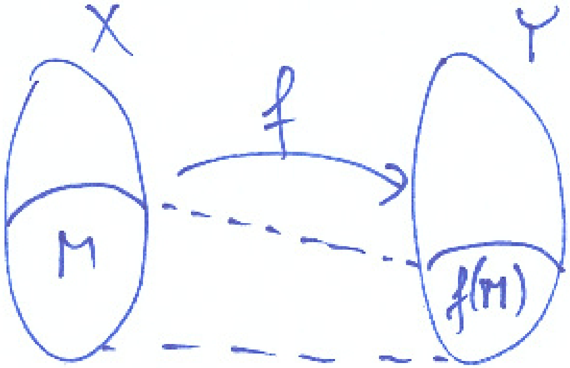
Cvičení MAF, 6.10.2020, 9^{00} 1

Označení: $f: X \longrightarrow Y$ zobrazení

$x \longmapsto f(x)$

$M \subset X \ \dots \ f(M) = \{y \in Y;\ \exists x \in X: f(x) = y\}$

obraz množiny M v zobrazení f



(10) Dokažte: $M_1, M_2 \subset X \Rightarrow$

$$f(M_1) \setminus f(M_2) \subset f(M_1 \setminus M_2)$$

f je pevně dané zobrazení $f: X \to Y$

~~Pro $\forall y \in f(M_1 \setminus M_2)$~~

~~$y = y_1 - y_2$~~

Chceme vlastně ukázat, že

$$y \in f(M_1) \setminus f(M_2) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y \in f(M_1 \setminus M_2)$$

$y \in f(M_1) \Leftrightarrow \exists x_1 \in M_1 : f(x_1) = y$

$y \notin f(M_2) \Leftrightarrow \forall x_2 \in M_2 : f(x_2) \neq y$

$\Downarrow$?

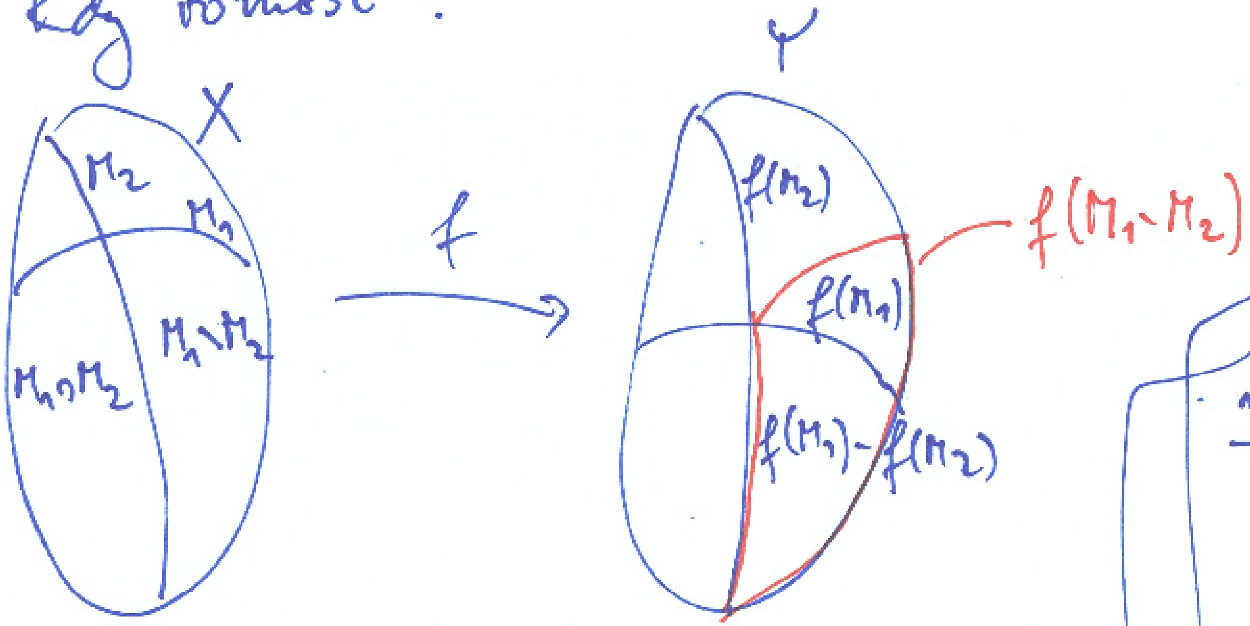
$y \in f(M_1 \setminus M_2) \Leftrightarrow \exists x_3 \in M_1 \setminus M_2 : f(x_3) = y$

Stačí zvolit za x_3 libovolný prvek z $M_1 \setminus M_2$, který $f(x_3) = y$

Kdy rovnost?

1

Kdy rovnost ?



1) Je-li f bijekce, pak to je rovnost.

