MAF cvičení, 15.12.2020, 12:20

Doplňky k limitám posloupností:

(1) lim sup , lim inf

$\downarrow$ největší $\quad\downarrow$ nejmenší

hromadný bod posl.

= limita podposloupnosti

Př.: $a_n = (-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, \dots$

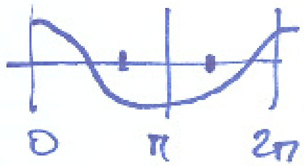
má 2 hrom. body: $-1, 1$

(8) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right) \cos \frac{2\pi n}{3}$

$\downarrow$

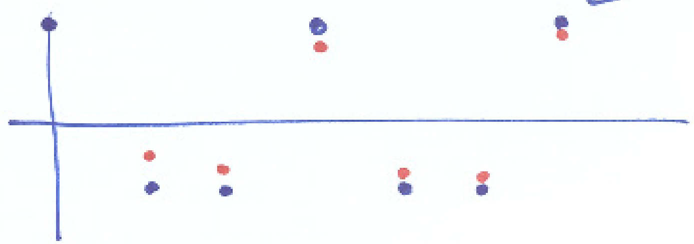
1

n	$\frac{2\pi n}{3}$	$\cos\frac{2\pi n}{3}$
0	0	1
1	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$
3	2π	1



$\cos\frac{2\pi n}{3}$ hrom. body $1, -\frac{1}{2}$

$\cos\frac{2\pi n}{3}$



$\Rightarrow a_n$ má také hrom. body

$1 \Rightarrow \limsup a_n$

$-\frac{1}{2} \Rightarrow \liminf a_n$

② Podílové/odmocninové kritérium pro posloupnosti: je-li

$$\left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \end{array} \right\rangle, \text{ pak } \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

$$\left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \\ \lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \end{array} \right\rangle, \text{ pak } \lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$$

Př: $a_n = \frac{1}{2}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\tfrac{1}{2}} \to 1$$

Př: Cv. 9 - ② $\lim \dfrac{a^n}{n!}$, $a \in \mathbb{R}$

Podílové krit.:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|a|^n} =$$

$$= \frac{|a|}{n+1} \to 0 < 1$$

$$\Rightarrow \lim a_n = 0$$

Př - sami doma:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{a^n} = ?$$

③ limity rekurentně zadaných posloupností

cv.9-⑤ $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ $(n \geq 1)$

$\lim_{n \to \infty} a_n = ?$

Věta: monotónní omezená posl. má vlastní limitu

Postup: ukážeme a) $\{a_n\}$ je monotónní

$a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{\sqrt{2}+2}$, $a_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+2}+2}$

je rostoucí – dokážeme indukcí

$a_1 < a_2$ zřejmé

předp. $a_{n-1} < a_n$

$\Rightarrow a_{n-1} + 2 < a_n + 2$

$\Rightarrow \sqrt{a_{n-1}+2} < \sqrt{a_n + 2}$ ($\sqrt{x}$ je rostoucí fce)

$$\underset{a_n}{\underset{\parallel}{\sqrt{a_{n-1}+2}}} < \underset{a_{n+1}}{\underset{\parallel}{\sqrt{a_n+2}}}$$

b) $\{a_n\}$ je omezená

zdola: $a_n \geq \sqrt{2}$

shora: ? $a_n \leq 2$

indukce: $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$ ✓

$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \leq \sqrt{2+2} = 2$ ✓

$\Rightarrow \exists$ vl. limita $a = \lim a_n \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ spočteme ji

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \sqrt{a_n+2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & = & \sqrt{a+2} \end{array}$$

$a^2 = a + 2$

$a^2 - a - 2 = 0$ < -1 nemůže být; $\underline{\underline{2 = a}}$

Sami doma: ⑥

Monotonie, extrémy, konvexita-konkavita funkcí

f je monotónní na int. I ≡ f je na I
- neklesající ≡ $\forall x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- nerostoucí ≡ — " — $f(x_1) \geq f(x_2)$

f je ryze monotónní na I ≡ f je na I
- rostoucí ≡ — " — $f(x_1) < f(x_2)$
- klesající ≡ — " — $f(x_1) > f(x_2)$

$f'(x) \geq 0$ v I $\Rightarrow$ f neklés. v I

≤ 0 $\Rightarrow$ nerost.

> 0 $\Rightarrow$ rost.

< 0 $\Rightarrow$ kles.

Postup vyšetření intervalů monotonie:

Daná fční předpis f → 1) D_f

2) f', 3) $f'(x) = 0$

→ dostaneme stacionární body fce f

4) množina výjimečných bodů

V_f: – stacion. body
– krajní body D_f (+body nespoj.)
– body bez vlastní derivace

5) V_f rozdělí D_f na intervaly, v nichž je f ryze monot.

