Sada příkladů na 1. týden

Co budeme potřebovat z teorie

Definice. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $F : X \supset D_F \to \mathbb{R}$ funkcionál, $a \in D_f$, $h \in X \setminus \{0\}$. Potom definujeme Gâteauxovu derivaci F v bodě a ve směru h jako*

$$D_h F(a) = \lim_{t \to 0} \frac{F(a+th) - F(a)}{t},$$

pokud limita napravo existuje vlastní.

Spojitý lineární funkcionál $L : X \to \mathbb{R}$ budeme nazývat Gâteauxovu derivací F v bodě a pokud $D_h F(a)$ existuje pro všechna $h \in X \setminus \{0\}$ a platí $L(h) = D_h F(a)$, $h \in X \setminus \{0\}$.

Spojitý lineární funkcionál $L : X \to \mathbb{R}$ budeme nazývat Fréchetovou derivací F v bodě a pokud

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(a+h) - F(a) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Gâteauxovy a Fréchetovy derivace vyšších řádů definujeme induktivně.

Lemma 1 (základní lemma variačního počtu)**.** *Nechť $f \in C([a,b])$. Potom*

1. *pokud platí*

$$\int_a^b fg' = 0, \quad g \in C^1([a,b]),\ g(a) = g(b) = 0,$$

   potom f je konstantní na $[a,b]$,

2. *pokud platí*

$$\int_a^b fg = 0, \quad g \in C^1([a,b]),\ g(a) = g(b) = 0,$$

   potom $f = 0$ na $[a,b]$.

Funkcionály reprezentované integrálem

Jde o funkcionály ve tvaru

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \tag{1}$$

definované na množině

$$M = \{y \in C^1([a,b]) :\ y(a) = A,\ y(b) = B\}, \tag{2}$$

kde $a, b, A, B \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$.

Tuto obecnou situaci si ovšem upravíme na speciální úlohu

$$\Phi(u) = F(u + \varphi),$$

kde $\varphi(x) = \dfrac{B - A}{b - a}(x - a) + A$, a

$$X = \{u \in C^1([a,b]) : \ u(a) = u(b) = 0\}.$$

Je snadné si rozmyslet, že $u \in X$ právě tehdy, když $u + \varphi \in M$, a že $u \in X$ je extrémem funkcionálu Φ právě tehdy, když $u + \varphi$ je extrémem (stejného typu) funkcionálu F.

Věta (Euler-Lagrangeova rovnice). *Nechť $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ a y je stacionárním bodem funkcionálu F. Potom je funkce*

$$x \mapsto f_z(x, y(x), y'(x))$$

spojitě diferencovatelná na $[a,b]$ a platí (tzv. ***Euler-Lagrangeova rovnice****)*

$$f_y(x, y(x), y'(x)) - (f_z(x, y(x), y'(x)))' = 0, x \in [a,b]. \tag{3}$$

Věta (o regularitě minimizéru). *Nechť $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$, y je stacionárním bodem funkcionálu F a pro $\xi \in (a,b)$ platí*

$$f_{zz}(\xi, y(\xi), y'(\xi)) \neq 0.$$

Potom existuje $\delta > 0$, že y je C^2 na $(\xi - \delta, \xi + \delta)$.

Příklady

1. Spočítejte $D_h\Phi(f)$, $D^2_{h,k}\Phi(f)$ a $D^3_{h,k,l}\Phi(f)$ pro

$$\Phi(y) = \int_a^b y^2 + (y')^2, \quad y \in C([a,b])$$

a $h,k,l \in C([a,b]) \setminus \{0\}$.

2. Spočítejte Gâteauxovu a Fréchetovu derivaci funkcionálu

$$\Phi(y) = \int_{-1}^1 y^2, \quad y \in C^1([-1,1]).$$

3. Spočítejte Gâteauxovu a Fréchetovu derivaci funkcionálu

$$\Phi(y) = \int_0^1 x^2(y^4 - (y')^2), \quad y \in C^1([0,1]).$$

4. Spočítejte Gâteauxovu derivaci funkcionálu

$$\Phi(y) = \int_0^1 \Big[(y')^3 + x^2\sin(\pi y) + y''y''' + ye^{-(y'')^2}, \quad y \in C^3([0,1]).\Big]$$

5. Sestavte a vyřešte Euler-Lagrangeovu rovnici pro funkcionál

$$\Phi(y) = \int_0^1 (y')^2 - y^2$$

na množině $\{y \in C^1([0,2\pi]) : y(0) = y(2\pi) = 1\}$.

6. Sestavte a vyřešte Euler-Lagrangeovu rovnici pro funkcionál

$$\Phi(y) = \int_0^1 (y')^2 + yy' + (y')^2$$

na množině $\{y \in C^1([0,1]) : y(0) = 0,\ y(1) = \sinh 1\}$.

7. Sestavte a vyřešte Euler-Lagrangeovu rovnici pro funkcionál

$$\Phi(y) = \int_2^3 \frac{x^3}{(y')^2}$$

na množině $\{y \in C^1([2,3]) : y(2) = 4,\ y(3) = 9\}$.

8. Sestavte a vyřešte Euler-Lagrangeovu rovnici pro funkcionál

$$\Phi(y) = \int_1^2 x^2(y')^2 + 2yy'$$

na množině $\{y \in C^1([1,2]) : y(1) = 1,\ y(2) = 2\}$.

9. Sestavte a vyřešte Euler-Lagrangeovu rovnici pro funkcionál

$$\Phi(y) = \int_{-1}^{1} 2y^2 + x^2(y')^2$$

na množině $\{y \in C^1([1,2]) : y(-1) = -1,\ y(1) = 1\}$.

10. Ukažte, že Euler-Lagrangeova rovnice pro funkcionál

$$\Phi(y) = \int_{-1}^{1} y^2(2x - y')^2$$

na množině $\{y \in C^1([-1,1]) : y(-1) = 0,\ y(1) = 1\}$ má řešení, které není C^2.