MAF – Cvičení 24.11., 9^{00}

Minule: $\int f(x)\,dx$

• per partes: $\int f'g = fg - \int fg'$

z minula: Př. 8, 16, 22 (z Cv. 6)

(22) Najít rekurentní vztah pro

$$I_n = \int \cos^n x \, dx$$

? $f = \cos^n x$ $\quad f' = n\cdot\cos^{n-1}x\cdot(-\sin x)$

$g' = 1$ $\quad g = x$

$$\Rightarrow I_n = x\cdot\cos^n x + \int n\cdot x\cdot\cos^{n-1}x\cdot\sin x\,dx$$

takhle ne

Lépe: $I_n = \int \cos x\cdot\cos^{n-1}x\,dx$

$f = \cos^{n-1}x$ $\quad f' = (n-1)\cdot\cos^{n-2}x\cdot(-\sin x)$

$g' = \cos x$ $\quad g = \sin x$

$$\Rightarrow I_n = \cos^{n-1}x\cdot\sin x + \underbrace{\int (n-1)\cdot\cos^{n-2}x\cdot\sin^2 x\,dx}_{(*)}$$

$$(*) = (n-1)\int \cos^{n-2}x\cdot(1-\cos^2 x)\,dx =$$

$$= (n-1)\Big[\underbrace{\int \cos^{n-2}x\,dx}_{I_{n-2}} - \underbrace{\int \cos^n x\,dx}_{I_n}\Big]$$

$$\Rightarrow I_n = \cos^{n-1}x\cdot\sin x + (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

$\Rightarrow$ odsud už $I_n = \ldots$

(14) $$\int \ln x \, dx = \begin{bmatrix} f = \ln x & f' = \frac{1}{x} \\ g' = 1 & g = x \end{bmatrix} =$$

$$= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x = \underline{\underline{x(\ln x - 1)}} \; (+c)$$

(16) $$\int x \cdot \operatorname{arctg}(x+1) \, dx = \begin{bmatrix} f = \operatorname{arctg}(x+1) & f' = \frac{1}{(x+1)^2+1} \\ g' = x & g = \frac{1}{2}x^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg}(x+1) - \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{x^2}{(x+1)^2+1} \, dx}_{\circledast} = \left[\circledast = \int \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+2} \, dx - \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} \, dx \right] =$$

$$= \underbrace{\int 1 \, dx}_{= x} - \ln(x^2+2x+2) \Big] = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg}(x+1) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)}}$$

subst. „$y = x^2+2x+2$" $= \varphi(x)$

$\varphi'(x) = 2x+2$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \, dx$$

1. substituce:

pokud $\int f(y)\,dy = F(y)$, pak $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) \overset{dx}{=} F(\varphi(x))$

2. substituce:

pokud $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) \overset{dt}{=} G(t)$, pak $\int f(x)\,dx = G(\varphi^{-1}(x))$, pokud $\varphi' \neq 0$ všude

Př: $\int \underbrace{\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)}_{\text{fce v „sinech"}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivace sinu}}}{\cos x}\,dx = \left[\begin{array}{l} y = \sin x = \varphi(x) \\ dy = \cos x\,dx \\ \Updownarrow\ \varphi'(x) = \cos x \end{array} : \int\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right)dy = \frac{y^3}{3} - \frac{1}{y}\right] =$

$= \dfrac{\sin^3 x}{3} - \dfrac{1}{\sin x}$

Cv. 6: Př 6, 7, 9, 10

⑦ $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \left[\begin{array}{l} y = e^x \\ dy = e^x\,dx \end{array} : \int \frac{dy}{y^2+1} = \operatorname{arctg} y\right] =$

$= \operatorname{arctg} e^x$

(9) $I = \int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{ll} f=\ln^2 x & f'=2\ln x\cdot\frac{1}{x} \\ g'=\frac{1}{x} & g=\ln x \end{array}\right] = \ln^3 x - 2\underbrace{\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx}_{I}$

$I = \ln^3 x - 2I$

$\underline{\underline{I = \frac{\ln^3 x}{3}}}$

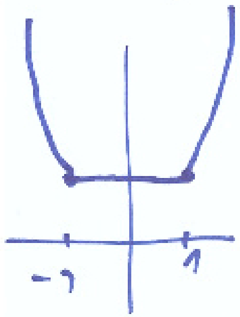
$\left[\begin{array}{l} \text{subst.:} \\ y=\ln x \\ dy=\frac{1}{x}dx \end{array} : \int y^2\,dy = \frac{y^3}{3}\right] \Rightarrow \underline{\underline{I = \frac{\ln^3 x}{3}}}$

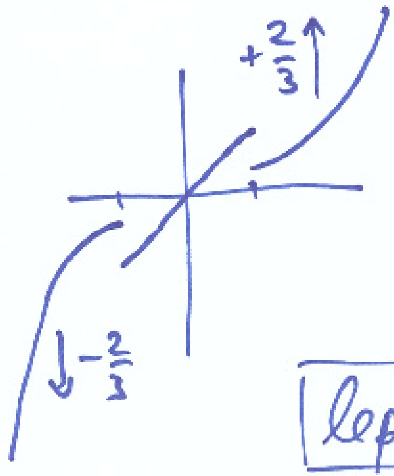
(10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot(\arcsin x)^2} = \left[\begin{array}{l} y=\arcsin x \\ dy=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} : \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}\right] = \underline{\underline{\frac{-1}{\arcsin x}}}$

Sami: Vpř. 6–22 z Cv. 6
doma
→ elementární postupy + úpravy (11, 12, 13)
→ PP
→ 1. subst.

