Cvičení MAF, 13.10.2020, 12:20

Def: supremum množiny M

1) číslo x je horní závora množiny M

$$\equiv \forall m \in M: \ m \leq x$$

2) $\sup M$ je nejmenší horní závora množiny M tj. $\sup M$ je h. závora

$\wedge$ $\forall$ je-li y horní závora mn. M pak $y \geq \sup M$.

Analogicky: $\inf M$. (infimum)

Pozn: ekvivalentně: $x = \sup M \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in M: \ y > x - \varepsilon$$

Pozn: (Věta o supremu):

$\forall$ neprázdná shora omezená podmn. $\mathbb{R}$ má supremum (v $\mathbb{R}$)

Pozor, toto neplatí v $\mathbb{Q}$!

Pozn: $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, shora neomez.

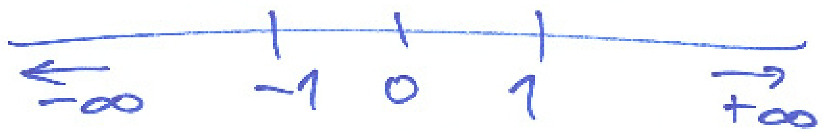
$\Rightarrow$ dodefinujeme $\sup M = +\infty$

podobně: $M \neq 0$, zdola neomez.

... $\inf M = -\infty$

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

uspořádání: $-\infty < a < +\infty$ pro $\forall a \in \mathbb{R}$



Pozn: $M = \emptyset \Rightarrow \sup \emptyset = -\infty$

$-\infty$ je horní závora, protože podmínka $\underbrace{\forall m \in \emptyset}$: $m \leq a$ $\forall a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

se bere jako autom. splněná

$\Rightarrow$ nejmenší h. závora je tudíž $-\infty$

$\Rightarrow \sup \emptyset = -\infty$

$\inf \emptyset = +\infty$

Pro $M \neq \emptyset$ je vždy $\inf M \leq \sup M$

pouze pro $M = \emptyset$ je $\inf M > \sup M$

Def: $\max M = m \in M$, $\forall y \in M : y \leq m$

$\min M = m \in M$, $\forall y \in M : y \geq m$

$\max M$ a $\sup M$ se neliší hodnotou, ale jen existencí, tj. $\sup M = \max M$, pokud $\max M$ existuje

$\Leftrightarrow \sup M \in M$.

Pozn: M neomez. (shora) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sup M = +\infty$

tedy M nemá $\max M$

12a $M = (0, 1\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < x \leq 1\}$

$\max M = 1$: $1 \in M$, $\forall x \in M : x \leq 1$

$\min M$ neex. – důkaz sporem:

?? $\exists \varepsilon \in M$, $\varepsilon = \min M$

pak $\frac{\varepsilon}{2} \in M$ a $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon$ není min $\lightning$

./.

$M = (0, 1\rangle$

$\sup M = \max M = 1$

$\inf M = 0$, protože:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in M : x \in (0, \varepsilon)$

stačí vzít $x = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$ 0 je $\inf M$

Pozn: ekvival. podmínka s ε zde nefunguje $(+\infty - \varepsilon = +\infty)$

$\inf M = 0$, $\left.\begin{matrix}\max M \\ \min M\end{matrix}\right\}$ neex.

(12c) $M = (0, +\infty) = \mathbb{R}_+$

$\sup M = +\infty$

z definice: $+\infty$ je horní závora

protože $\forall x \in M: x < +\infty$

a je to nejmenší h. závora

protože pokud y je h. závora

$\Rightarrow \forall x \in M: x \leq y \Rightarrow y \notin \mathbb{R}, y = +\infty$

$\Rightarrow +\infty$ je jediná h. závora

(12d) $M = \left\{ \frac{m}{n};\ m, n \in \mathbb{N} \right\}$

... kladná rac. čísla

$\min M$ neex. $\quad \inf M = 0$

$\max M$ neex. $\quad \sup M = +\infty$

$M = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$

./.

(12e) $M = \{0{,}5;\ 0{,}55;\ 0{,}555 \dots\}$

$\min M = 0{,}5 = \inf M$

$s = \sup M = 0{,}\bar{5} = \frac{5}{9}$

↳ je to horní závora ✓

↳ pro $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in M$:

$$x > 0{,}\bar{5} - \varepsilon$$

př: $\varepsilon = \frac{1}{100}$ ... $x = 0{,}555$

$s = 0{,}55555\dots$

$s - x = 0{,}000555\dots < \frac{1}{100}$

$\frac{1}{10^{k-1}} > \varepsilon \geq \frac{1}{10^k} \Rightarrow$ volme $x = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \dots + \frac{5}{10^{k+1}}$

$\max M$ neex.

(12f) $M = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 < 3\}$

$\sup M = \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ – viz předn.

V $\mathbb{Q}$ neplatí věta o supremu.