6) určíme typ monotonie:

- podle znaménka f'
- porovnáním hodnot / limit fce f v vyjím. bodech

Globální maximum má fce f v bodě x_0: $\forall x \in D_f: f(x) \leq f(x_0)$

—"— minimum: $\geq$

Lokální maximum:

$\exists \delta > 0: \forall x \in P(x_0, \delta): f(x) < f(x_0)$

Cv. 10: 1, 2, 3

① $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$

$3(x-3)(x-1) = 0$

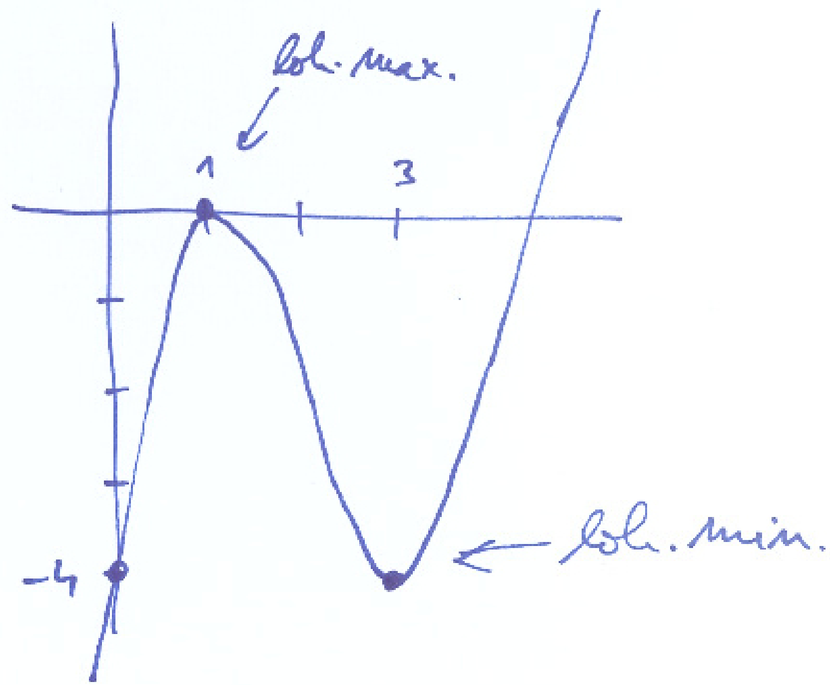
stac. body: 1; 3

$V_f = \{-\infty, 1, 3, +\infty\}$

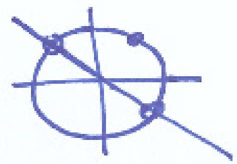
	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
f':	+	−	+
f:	roste	klesá	roste

$f(1) = 0$, $f(3) = -4$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f(x)$ nebo $\lim f(x)$	$-\infty$	0	-4	$+\infty$
	↗	↘	↗	



② $f(x) = e^x \cdot \sin x$, $f'(x) = \underbrace{e^x}_{\neq 0}\underbrace{(\sin x + \cos x)}_{=0}$ pro

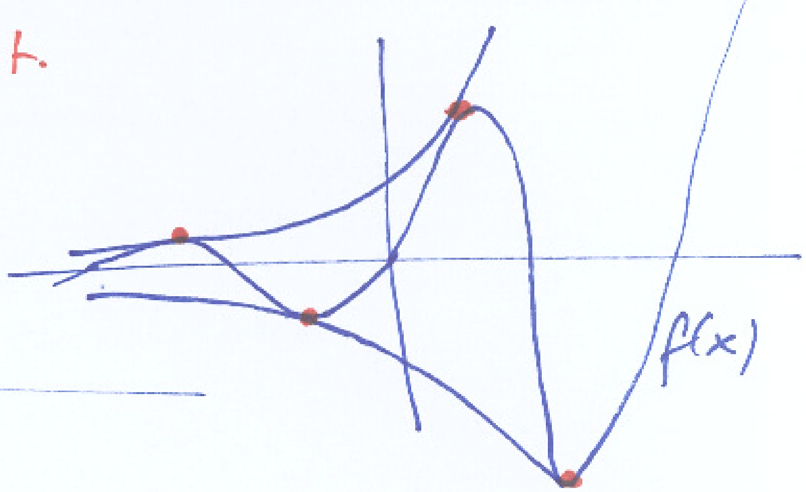


stac. body: $\underline{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}, \underline{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi} \rightarrow$ lok. ext.

