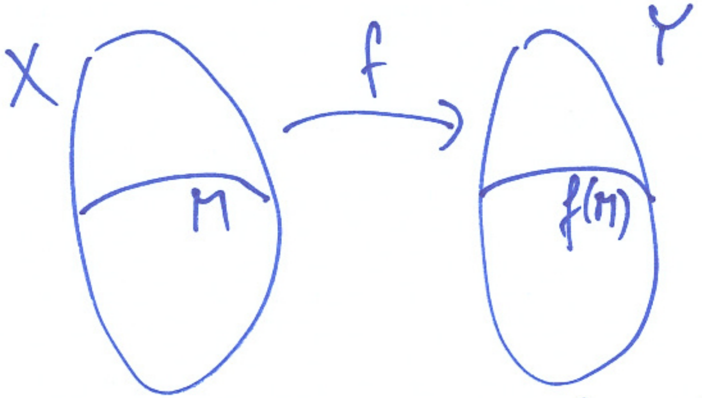
Cvičení MAF, 6.10.2020, 12:20

Označení: $f: X \longrightarrow Y$ zobrazení

$x \longmapsto f(x) = y$

$M \subset X \dots f(M) = \{ y \in Y;\ \exists x \in X : f(x) = y \}$

obraz množiny M v zobrazení f



(10) Dokažte: $M_1, M_2 \subset X \Rightarrow$

$$f(M_1) \setminus f(M_2) \subset f(M_1 \setminus M_2)$$

Chceme vlastně ukázat, že

$$y \in f(M_1) \setminus f(M_2) \Rightarrow y \in f(M_1 \setminus M_2)$$

$$y \in f(M_1) \Leftrightarrow \exists x_1 \in M_1 : f(x_1) = y$$

$$y \notin f(M_2) \Leftrightarrow \forall x_2 \in M_2 : f(x_2) \neq y$$

$$\Downarrow ?$$

$$y \in f(M_1 \setminus M_2) \Leftrightarrow \exists x_3 \in M_1 \setminus M_2 : f(x_3) = y$$

Stačí zvolit za x_3 libovolný prvek z $M_1 \setminus M_2$ takový, že $f(x_3) = y$

$(x_3 = x_1)$ ✓

Kdy platí rovnost?

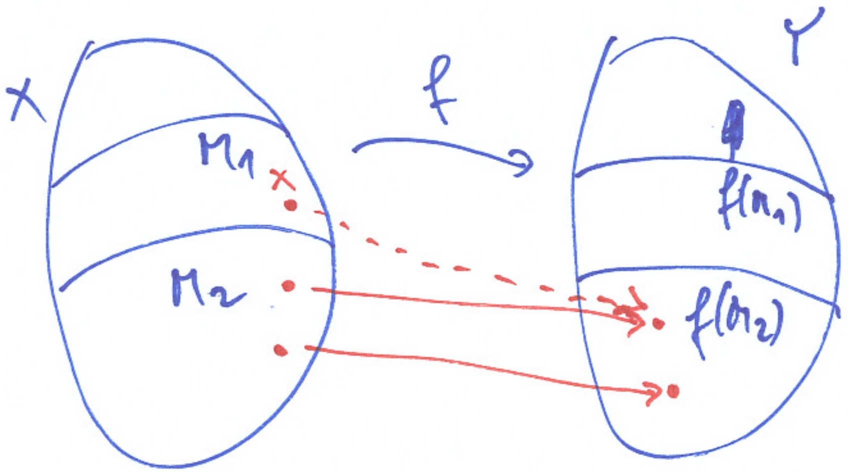
$$f(M_1) \setminus f(M_2) \overset{?}{=} f(M_1 \setminus M_2)$$

1) $M_1 \subset M_2 \Rightarrow$ obě strany jsou $\emptyset$

2) f prosté

$f: X \to Y$ je <u>prosté</u>:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



předp. $M_2 \subset M_1$, předp. $f(M_1) \setminus f(M_2) \underset{\subset}{\neq} f(M_1 \setminus M_2)$

tj: $\exists\, \underline{y \in f(M_1 \setminus M_2)}$

$y \in f(M_1) \wedge \underline{y \in f(M_2)}$

$\Rightarrow \exists\, x \in M_1 - M_2$
$\exists\, x' \in M_2$ $\quad y = f(x) = f(x')$

$\Rightarrow f$ <u>není prosté</u>

$f: X \to Y$ je <u>bijekce</u> $\Leftrightarrow$

f je <u>prosté</u> a <u>na</u>

↓

zobr. na celou Y

tj. $f(X) = Y$

f bijekce $\Rightarrow$ existuje <u>inverzní zobrazení</u> $f^{-1}: Y \to X$ splňující

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

---

(11) $\varphi: \langle 0, +\infty) \to \langle 1, +\infty)$ bijekce, def. $\psi(x) = \sqrt{\varphi^2(x) - 1}$