2) Pokud $f(M_1 \setminus M_2) \cap f(M_2) = \emptyset$

3) Je-li f <u>prosté</u>

↳ $f: X \to Y$ <u>prosté</u>, pokud

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

<u>Def</u>: <u>bijekce</u> je zobrazení <u>prosté</u> a <u>na</u>

↓ $f(X) = Y$

(11) $\varphi: \langle 0, +\infty) \to \langle 1, +\infty)$

bijekce,

$\psi(x) := \sqrt{(\varphi(x))^2 - 1}$.

φ bijekce $\Rightarrow$ existuje <u>inverzní zob.</u> φ^{-1}

$\varphi^{-1}: \langle 1, +\infty) \to \langle 0, +\infty)$

$\varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$

$\varphi^{-1}(\varphi(y)) = y$

Ukažte, že $\exists\, \psi^{-1}$, vyjádřit pomocí φ^{-1}. $D_{\psi^{-1}} = ?$

Vidíme: $\varphi(x) \geq 1 \Rightarrow \sqrt{\varphi^2(x)-1} \geq 0$
pro $\forall x \geq 0$

$$y = \psi(x) = \sqrt{\varphi^2(x)-1} \quad / (\ )^2$$
$$y^2 = \varphi^2(x)-1 \quad / +1$$
$$y^2+1 = \varphi^2(x) \quad / \sqrt{\ }$$
$$\sqrt{y^2+1} = \varphi(x) \quad / \varphi^{-1}$$
$$\underbrace{\varphi^{-1}\left(\sqrt{y^2+1}\right)}_{\psi^{-1}(y)} = x$$

ekvivalentní úpravy

$$D_{\psi^{-1}} = \langle 0, +\infty) = H_{\psi^{-1}}$$

$$\varphi: \langle 0, +\infty) \longrightarrow \langle 1, +\infty)$$

$D_\varphi = H_{\varphi^{-1}}$, $H_\varphi = D_{\varphi^{-1}}$

Lze rozšířit: $D_{\psi^{-1}} = \mathbb{R}$.

Matematická indukce

= metoda důkazu pro tvrzení typu „$\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$"

$P(n)$ ↳ výrok

(1) dokážeme ~~to~~ $P(1)$

(2) dokážeme, že pokud platí $P(n)$, pak platí i $P(n+1)$ (pro $\forall n \in \mathbb{N}$)

„indukční krok"

Pozn: ~~tak~~ někdy se začíná od jiného čísla než 1

Př: $1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$

Dk indukcí: (1) $n=1$: $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$ ✓

(2) $\underbrace{1+\ldots+n}+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) =$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Sami: Zadání Cv 2.
Úlohy 1, 2, 4, 5, 8, 10
3

---

① (1) $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$ ✓

(2) $\underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}_{= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + (n+1)^2 \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = (n+1)\frac{(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)\left[2n^2 + n + 6n + 6\right]}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)\left[2n^2 + 7n + 6\right]}{6},$$ a přitom $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$ ✓

④

④ – binomická věta

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a,b \in \mathbb{R}: \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$\underline{\underline{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}}}$

(1) $n=1$: $(a+b)^1 = a+b$

$\left.\begin{array}{l} \\ \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} \cdot b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a+b \end{array}\right\} \checkmark$

(2) $(a+b)^{n+1} \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} \cdot b^k$

$\|$

$(a+b) \cdot (a+b)^n = (a+b) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} \cdot b^k \cdot \binom{n}{k} \right) =$

$= (a+b) \cdot \left(\binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n \right) =$

$= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{1} a^n b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^1 b^n +$

$+ \binom{n}{0} a^n b^1 + \dots + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{n-1} a^1 b^n + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} =$

$= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{1} a^n b^1 + \dots + \binom{n+1}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n+1}{n} a^1 b^n + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1}$ $\checkmark$

⑤ Pozn.: $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$

(8) Dokažte: $(2n)! < 2^{2n}\cdot(n!)^2$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$

(1) $2! = 2$

$2^2\cdot(1!)^2 = 4$ } ✓

(2) $(2n+2)! \overset{?}{<} 2^{2n+2}\cdot((n+1)!)^2$

$$\begin{gathered}(2n+2)! \\ \| \\ (2n+2)\cdot(2n+1)(2n)! < (2n+2)(2n+1)\,2^{2n}\cdot(n!)^2\end{gathered}$$

ind. předpoklad

~~...~~ stačí ukázat, že

$$(2n+2)(2n+1)\,2^{2n}(n!)^2 \overset{?}{\leq} 2^{2n+2}((n+1)!)^2$$

⋮

dopočítat sami

$$(2n+2)(2n+1) \overset{?}{\leq} 4(n+1)^2$$

$$(2n+2)(2n+1) \leq (2n+2)^2 \quad \text{pro } \forall n$$

Supremum, infimum množiny v $\mathbb{R}$

Př: $\langle 0,1\rangle = M$

0 … je minimum M

1 … je maximum M

Př: $(0,1) = N$

0 není min N

1 není max N

(protože $0 \notin N$, $1 \notin N$)

ale: $0 = \inf N$

$1 = \sup N$

a taky $0 = \inf M = \min M$

$1 = \sup M = \max M$