MAF - Cvičení, 24.11., 12:20

Minule: $\int f(x)\,dx$

- per partes: $\int f'g = fg - \int fg'$

Z minula: 8, 16, 22 (z Cv.6)

(8) $I = \int e^{3x}\cos 2x\,dx = \begin{bmatrix} f' = e^{3x} & f = \frac{1}{3}e^{3x} \\ g = \cos 2x & g' = -2\sin 2x \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x + \frac{2}{3}\int e^{3x}\sin 2x\,dx =$

$= \begin{bmatrix} f' = e^{3x} & f = \frac{1}{3}e^{3x} \\ g = \sin 2x & g' = 2\cos 2x \end{bmatrix} =$

$= \frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\sin 2x - \frac{2}{3}\underbrace{\int e^{3x}\cos 2x\,dx}_{I}\right)$

$\Rightarrow I = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x + \frac{2}{9}e^{3x}\sin 2x - \frac{4}{9}I$

$I = \frac{1}{13}e^{3x}(3\cos 2x + 6\sin 2x)$

(22) Najít rekurentní vztah pro

$$I_n = \int \cos^n x \, dx = \int \cos x \cdot \cos^{n-1} x \, dx = \begin{bmatrix} f = \cos^{n-1} x & f' = (n-1) \cdot \cos^{n-2} x \cdot (-\sin x) \\ g' = \cos x & g = \sin x \end{bmatrix} =$$

$$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx = \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) \cdot \int \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) \, dx =$$

$$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) \Big(\underbrace{\int \cos^{n-2} x}_{I_{n-2}} - \underbrace{\int \cos^n x \, dx}_{I_n} \Big)$$

$I_n = \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)(I_{n-2} - I_n) \Rightarrow$ vyjádříme $I_n = \ldots$

(16) $$\int x \operatorname{arctg}(x+1) \, dx = \begin{bmatrix} f = \operatorname{arctg}(x+1) & f' = \frac{1}{(x+1)^2+1} \\ g' = x & g = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg}(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{(x+1)^2+1} dx$$

$$\left[\int \frac{x^2}{x^2+2x+2} dx = \int \underbrace{\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+2}}_{1} dx - \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx = x - \ln(x^2+2x+2) \right] =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(x+1) - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2)$$

(14) $\int \ln x\,dx = \begin{bmatrix} f=\ln x & f'=\frac{1}{x} \\ g'=1 & g=x \end{bmatrix} = x\cdot\ln x - \int \underbrace{\frac{1}{x}\cdot x}_{1}\,dx = x\ln x - x = \underline{\underline{x(\ln x-1)}}$

---

1. substituce

pokud $\int f(y)\,dy = F(y)$, pak $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x))$

2. substituce

pokud $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = G(t)$, pak $\int f(x)\,dx = G(\varphi^{-1}(x))$, pokud $\varphi' \neq 0$ všude

---

Př: $\int \underbrace{\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)}_{\text{„fce v sinech"}}\cdot\cos x\,dx = \left[\begin{array}{l} y=\varphi(x)=\sin x \\ \quad\varphi'(x)=\cos x \\ dy=\cos x\,dx \end{array} : \int\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)dy = \underbrace{\frac{y^3}{3}-\frac{1}{y}}_{F(y)}\right] =$

↑ derivace sinu

$= \underline{\underline{\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{1}{\sin x}}} = F(\varphi(x))$

Cv. 6 : Př: 6, 7, 9, 10

⑥ $\int x e^{-x^2} dx = \left[\begin{array}{l} y = -x^2 \\ dy = -2x\,dx \\ \frac{dy}{dx} = -2x \end{array}\right] = -\frac{1}{2}\int -2x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2}\int e^y = -\frac{e^y}{2}\right] = -\frac{e^{-x^2}}{2}$

⑦ $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \left[\begin{array}{l} y = e^x \\ dy = e^x dx \end{array} : \int \frac{dy}{y^2+1} = \operatorname{arctg} y\right] = \operatorname{arctg} e^x$

⑨ $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{l} y = \ln x \\ dy = \frac{1}{x} dx \end{array} : \int y^2 dy = \frac{y^3}{3}\right] = \frac{\ln^3 x}{3} + c$ (lze i PP)

⑩ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot(\arcsin x)^2} = \left[\begin{array}{l} y = \arcsin x \\ dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} : \int \frac{dy}{y^2} = \frac{-1}{y}\right] = \frac{-1}{\arcsin x}$

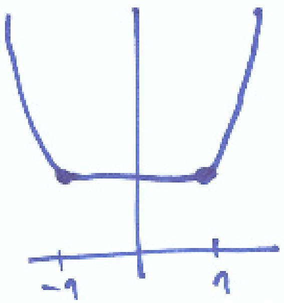
Sami doma: $\forall$ př. 6–22 z Cv. 6

→ elementární postupy + úpravy (11, 12, 13)

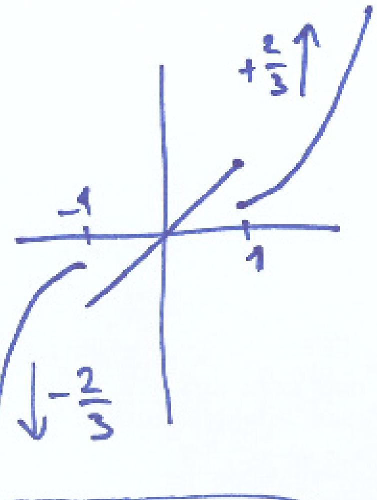
→ PP

→ 1. subst.