⑤ $\displaystyle\int \max\{1, x^2\}\, dx$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{v } (-\infty,-1) \\ 1 & \text{v } (-1,1) \\ x^2 & \text{v } (1,+\infty) \end{cases} \xrightarrow{\int} \begin{cases} \frac{x^3}{3} + c \\ x \\ \frac{x^3}{3} + d \end{cases}$$





$c = -\frac{2}{3}$

$d = \frac{2}{3}$

$\boxed{\text{lepení}}$

Integrace racionálních fcí

aneb Rozklad na parciální zlomky

Integrujeme rac. fci $\frac{p(x)}{q(x)}$ (p, q = polynomy)

① pokud stupeň $p \geq$ stupeň q, částečně vydělíme → získáme
polynom + $\frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$, kde stupeň $\tilde{p}$ < stupeň q

② předp. st. p < st. q, p, q normované ($\Leftrightarrow$ ved. koef. $= 1$), pak
q rozložíme na součin $(x-a_i)^{k_i}$, $\underbrace{(x^2+b_j x+c_j)^{l_j}}_{\text{nerozlož.}}$

③ Pak lze vždy psát:

a) pokud $\forall k_i = 1$, $\forall l_j = 1$:

$$\frac{p(x)}{(x-a_1)\dots(x-a_m)\cdot(x^2+b_1x+c_1)\cdot\dots\cdot(x^2+b_nx+c_n)} =$$

$$= \frac{A_1}{x-a_1} + \dots + \frac{A_m}{x-a_m} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1} + \dots + \frac{B_nx+C_n}{x^2+b_nx+c_n}$$

pro nějaká čísla $A_i, B_j, C_j \in \mathbb{R}$

b) pro členy s vyšší mocninou:

$$(x-a_1)^{k_1} \Rightarrow \frac{A_1^1}{(x-a_1)} + \frac{A_1^2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_1^{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}$$

$$(x^2+b_1x+c_1)^{l_1} \Rightarrow \frac{B_1^1x+C_1^1}{(\quad)^1} + \frac{B_1^2x+C_1^2}{(\quad)^2} + \dots + \frac{B_1^{l_1}x+C_1^{l_1}}{(\quad)^{l_1}}$$

./.

(4) Přitom tato čísla A_i, B_j, C_j lze najít 2 způsoby:

a) ~~...~~ univerzální způsob: výraz vpravo převedu na spol. jmenov., čitatele roznásobím a porovnám koeficienty ~~...~~ s $p(x)$ → soustava rovnic

Př: $\dfrac{x+3}{x^2-3x+2} = \dfrac{x+3}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} = \dfrac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$

čitatel $(A+B)x - 2A - B = x+3$

porovnám koef.:
$$x:\quad A+B = 1$$
$$1:\quad -2A-B = 3$$

řešení: $A=-4$, $B=5$ $\Rightarrow \dfrac{-4}{x-1} + \dfrac{5}{x-2}$

b) zakrývací metoda: ~~...~~ pro výpočet A zakryji $(x-1)$ v pův. zlomku a do zbytku dosadím kořen 1: $A = \dfrac{1+3}{1-2} = \dfrac{4}{-1} = \underline{\underline{-4}}$

$$B = \frac{2+3}{2-1} = \frac{5}{1} = \underline{\underline{5}}$$

hodí se jen pro lin. členy v 1. mocnině

7) Někdy je vhodné obě metody kombinovat

(5) integrace vzniklých členů:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a|$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}$$

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}\,dx = \int \frac{B}{2}\cdot\frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx + \underbrace{\int \frac{C-\frac{Bb}{2}}{x^2+bx+c}\,dx}_{\text{viz dále}}$$

$$= \frac{B}{2}\ln(x^2+bx+c)$$

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^l}\,dx$$ – složitější; rekurentně

---

typ $\int \frac{dx}{x^2+bx+c}$ s nerozlož. jmenov.: doplnění na čtverec a převod na arctg

Př: víme $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x$

ale co $$\int \frac{dx}{x^2+2} = \int \frac{\sqrt{2}\cdot dx\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)} = \left[\begin{matrix} y = \frac{x}{\sqrt{2}} \\ dy = \frac{dx}{\sqrt{2}} \end{matrix} : \int \frac{dy}{\sqrt{2}\,(y^2+1)} = \frac{\operatorname{arctg} y}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}$$

Př ④ z Cv.6:

$$\int \frac{dx}{x^2-x+2} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} = \int \frac{dx}{\frac{7}{4}\left(\left(\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right)} = \int \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\overbrace{\frac{2}{\sqrt{7}}dx}^{dy}}{\frac{7}{4}\left(\underbrace{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)}_{y=}^2+1\right)}$$

$$\left[\begin{array}{l} y=\frac{2x-1}{\sqrt{7}} \\ dy=\frac{2}{\sqrt{7}}dx \end{array} : \frac{2}{\sqrt{7}}\int\frac{dy}{y^2+1} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg} y\right] = \underline{\underline{\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)}}$$

Př: $\boxed{\int\frac{4x^2}{x^4-1}\,dx}$

$$\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{4x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$A=1$, $B=-1$, $C=0$, $D=2$

Pro A, B: zakrývací
C, D: soustava (2×2)

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{x-1} - \int\frac{dx}{x+1} + \int\frac{2}{x^2+1}dx =$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x+1| + 2\operatorname{arctg} x$$

$$= \underline{\underline{\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 2\operatorname{arctg} x}}$$