Sada příkladů na 5. týden

Co budeme potřebovat z teorie

Definice (bodová a stejnoměrná konvergence)**.** *Pro posloupnost reálných funkcí* $\{f_n\}$ *definovaných na* $A \subset \mathbb{R}^d$ *a* $f : A \to \mathbb{R}$ *říkáme, že*

- *posloupnost* $\{f_n\}$ ***konverguje bodově*** *k funkci* f *na množině* A *(značíme* $f_n \to f$*), pokud pro všechna* $x \in A$ *platí* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$*,*
- *posloupnost* $\{f_n\}$ ***konverguje stejnoměrně*** *k funkci* f *na množině* A *(značíme* $f_n \rightrightarrows f$*), pokud platí*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall x \in A\, \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

- *posloupnost* $\{f_n\}$ ***konverguje lokálně stejnoměrně*** *k funkci* f *na množině* A *(značíme* $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$*), pokud* $f_n \rightrightarrows f$ *na* K *pro každou* $K \subseteq A$ *kompaktní.*

Pro $\sigma_n = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|$ platí

$$(f_n \rightrightarrows f) \iff \sigma_n \to 0.$$

Příklady

1. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n.$
2. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2+x^2}.$
3. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^2+x^2}}.$
4. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(1+\frac{x^2}{n\log^2 n}\right).$
5. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^N e^{nx},\ N\in\mathbb{N}.$
6. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}.$
7. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x\log\frac{x}{n}.$
8. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}e^{-nx}.$