Cvičení MAF, 13.10.2020, 9^{00}

Supremum, infimum množiny

Def: 1) číslo x je horní závora množiny M $\equiv$ $\forall m \in M: m \leq x$

2) $\sup M$ je nejmenší horní závora množiny M, tj. $\sup M$ je h. závora $\wedge$ je-li y také h. závora mn. M $\Rightarrow y \geq \sup M$.

Analogicky: $\inf M$.

Pozn: ekvivalentně:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in M: x > \sup M - \varepsilon$$

Pozn: (Věta o supremu):

$\forall$ neprázdná shora omezená podmn. $\mathbb{R}$ má supremum (v $\mathbb{R}$)

Pozor, toto neplatí v $\mathbb{Q}$!

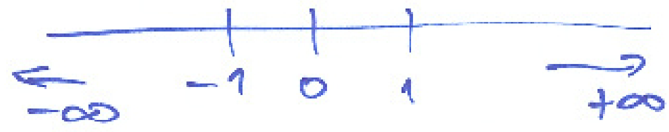
Pozn: $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, shora neomez.

$\Rightarrow$ dodefinujeme: $\sup M = +\infty$

podobně: M zdola neomez. $\Rightarrow \inf M = -\infty$

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

uspořádání $-\infty < a < +\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$



Pozn: $M = \emptyset \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}^*$ je horní závora

protože podmínka $\underbrace{\forall m \in \emptyset}: m \leq a$

se bere jako autom. splněná;

nejm. h. závora je tedy $-\infty$

$\Rightarrow \sup \emptyset = -\infty$

a podobně $\inf \emptyset = +\infty$

Pro $M \neq \emptyset$ je vždy $\inf M \leq \sup M$

a pouze pro $M = \emptyset$ je $\inf M > \sup M$

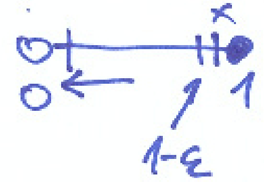
Def: $\max M = x \in M;\ \forall y \in M: y \leq x$

$\min M = x \in M;\ \forall y \in M: y \geq x$

(1a) $M = (0, 1\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < x \leq 1\}$

$\max M = 1$

$\min M$ neexistuje



$\sup M = 1$:

a) 1 je horní závora: ano,
protože $\forall m \in M: m \leq 1$

b) je-li s jiná horní závora M
tj. $s \geq x$ pro $\forall x \in M$
tedy speciálně $s \geq 1$

Pozn: ekvivalentně:
$\forall \varepsilon > 0: \exists x \in M: x > 1 - \varepsilon$

$\inf M = 0$: a) 0 je dolní závora ✓

b) $\forall \varepsilon > 0: \exists x \in M: x < 0 + \varepsilon$

třeba $x = \frac{\varepsilon}{2}$ ✓

Platí:

$\sup M$ ex. vždy, $\max M$ ne, ale pokud ex. $\Rightarrow \max M = \sup M$

$\inf M$ ex. vždy, $\min M$ ne, ——— " ——— $\Rightarrow \min M = \inf M$

„Rozdíl není v hodnotě, ale v existenci."

Stačí ukázat, že $\sup M \in M \Rightarrow$ pak je to $\max M$.

Pozor! $+\infty, -\infty$ nemůže být $\max M$ / $\min M$

($\max M, \min M \underline{\in \mathbb{R}}$)

„$+\infty - \varepsilon = +\infty$"

1c $M = (0, +\infty)$ $\sup M = +\infty$

$+\infty$ je horní závora ✓

jiná horní závora M neexistuje

$\Rightarrow$ 2 podm. autom. splněna

$\inf M = 0$

$\left.\begin{matrix}\max M \\ \min M\end{matrix}\right\}$ neex.

1d $M = \left\{\frac{m}{n};\ m, n \in \mathbb{N}\right\}$

$=$ ∀ kladná rac. čísla

$\sup M = +\infty$ $\left.\begin{matrix}\max M \\ \min M\end{matrix}\right\}$ neex.

$\inf M = 0$

1e $M = \{0{,}5;\ 0{,}55;\ 0{,}555 \ldots\}$

$\inf M = 0{,}5 = \min M$

$\underbrace{\sup M = 0{,}\overline{5} = \frac{5}{9}}$, $\max M$ neex.

