

Příklady k procvičení

A. Limity

Spočtěte zadanou limitu elementárně, tj. bez použití l'Hospitalova pravidla a Taylorových polynomů.

$$\text{A1. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + x^3)}{\ln(e^{3x} + x^6)}$$

$$\text{A2. } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^a (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$$

$$\text{A3. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[4]{\cos x}}{\sin x \arcsin x}$$

$$\text{A4. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x - \cos 2x}{1 - \cotg x}$$

$$\text{A5. } \lim_{x \rightarrow \pi \pm} \left(\frac{x}{\pi} \right)^{\frac{1}{(\cos x + 1)}}$$

$$\text{A6. } \lim_{x \rightarrow 0+} (1 + \operatorname{tg} \sqrt{x})^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

B. Primitivní funkce

Spočtěte primitivní funkci na maximálním možném intervalu, tento interval vždy určete.

$$\text{B1. } \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$\text{B2. } \int \frac{32x^5}{(2x-1)^3} dx$$

$$\text{B3. } \int 3\sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$$

$$\text{B4. } \int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 1} dx$$

$$\text{B5. } \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} dx$$

$$\text{B6. } \int \frac{1}{\cos^2 x (4 \sin^2 x - 1)} dx$$

$$\text{B7. } \int \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 3} dx$$

$$\text{B8. } \int |\sin x| dx, \text{ lichá prim. fce}$$

C. Průběh funkce

V těchto příkladech proveďte vyšetření průběhu funkce, tj. určete:

- (i) definiční obor
- (ii) obor spojitosti
- (iii) limity v krajních bodech D_f a v bodech nespojitosti
- (iv) speciální vlastnosti (sudost/lichost, periodičita apod.)

- (v) průsečíky s osami, případné další význačné body
- (vi) první derivace, intervaly monotonie, extrémy, obor hodnot, jednostranné derivace, příp. limity derivací v problematických bodech
- (vii) druhá derivace, konvexita/konkavita, inflexní body (pouze u příkladů označených (*))
- (viii) asymptoty
- (ix) graf

$$\text{C1.}^* \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 3}$$

$$\text{C3.}^* \sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}$$

$$\text{C5.} \ 8 \exp\left(-\left|\frac{x}{x-2}\right|\right)$$

$$\text{C7.} \ \sin 2x + 2|\cos x|$$

$$\text{C9.}^* \ \ln |\ln x|$$

$$\text{C11.}^* \ \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}$$

$$\text{C13.}^* \ \operatorname{arccotg} \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$\text{C2.}^* \ |x| - |x^2 - 1|$$

$$\text{C4.}^* \ x^2 - 4\sqrt[3]{x^2}$$

$$\text{C6.} \ \sin x + \cos^2 x$$

$$\text{C8.}^* \ x^x$$

$$\text{C10.} \ \ln(1 + |x - x^2|)$$

$$\text{C12.}^* \ x \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}$$

$$\text{C14.} \ \arccos(1 - x^2)^2$$

D. Taylorovy polynomy, l'Hospitalovo pravidlo

Spočítejte zadanou limitu pomocí Taylorových polynomů nebo pomocí l'Hospitalova pravidla, případně kombinací obou; porovnejte si, co je snazší.

$$\text{D1.} \ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \exp(-\frac{x^2}{2})}{x^4}$$

$$\text{D3.} \ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{(1 - \cos \sqrt{x})^2}$$

$$\text{D5.} \ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \cos x} - \sqrt{1 - x \cos x}}{\ln(1 - x)}$$

$$\text{D7.} \ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x - 4x^2 + x^3)e^x - \sqrt{1 + 4x - x^2}}{1 - \sqrt{1 + x^3}}$$

$$\text{D2.} \ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^n}$$

$$\text{D4.} \ \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1 - \exp(-x^2)}}$$

$$\text{D6.} \ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cosh x^2 - 1) \ln(\cos x)}{\sin^3 x \operatorname{tg}^3 x}$$

$$\text{D8.} \ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Řešení. A1. $\frac{1}{3}$. **A2.** 0 pro $a < \frac{1}{2}$, 1 pro $a = \frac{1}{2}$, $+\infty$ pro $a > \frac{1}{2}$. **A3.** $-\frac{1}{8}$. **A4.** 1. **A5.** $+\infty$ zprava, 0 zleva. **A6.** $e^{\frac{1}{2}}$.

U primitivních funkcí v B1.–B7. neuvádím „+c“.

B1. $\sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ v \mathbb{R} .

B2. $\frac{4}{3}x^3 + 3x^2 + 6x + 5 \ln |2x - 1| - \frac{5}{2(2x-1)} - \frac{1}{4(2x-1)^2}$, $x \neq \frac{1}{2}$.

B3. $2\sqrt{x^3} \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \ln(x+1) - x$ v \mathbb{R}^+ .

B4. $\frac{4}{3} \left(\sqrt[4]{x^3} - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{3}} \right) + 2(\ln(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 1) - \sqrt{x})$ v \mathbb{R}^+ .

B5. $2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} - \sqrt{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2(x-1)}{2-x}}$ v $(1, 2)$.

B6. $\frac{1}{3} \left(\operatorname{tg} x + \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{\sqrt{3} \sin x + \cos x} \right| \right)$ pro $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \neq \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$.

B7. $F(x) = \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{2 \sin x}{\cos x + 1} \right) + k\pi$ v $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $F(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pro $x = (2k+1)\pi$ je primitivní funkce v \mathbb{R} .

B8. $F(x) = \cos x + 4k - 1$ pro $x \in \langle -\pi, 0 \rangle + 2k\pi$, $F(x) = -\cos x + 4k + 1$ pro $x \in \langle 0, \pi \rangle + 2k\pi$ je lichá primitivní funkce v \mathbb{R} .

C1.–C14. Řešení průběhů funkce si ověřte sami např. na <https://www.wolframalpha.com/>

D1. $-\frac{1}{12}$. **D2.** $\frac{1}{6}(n=3)$. **D3.** 1. **D4.** ± 1 . **D5.** -1 . **D6.** $-\frac{1}{4}$. **D7.** $\frac{44}{3}$. **D8.** e^2 .