Ukažte, že ex. ψ^{-1}, vyjádřete ji pomocí φ^{-1}. $D_{\psi^{-1}} = ?$

$$y = \psi(x) = \sqrt{\varphi^2(x) - 1} \quad / (\ )^2$$
$$y^2 = \varphi^2(x) - 1 \quad / +1$$
$$y^2 + 1 = \varphi^2(x) \quad / \sqrt{\ }$$
$$\sqrt{y^2+1} = \varphi(x) \quad / \varphi^{-1}$$
$$x = \underline{\underline{\varphi^{-1}\left(\sqrt{y^2+1}\right) = \psi^{-1}(y)}}$$

$\varphi : \langle 0, +\infty) \to \langle 1, +\infty)$

$\Rightarrow$ ∀ úpravy jsou ekvivalentní

$D_{\psi^{-1}} = \cancel{\mathbb{R}}\ \langle 0, +\infty) \ \ldots$ prosté
a lze rozšířit na celé $\mathbb{R}$
(už není prosté)

Pozor! φ^{-1} <u>neznamená</u> $\dfrac{1}{\varphi}$!

(též: φ_{-1})

Matematická indukce

= metoda důkazu pro tvrzení typu „$\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$"
výrok

(1) dokážeme $P(1)$

(2) „indukční krok": dokážeme
$$P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

<u>Pozn</u>: někdy se začíná od jiného čísla než od 1

<u>Př</u>: $1 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>Dk indukcí</u>: (1) $n = 1$: $L = 1$, $P = \dfrac{1\cdot(1+1)}{2}$
$L = P$ ✓

(2) $$\underbrace{1 + \ldots + n}_{=\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$ ✓

ind. předpoklad

Sami: Zadání Cv2

Úlohy 1, 2, 4, 5, 8, 10

3

(2) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + \dots + n)^2$

$n = 1$: $1^3 = 1^2$ ✓

$n \mapsto n+1$: $\underbrace{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}_{} + (n+1)^3 =$

$= \underbrace{(1 + \dots + n)^2}_{} + (n+1)^3$

?

$\stackrel{?}{=} (1 + \dots + n + (n+1))^2 = ⊛$

$⊛ = \underbrace{(1 + \dots + n)^2}_{} + 2 \cdot (1 + \dots + n) \cdot (n+1) + (n+1)^2$

$\hookrightarrow = \cancel{2} \cdot \frac{n(n+1)}{\cancel{2}} \cdot (n+1) + (n+1)^2 = (n+1)^2 (n+1) = \underline{\underline{(n+1)^3}}$

(4)

④ Binomická věta

$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall a,b \in \mathbb{R}: \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

(1) $n=1$: $L: (a+b)^1 = a+b$

$P: \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} \cdot a^{1-k} \cdot b^k = \binom{1}{0} \cdot a^1 \cdot b^0 + \binom{1}{1} \cdot a^0 \cdot b^1 = a+b$ ✓

$$\boxed{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}}$$

(2) $(a+b)^{n+1} \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k$

$\|$

$(a+b) \cdot (a+b)^n = (a+b) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \right) =$

$= (a+b) \cdot \left(\binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n \right) =$

$= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{1} a^n b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^1 b^n +$

$+ \binom{n}{0} a^n b^1 + \dots + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{n-1} a^1 b^n + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} =$

$= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{1} a^n b^1 + \dots + \binom{n+1}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n+1}{n} a^1 b^n + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1}$ ✓

Pozn: $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$

⑤

8 Dokažte: $\underbrace{(2n)! < 2^{2n}\cdot(n!)^2}$, pro $\forall n\in\mathbb{N}$

(1) L: $2! = 2$
P: $2^2\cdot(1!)^2 = 4$ } ✓

(2) $(2n+2)! \overset{?}{<} 2^{2n+2}\cdot((n+1)!)^2$

$\|$

$(2n+2)(2n+1)\cdot(2n)! < (2n+2)\cdot(2n+1)\cdot 2^{2n}\cdot(n!)^2$

ind. předp.

Stačí ukázat, že

$(2n+2)(2n+1)\cdot 2^{2n}\cdot(n!)^2 \leq 2^{2n+2}\cdot((n+1)!)^2$

ekvival. úpravy $\updownarrow$

$(2n+2)\cdot(2n+1) \leq 2^2\cdot(n+1)^2$

$(2n+2)\cdot(2n+1) \leq (2n+2)^2$

platí pro $\forall n$

Supremum, infimum množiny v $\mathbb{R}$

Př: $M = \langle 0, 1\rangle$

$0 = \min M$

$1 = \max M$

Př: $N = (0, 1)$

0 není min N

1 není max N

(protože $0\notin N$, $1\notin N$)

ale: $0 = \inf N$

$1 = \sup N$

a taky $0 = \inf M = \min M$

$1 = \sup M = \max M$

sup a max se neliší v hodnotě, ale v existenci (stejně: inf a min).

(5) $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

stačí do binom. věty dosadit $a = b = 1$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k \quad \checkmark$$

(7)