{3x^{2/3} \cdot (1-x)^{1/3}} = 0 \text{ pro } x = \frac{1}{3} \text{ stac. bod}$$

f' není def. v $0, 1$ $\Rightarrow$ $V_f = \{-\infty, 0, \frac{1}{3}, 1, +\infty\}$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}, 1)$	$(1 + \infty)$
f'	+	+	−	+



$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(\frac{1}{3}) > 0$

(5) Dokažte, že $e^x > x+1$ pro $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Trik: $f(x) := e^x - x - 1$

pak chceme: $f(x) > 0$ pro $\forall x \neq 0$

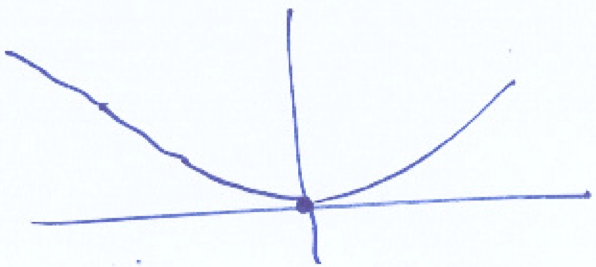
ukážeme, že v 0 je glob. min. $f(0)=0$

$f'(x) = e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f'(x) < 0$ v $(-\infty, 0) \Rightarrow$ klesá

> 0 v $(0, +\infty) \Rightarrow$ roste

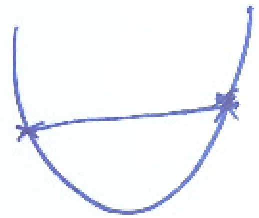
$\Rightarrow f(0) = 0$ je glob. min ✓



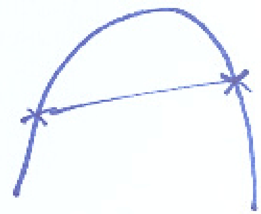
(4) – sami doma, hledáme opět extrémy $f(x) := \dots$

Konvexita, konkavita

f je konvexní v I



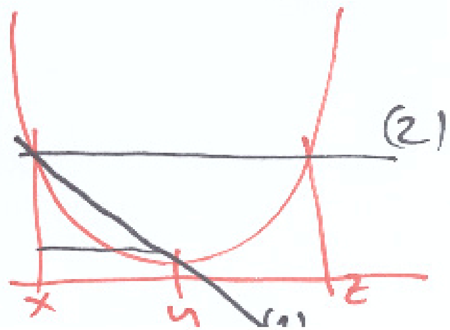
konkávní v I



konvexní:

$x < y < z \in I$: $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} < \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$

směrnice (1) … (2) směrnice



Platí: druhá derivace $f''(x) = (f'(x))'$

$f''(x) < 0$ v $I \Rightarrow f$ konkávní v I

> 0 konvexní

bod, kde se mění znam. $f''(x)$

= inflexní body

⑬ $f(x) = e^{-x^2}$: konvexita / konk.

$$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} =$$

$$= 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0$$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ... kandidáti na infl. bod

	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$
7) f''	+	−	+

⑥
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

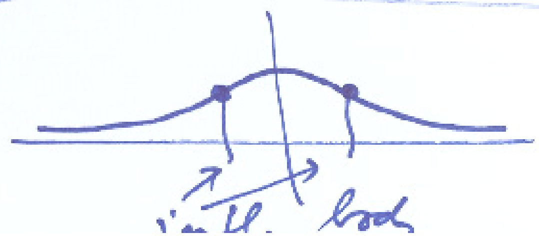
$$g(x) = \begin{cases} x \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$ pro $x \neq 0$

$$\lim_{x \to 0+} f'(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} \overset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{2 \cdot \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}}{3x^2} = ? \quad \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^5}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} e^{\overset{\to -\infty}{-\frac{1}{x^2}}} = 0}$$



%.

subst. $y = \frac{1}{x}$

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{2e^{-y^2}}{\frac{1}{y^3}} = \lim 2y^3 \cdot e^{-y^2} = \lim_{y\to+\infty} \frac{2y^3}{e^{y^2}} \overset{L'H\,(3\times)}{=} 0$$

Nebo:

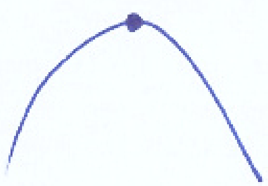
$$\lim_{x\to0+} \frac{\frac{2}{x^3}}{e^{1/x^2}} \overset{L'H}{=} \lim \frac{-6\frac{1}{x^4}}{-\frac{2}{x^3}\cdot e^{1/x^2}}$$

atd.

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ (oboustranná)

vidíme: $f'(x) > 0$ pro $x > 0$, < 0 pro $x < 0$ $\Rightarrow$ v 0 má f glob. min. 0 (plyne i ze zadání fce)

Vsuvka:



lok. max.:

$$\left\{\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f''(x) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ f má v x lok. max.

nejde obrátit!

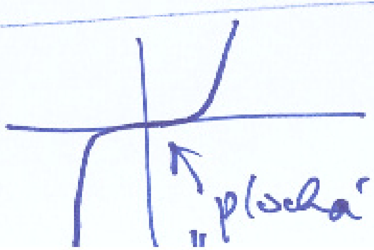
a podobně vyjde $f''(0) = 0$

$f'''(0) = 0$, $\forall n: f^{(n)}(0) = 0$

„plochá"

konvexní v okolí 0

$g(x)$:



„plochá"

$\forall n \in \mathbb{N}: g^{(n)}(0) = 0$

rostoucí v $\mathbb{R}$

Fami: 9, 10, 12 – fyzikální

8, 11, 14, 15