⑤ $\displaystyle\int \underbrace{\max\{1, x^2\}}_{f(x)}\, dx$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{na } (-\infty, -1) \\ 1 & \text{na } (-1, 1) \\ x^2 & \text{na } (1, +\infty) \end{cases} \xrightarrow{\int} \begin{cases} \frac{x^3}{3} + c \\ x \\ \frac{x^3}{3} + d \end{cases}$$



$d = \frac{2}{3}$

$c = -\frac{2}{3}$

$\boxed{\text{lepení}}$

Integrace racionálních fcí aneb Rozklad na parciální zlomky

Integrujeme fci $\frac{p(x)}{q(x)}$, p, q = polynomy

① pokud stupeň $p \geq$ stupeň q, částečně vydělíme $\rightarrow$ získáme polynom $+ \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$, kde stupeň $\tilde{p} <$ stupeň q

② předp. st. $p <$ st. q, p, q normované ($\Leftrightarrow$ ved. koef. $= 1$), pak q rozložíme na součin $(x - a_i)^{k_i} \cdot \underbrace{(x^2 + b_j x + c_j)^{l_j}}_{\text{nerozlož.}}$

./.

③ Pak lze vždy psát:

a) pokud $\forall k_i = 1,\ \forall l_j = 1$:

$$\frac{p(x)}{(x-a_1)\dots(x-a_m)\cdot(x^2+b_1x+c_1)\dots(x^2+b_nx+c_n)} =$$

$$= \frac{A_1}{x-a_1} + \dots + \frac{A_m}{x-a_m} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1} + \dots + \frac{B_nx+C_n}{x^2+b_nx+c_n}$$

pro nějaká čísla $A_i, B_j, C_j \in \mathbb{R}$

b) pro členy s vyšší mocninou:

(horní index)

$$(x-a_1)^{k_1} \Rightarrow \frac{A_1^1}{(x-a_1)} + \frac{A_1^2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_1^{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}$$

$$(x^2+b_1x+c_1)^{l_1} \Rightarrow \frac{B_1^1x+C_1^1}{(\quad)^1} + \frac{B_1^2x+C_1^2}{(\quad)^2} + \dots + \frac{B_1^{l_1}x+C_1^{l_1}}{(\quad)^{l_1}}$$

./.

(4) Přitom tato čísla A_i, B_j, C_j lze určit 2 způsoby:

a) univerzální způsob: výraz vpravo převedu na spol. jmenov., čitatele roznásobím a porovnám koeficienty s $p(x) \rightarrow$ soustava rovnic

Př: $\dfrac{x+3}{x^2-3x+2} = \dfrac{x+3}{(x-1)\cdot(x-2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} = \dfrac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$

čitatel $(A+B)x - 2A - B = x+3$

porovnám koeficienty:
$x: \quad A+B = 1$
$1: \quad -2A-B = 3$

řešení $A=-4$, $B=5$ $\Rightarrow \dfrac{-4}{x-1} + \dfrac{5}{x-2}$

b) ~~zakryje~~ zakrývací metoda: pro výpočet A zakryju $(x-1)$ v původ. zlomku a do zbytku dosadím kořen 1: $A = \dfrac{1+3}{1-2} = \dfrac{4}{-1} = \underline{\underline{-4}}$

$B = \dfrac{2+3}{2-1} = \dfrac{5}{1} = \underline{\underline{5}}$

hodí jen pro lin. členy v 1. mocnině.

Někdy je vhodné obě metody kombinovat.

⑤ integrace vzniklých členů:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a|$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{1}{1-k}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}}$$

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}\,dx = \int \frac{B}{2}\cdot\frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx + \underbrace{\int \frac{C-\frac{Bb}{2}}{x^2+bx+c}\,dx}_{\text{viz dále}}$$

$$= \frac{B}{2}\ln(x^2+bx+c)$$

$\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^\ell}\,dx$ – složitější, rekurentně

---

typ $\int \frac{dx}{x^2+bx+c}$ s nerozlož. jmenovatelem: doplnění na čtverec a převod na arctg

Př: víme $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x$

ale co $\int \frac{dx}{x^2+2} = \int \frac{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx}{2\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)} = \left[\begin{array}{l} y=\frac{x}{\sqrt{2}} \\ dy=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} : \int \frac{dy}{\sqrt{2}(y^2+1)} = \frac{\operatorname{arctg} y}{\sqrt{2}}\right] =$

$$= \underline{\underline{\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}}}$$

Př. ④ z Cv. 6:

$$\int \frac{dx}{x^2-x+2} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} = \int \frac{dx}{\frac{7}{4}\left(\left(\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right)} = \int \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot \overbrace{\frac{2}{\sqrt{7}}dx}^{=dy}}{\frac{7}{4}\left(\underbrace{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)}_{y=}^2+1\right)}$$

$$= \left[\begin{array}{l} y=\frac{2x-1}{\sqrt{7}} \\ dy=\frac{2}{\sqrt{7}}dx \end{array} : \frac{2}{\sqrt{7}}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg} y\right] = \underline{\underline{\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)}}$$

Př.: $\int \frac{4x^2}{x^4-1}dx$: $\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{4x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$

$A=1,\ B=-1,\ C=0,\ D=2$

Pro A, B: zakrývací

C, D: soustavou (2x2)

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{2}{x^2+1}dx =$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x+1| + 2\operatorname{arctg} x =$$

$$= \underline{\underline{\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 2\operatorname{arctg} x}}$$