$\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$

v $\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)$: f klesá

$\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$: f roste



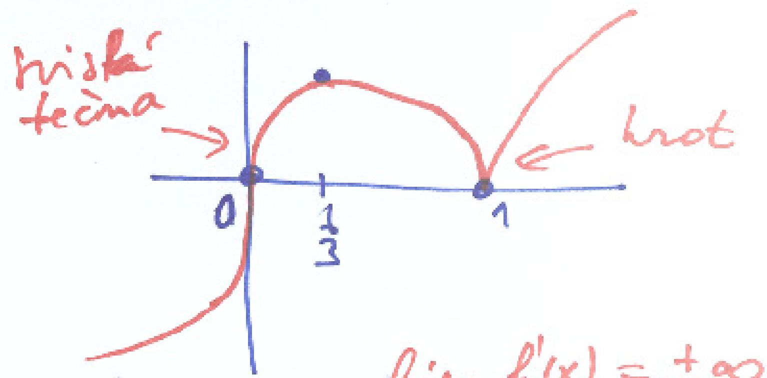
③ $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \cdot (1-x)^{\frac{2}{3}}$ $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{x}\right)^2} - 2\sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}\right) = \frac{1-3x}{3 \cdot x^{2/3} \cdot (1-x)^{1/3}}$, $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow V_f = \{-\infty, 0, \frac{1}{3}, 1, +\infty\}$

$\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = +\infty$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}, 1)$	$(1, +\infty)$
f':	+	+	−	+



$f(0) = 0$ $f(\frac{1}{3}) > 0$ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

$f(1) = 0$

$\lim\limits_{x \to 1\pm} f'(x) = \pm\infty$

⑤ Dokažte, že $e^x > x+1$

pro $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

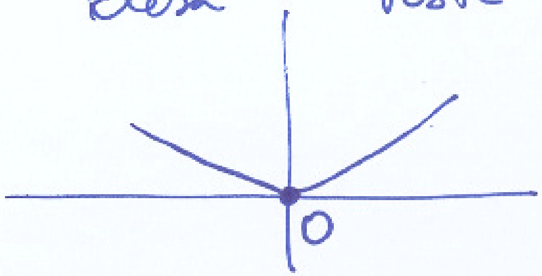
pro $x=0$ platí rovnost

trik: $\underbrace{f(x)}_{x\in\mathbb{R}} := e^x - x - 1 \underset{x\neq 0}{\overset{?}{>}} 0$

$$f'(x) = e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$e^0 = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
f':	$-$	$+$
	klesá	roste

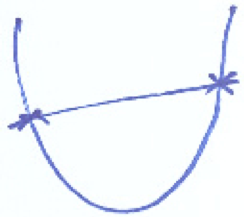


$\Rightarrow$ $[0,0]$ je glob. min.

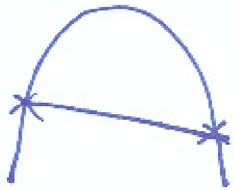
(jediné) $\Rightarrow$ ✓

Konvexita, konkavita

f je konvexní v I



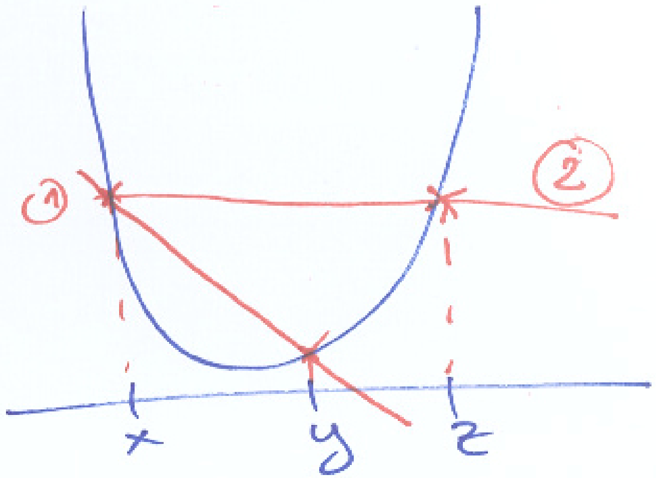
konkávní v I



konvexní

$x < y < z \in I$ $\quad \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} < \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}$

směrnice ① $\quad$ směrnice ②



Platí: $f''(x) = (f'(x))'$

$f''(x) < 0$ v $I \Rightarrow f$ konkávní v I

> 0 konvexní

bod, kde se mění znam. f'' = inflexní bod

Sami: Cv. 10:

9, 10, 12 – fyzikální

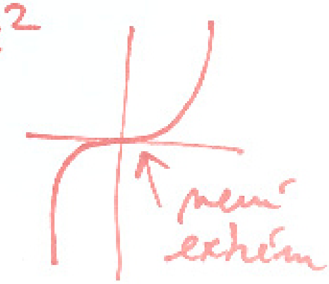
8, 11, 14, 15

$f(x) = x^4$, $f' = 4x^3$, $f'' = 12x^2 = 0$

$x = 0$ ... kand. na infl. bod

$f'' \geq 0$ v $\mathbb{R} \Rightarrow f$ konvexní v $\mathbb{R}$

$f(x) = x^3$, $f' = 3x^2$



(13) $f(x) = e^{-x^2}$: konv. / konk.

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$

$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} =$

$= 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0$

$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ = kandidáti na infl. bod

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$
f'':	+	−	+