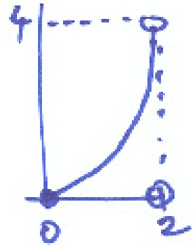
Def: $f: M \to \mathbb{R}$ fce,

$$\sup_{x \in M} f(x) := \sup\{z;\ z = f(x),\ x \in M\}$$

(= sup oboru hodnot fce f vztaženého k $D_f = M$)

Př: $f(x) = x^2$, $M = \langle 0, 2)$

$\Rightarrow \sup_{\langle 0,2)} f(x) = 4$



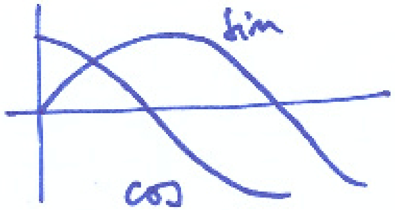
(15a) $f, g: M \to \mathbb{R}$, dokažte:

$$\sup_{x \in M} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in M} f(x) + \sup_{x \in M} g(x)$$

Musí platit rovnost?

Př: $f(x) = \sin x$

$g(x) = \cos x$



$$\sup_{\langle 0,\pi\rangle} \sin x = 1 \quad (v\ \tfrac{\pi}{2})$$

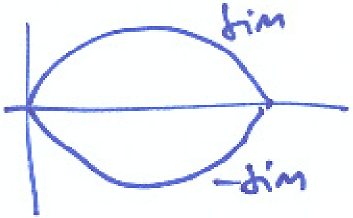
$$\sup_{\langle 0,\pi\rangle} \cos x = 1 \quad (v\ 0)$$

$$\sup (\sin x + \cos x) = \sqrt{2} < 1+1$$
$$(v\ \tfrac{\pi}{4})$$

$\Rightarrow$ Rovnost platit nemusí.

Př: $f(x) = \sin x$

$g(x) = -\sin x$



$$\sup_{\langle 0,\pi\rangle} \sin x = 1 \quad (v\ \tfrac{\pi}{2})$$

$$\sup_{\langle 0,\pi\rangle} -\sin x = 0 \quad (v\ 0,\ v\ \pi)$$

$$\sup (f(x)+g(x)) = \sup 0 = 0 < 1+0$$

Důkaz nerovnosti:

$$\sup_M (f(x)+g(x)) \leq \sup_M f(x) + \sup_M g(x)$$

Stačí ukázat, že $\underbrace{\qquad\qquad}$ je horní závora k oboru hodnot fce $f(x)+g(x)$:

$$\forall x \in M: \quad f(x) \leq \sup_M f$$
$$g(x) \leq \sup_M g$$
$$\Rightarrow \quad f(x)+g(x) \leq \sup_M f + \sup_M g \quad \checkmark$$

Sami: 13a, 13b, 14

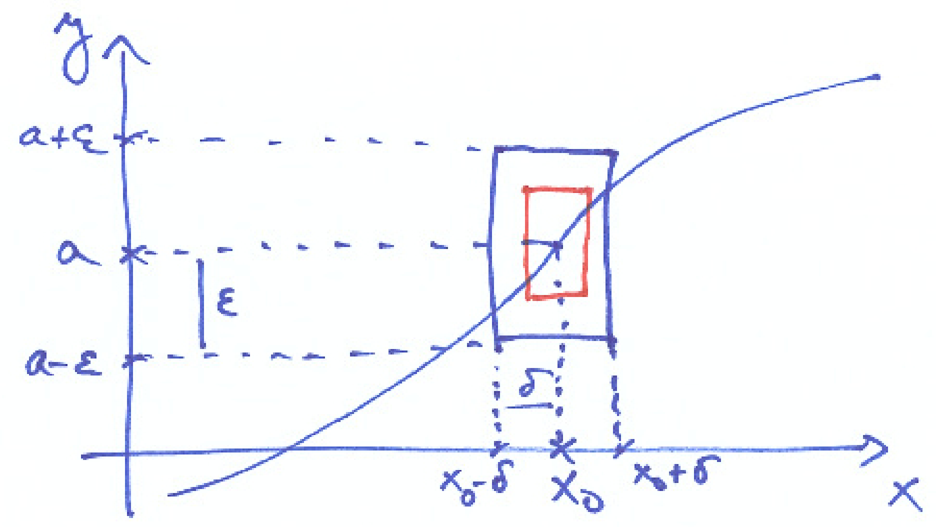
Limita fce

Def: nechť $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$,
řekneme, že fce f má v bodě x_0 limitu a ($a\in\mathbb{R}$), pokud

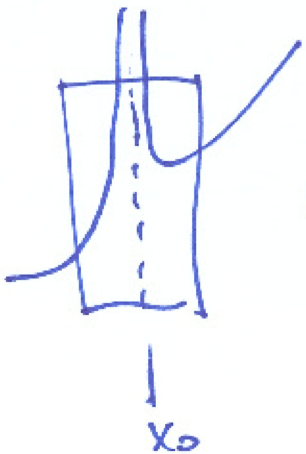
$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta),\ x\neq x_0:\ f(x)\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$$

ozn: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$

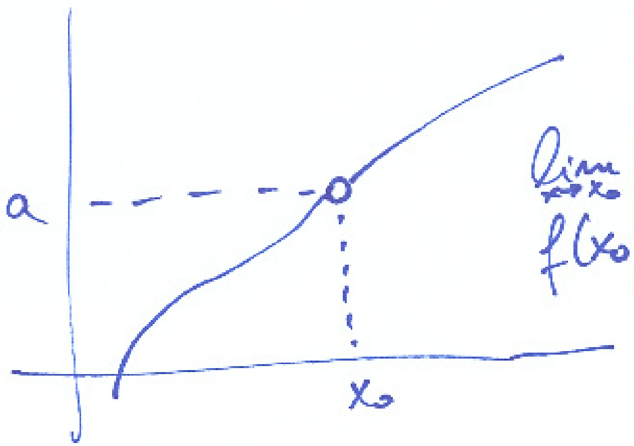
(stručněji $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} a$)



