

Sada příkladů na 3. týden

Co budeme potřebovat z teorie

Definice (bodová a stejnoměrná konvergence). *Pro posloupnost reálných funkcí $\{f_n\}$ definovaných na $A \subset \mathbb{R}^d$ a $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ říkáme, že*

- *posloupnost $\{f_n\}$ **konverguje bodově** k funkci f na množině A (značíme $f_n \rightarrow f$), pokud pro všechna $x \in A$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$,*
- *posloupnost $\{f_n\}$ **konverguje stejnoměrně** k funkci f na množině A (značíme $f_n \rightrightarrows f$), pokud platí*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in A \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

- *posloupnost $\{f_n\}$ **konverguje lokálně stejnoměrně** k funkci f na množině A (značíme $f_n \xrightarrow{loc} f$), pokud $f_n \rightrightarrows f$ na K pro každou $K \subseteq A$ kompaktní.*

Pro $\sigma_n = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$ platí

$$(f_n \rightrightarrows f) \iff \sigma_n \rightarrow 0.$$

Příklady

1. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = e^{-nx}$.
2. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.
3. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \sin^n(x)$.
4. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \arctan(nx)$.
5. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \frac{nx}{1+x^2n^2}$.
6. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$.
7. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right)$.
8. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = x^{2n} - x^{3n}$, $x \in [0, 1]$.
9. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \sqrt{n^2 + 1} \left(e^{\frac{1}{nx}} - 1 \right)$, $x > 0$.
10. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \sqrt[n]{3^n + x^n}$.
11. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \frac{x^{pn}}{1+n+x^{qn}}$ v závislosti na parametrech p, q pro $x \in (0, \infty)$.
12. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = n^2 \left(1 - \cos \frac{x}{n} \right)$.