1) $0{,}\overline{5}$ je horní závora ✓

2) $\forall x \in M$: $0{,}\overline{5} - x = 0{,}0\ldots0555\ldots > 0$ $\stackrel{\varepsilon >}{=}$

$\times$ sloučí jako číslo mezi $0{,}\overline{5} - \varepsilon$ a $0{,}\overline{5}$

(3)

(1f) $M = \{x \in \mathbb{Q},\ x^2 < 3\}$

$N = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 < 3\}$

$\Updownarrow$

$x < \sqrt{3}$ ... $\sup N = \sqrt{3}$, $\sup M = \sup N$

Chceme ukázat, že $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

– viz přednáška

$N = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

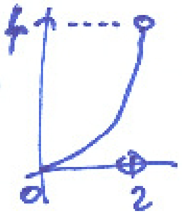
$M = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cap \mathbb{Q}$

(15a) $f, g : M \to \mathbb{R}$ 2 omezené fce ($M \subset \mathbb{R}$)

Def. $\sup\limits_{x \in M} f(x) = \sup\{z;\ z = f(x),\ x \in M\}$

Př: $f(x) = x^2$, $M = \langle 0, 2)$

$\Rightarrow \sup\limits_{x \in M} f(x) = 4$



tj. $\sup\limits_{x \in M} f(x)$ = supremum oboru hodnot

Dokažte:

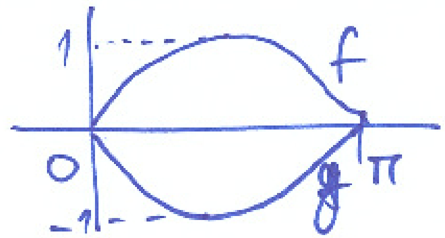
$$\sup_{x \in M}\big(f(x) + g(x)\big) \le \sup_{x \in M} f(x) + \sup_{x \in M} g(x)$$

Musí platit rovnost?

Př: $f(x) = \sin x$

$g(x) = -\sin x$

$M = \langle 0, \pi \rangle$



$\left.\begin{array}{l} \sup\limits_M f(x) = 1 \\ \sup\limits_M g(x) = 0 \end{array}\right\}$ $\sup\limits_M f + \sup\limits_M g = 1$

$f(x) + g(x) = 0$ ... $\sup\limits_M (f+g) = 0$

$0 < 1$

$\Rightarrow$ Rovnost neplatí.

Nerovnost:

víme z def., že $\sup_M (f+g)$ je nejmenší h. závora oboru hodnot fce $f+g$ $\Rightarrow$ stačí ukázat, že $\sup_M f + \sup_M g$ je horní závora

A to platí, protože:

