Co budeme potřebovat z teorie

Jde o funkcionály ve tvaru

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \tag{1}$$

definované na množině

$$M = \{y \in C^1([a,b]) :\ y(a) = A,\ y(b) = B\}, \tag{2}$$

kde $a, b, A, B \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$.

Tuto obecnou situaci si ovšem upravíme na speciální úlohu

$$\Phi(u) = F(u + \varphi),$$

kde $\varphi(x) = \dfrac{B-A}{b-a}(x-a) + A$, a

$$X = \{u \in C^1([a,b]) :\ u(a) = u(b) = 0\}.$$

Je snadné si rozmyslet, že $u \in X$ právě tehdy, když $u + \varphi \in M$, a že $u \in X$ je extrémem funkcionálu Φ právě tehdy, když $u + \varphi$ je extrémem (stejného typu) funkcionálu F.

Věta (o Lagrangeových multiplikátorech). *Nechť $f, g \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ a $y \in M$ je bodem minima funkcionálu F vzhledem k množině*

$$\{y \in M : G(y) = \gamma\},$$

kde

$$G(y) = \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\, dx,$$

(zde opět značíme $\Psi(u) = G(u + \varphi)$). Pokud $d\Phi(y) \neq 0$, potom existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$d\Phi(y)(h) = \lambda d\Psi(y)(h), \quad h \in X.$$

Příklady

1. Nalezněte minimum funkcionálu
$$F(y) = \int_0^{\pi} (y')^2$$
vzhledem k množině všech funkcí $y \in C^1([0,\pi])$, pro které platí $y(0) = y(\pi) = 0$ a $\displaystyle\int_0^{\pi} y^2 = 1$.

2. Nalezněte minimum funkcionálu
$$F(y) = \int_0^{1} (y')^2$$
vzhledem k množině všech funkcí $y \in C^1([0,1])$, pro které platí $y(0) = 1$, $y(1) = 6$ a $\displaystyle\int_0^{1} y = 3$.

3. Nalezněte minimum funkcionálu
$$F(y) = \int_0^{1} (y')^2$$
vzhledem k množině všech funkcí $y \in C^1([0,1])$, pro které platí $y(0) = 1$, $y(1) = \frac{1}{4}$ a $\displaystyle\int_0^{1} y - (y')^2 = \frac{1}{12}$.