Sada příkladů na 8. týden

Fubiniovu větu budeme používat v následujícím tvaru:

**Věta 1** (Fubiniova věta)**.** *Pro funkci* $f \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^{p+q})$ *a množinu* $A \in \mathcal{B}^{p+q}$ *platí*

$$\int_A f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\pi_1 A} \left( \int_{A_x} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\pi_2 A} \left( \int_{A^y} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

**Věta 2** (Věta o substituci)**.** *Buď* $U \subset \mathbb{R}^n$ *otevřená,* $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ *difeomorfismus a* $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ *Lebesgueovsky měřitelná funkce. Pak*

$$\int_U f(\varphi(x))\,|\mathcal{J}\varphi(x)|\,dx = \int_{\varphi(U)} f(y)\,dy,$$

*má-li jedna strana smysl.*

*Je-li navíc* $B \subset \varphi(U)$ *Lebesgueovsky měřitelná množina, platí*

$$\int_{\varphi^{-1}(B)} f(\varphi(x))\,|\mathcal{J}\varphi(x)|\,dx = \int_B f(y)\,dy,$$

*má-li jedna strana smysl.*

**Příklady:**

1. Spočtěte $\lambda_2(M)$, kde

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x \geq y \geq \frac{3}{x},\ x > 0 \right\}.$$

2. Spočtěte $\lambda_2(M)$, kde

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2 \geq y \geq x^2 \right\}.$$

3. Spočtěte $\int_M f$, kde

$$M = [3,4] \times [1,2], \quad f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2}.$$

4. Spočtěte $\int_M f$, kde

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}, \quad f(x,y) = e^{-(x+y)}.$$

5. Spočtěte $\int_M f$, kde

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2,\ y \geq x^2\}, \quad f(x,y) = x^2 + y.$$

6. Spočtěte $\int_M f$, kde

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}, \quad f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Použijte Fubiniovu větu jak přímo, tak v kombinaci s větou o substituci (polární souřadnice).

7. Spočtěte $\int_M f$, kde

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le x\}, \quad f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Použijte Fubiniovu větu jak přímo, tak v kombinaci s větou o substituci (polární souřadnice).

8. Spočtěte $\int_M f$, kde $M$ je množina omezená plochami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a $x + y + z = 1$ pro funkci

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(1 + x + y + z)^3}.$$

9. Spočtěte $\int_M f$, kde $M$ je množina omezená plochami $x = y^2$, $y = x^2$, $z = 0$ a $z = xy$ pro funkci $f(x,y,z) = xyz$.

10. Spočtěte $\lambda_2(M)$, kde

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \le 8(x^2 - y^2)\right\}.$$

Návod: použijte polární souřadnice.

11. Spočtěte $\lambda_2(M)$, kde

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x + y)^4 < 3x^2 y,\ x > 0\right\}.$$

Návod: použijde substituci pomocí zobrazení $(r, \phi) \mapsto (r\cos^2\phi, r\sin^2\phi)$.

12. Spočtěte $\lambda_2(M)$, kde

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le x^2 \le 4y,\ 2x \le y^2 \le 3x\right\}.$$

Použijte Fubiniovu větu jak přímo, tak v kombinaci s větou o substituci (zobrazení $(x,y) \mapsto (\frac{x^2}{y}, \frac{y^2}{x})$).

13. Spočtěte $\lambda_2(M)$, kde

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x + y \le 2,\ 2x \le y \le 3x\right\}.$$

Použijte Fubiniovu větu jak přímo, tak v kombinaci s větou o substituci (zobrazení $(x,y) \mapsto (x + y, \frac{y}{x})$).

14. Spočtěte $\lambda_3(M)$, kde

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq \rho\right\},$$

$\rho > 0$. Návod: použijte sférické souřadnice.

15. Spočtěte $\lambda_3(M)$, kde

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 2z,\ x^2 + y^2 < z^2\right\}.$$

Návod: použijte sférické souřadnice.

16. Spočtěte $\lambda_3(M)$, kde

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 2\right\}.$$

Návod: použijte cylindrické souřadnice, nebo polární v kombinaci s Fubiniovou větou.

17. Spočtěte $\int_M f$ pro

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}, \quad f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$$

a pomocí této hodnoty spočtěte $\int_0^\infty e^{-x^2}$.

18. Pro $b > a > 0$ spočtěte $\int_M f$ pro

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, b > y > a\}, \quad f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 y^2},$$

pomocí Fubiniovy věty postupně v pobou pořadích integrace.

19. Pro $b > a > 0$ spočtěte $\int_M f$ pro

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 > x > 0, b > y > a\}, \quad f(x, y) = x^y,$$

pomocí Fubiniovy věty postupně v pobou pořadích integrace.

20. Spočtěte $\int_M f$ pro

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}, \quad f(x, y) = \frac{1}{(1 + x)(1 + xy^2)}$$

pomocí Fubiniovy věty postupně v pobou pořadích integrace.