$\forall x \in M: \quad f(x) \leq \sup_M f$

$\qquad\qquad\quad g(x) \leq \sup_M g$

$\Rightarrow \quad f(x)+g(x) \leq \sup_M f + \sup_M g$

a to je ono ✓

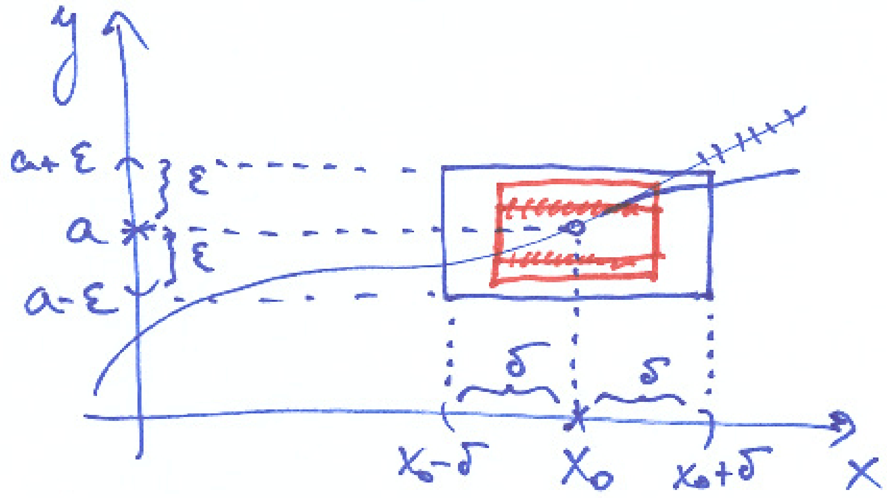
Sami: 13a, 13b, 14

5

Limity funkcí

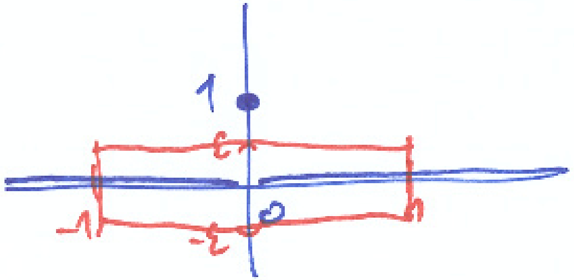
Def: nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, řekneme, že fce f má v bodě x_0 limitu a ($a \in \mathbb{R}$), pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta), x \neq x_0: \quad f(x) \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$



Pozn: f nemusí být v bodě x_0 vůbec definovaná (nebo definovaná „jinak")

Př: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \neq 0 \\ 1 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$



$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, protože

v def. stačí ověřovat pro $x \neq 0$ $(x_0 = 0)$:

zadáno lib. $\varepsilon > 0$, chci najít $\delta > 0$ tak, že $x \in (-\delta, \delta)$, $x \neq 0$

$\Rightarrow f(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$: pro lib. $\varepsilon > 0$

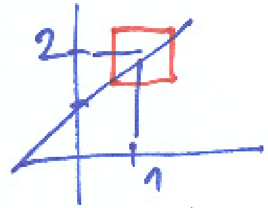
stačí brát $\delta = 1$

Označení: v def. limity píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a .$$

Zjednodušeně $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} a$

Př: $\lim_{x \to 1} x+1 = 2$



Je dáno $\varepsilon > 0$, zvolím $\delta = \varepsilon$:

$x \in (1-\delta, 1+\delta) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

$\Rightarrow f(x) = x+1 \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$ ✓

Př: $\lim_{x \to 1} x^2 = 1$

Je dáno $\varepsilon > 0$, chci najít $\delta > 0$

tak, aby $x \in (1-\delta, 1+\delta) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

./.

$$x^2 \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \quad /\sqrt{}$$

(předp. $\varepsilon < 1$ $\Rightarrow$ vše je v $\mathbb{R}_+$)

$$|x^2 - 1| < \varepsilon$$

$$x \in \left(\sqrt{1-\varepsilon}, \sqrt{1+\varepsilon}\right) \quad /-1$$

$$x - 1 \in \left(\sqrt{1-\varepsilon} - 1, \sqrt{1+\varepsilon} - 1\right) = I$$

a chceme $x - 1 \in (-\delta, \delta) \subset I$

proto volíme ~~[illegible]~~

$$\delta = \min\left(\left|\sqrt{1-\varepsilon} - 1\right|, \left|\sqrt{1+\varepsilon} - 1\right|\right)$$

Cv. 3 1a

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

dáno $\varepsilon > 0$ ... $\left(\frac{x}{2}\right)^3 - \frac{1}{8} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\frac{x^3 - 1}{8} \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad /\cdot 8$$

$$x^3 - 1 \in (-8\varepsilon, 8\varepsilon) \quad /+1$$

$$x^3 \in (1 - 8\varepsilon, 1 + 8\varepsilon) \quad /\sqrt[3]{}$$

$$x \in \left(\sqrt{1-8\varepsilon}, \sqrt{1+8\varepsilon}\right)$$

$$\Rightarrow \delta = \min\left(\left|\sqrt{1-8\varepsilon} - 1\right|, \left|\sqrt{1+8\varepsilon} - 1\right|\right)$$

Def: jednostranné limity

limita zprava: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

$$\lim_{x \to x_0+} f(x)$$

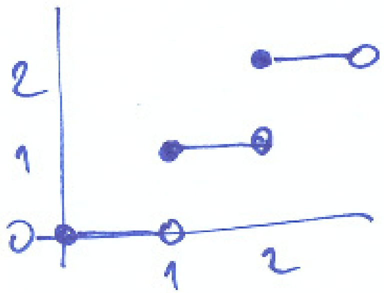
limita zleva: — " — $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ — " —

$$\lim_{x \to x_0-} f(x)$$

1b, 1c: $f(x) = [x]$ = celá část čísla x

./.

$f(x) = [x] = $ celá část x



1b $\lim\limits_{x \to 1+} [x] = 1$

1c $\lim\limits_{x \to 1-} [x] = 0$

Sami: $\varepsilon \to \delta$