Pozn: fce f nemusí být vůbec v bodě x_0 definovaná (nebo definovaná „jinak")

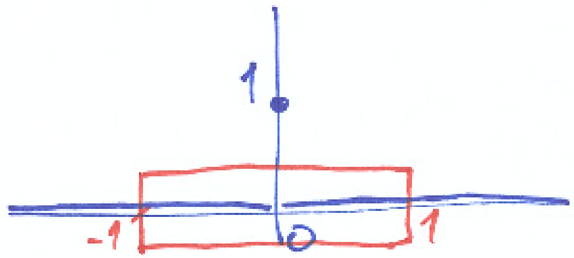


nejde



$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$
$f(x_0)$ není def.

Př: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \neq 0 \\ 1 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$



$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, protože

$x_0 = 0$ a v definici stačí ověřovat

podmínku pro $x \neq 0$:

zadáno $\varepsilon > 0$, chci najít $\delta > 0$

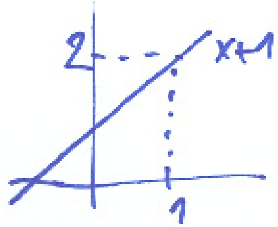
tak, že $x \in (-\delta, \delta)$, $x \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$:

stačí brát $\delta = 1$ (nezávisle na ε!)

✓

Př: $\lim\limits_{x \to 1} (x+1) = 2$



Je-li dáno $\varepsilon > 0$, zvolíme $\delta = \varepsilon$

$x \in (1-\delta, 1+\delta) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = x+1 \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$ ✓

Př: $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$

Je-li dáno $\varepsilon > 0$, chci najít $\delta > 0$

tak, aby $x \in (1-\delta, 1+\delta) \Rightarrow x^2 \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

$x^2 \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ $/\sqrt{}$ ($\varepsilon < 1 \Rightarrow x > 0$)

$x \in (\sqrt{1-\varepsilon}, \sqrt{1+\varepsilon})$ $/-1$

$x - 1 \in (\sqrt{1-\varepsilon} - 1, \sqrt{1+\varepsilon} - 1) = I$

stačí volit $\delta = \min(|\sqrt{1-\varepsilon} - 1|, |\sqrt{1+\varepsilon} - 1|)$

Potom $x \in (1-\delta, 1+\delta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 1 \in (-\delta, \delta) \subset I$

Cv. 3. Př 1a

Dokažte z definice:

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Dáno $\varepsilon>0$ ... $\left(\frac{x}{2}\right)^3 - \frac{1}{8} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\frac{x^3-1}{8} \in (-\varepsilon,\varepsilon) \quad /\cdot 8$$

$$x^3-1 \in (-8\varepsilon, 8\varepsilon) \quad /+1$$

$$x^3 \in (1-8\varepsilon, 1+8\varepsilon) \quad /\sqrt[3]{\ }$$

$$x \in \left(\sqrt[3]{1-8\varepsilon}, \sqrt[3]{1+8\varepsilon}\right)$$

volím $\delta = \min\left(\left|\sqrt[3]{1-8\varepsilon}-1\right|, \left|\sqrt[3]{1+8\varepsilon}-1\right|\right)$

$\Rightarrow$ pak $x \in (1-\delta, 1+\delta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^3 \in \left(\frac{1}{8}-\varepsilon, \frac{1}{8}+\varepsilon\right)$

Def: jednostranné limity:

limita zprava: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x \in (x_0, x_0+\delta):$

$\Rightarrow f(x) \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

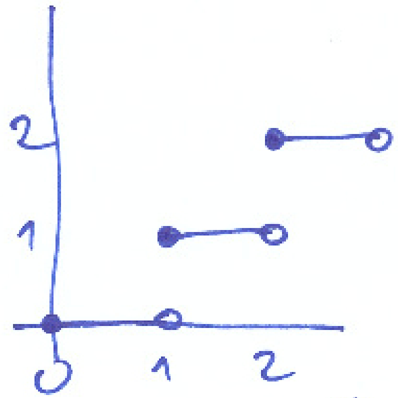
$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = a$$

limita zleva: —"— $x \in (x_0-\delta, x_0)$

—"—

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = a$$

1b, 1c: $f(x) = [x]$ = celá část čísla x



$$\lim_{x\to 1+} [x] = 1$$

$$\lim_{x\to 1-} [x] = 0$$

Sami: pomocí ε, δ