Sada příkladů na 5. týden

Co budeme potřebovat z teorie

Věta (vztah Riemannova a Lebesgueova integrálu)**.** *Pokud* $f \in \Re([a,b])$, *potom* $f \in \mathcal{L}([a,b])$ *a platí*

$$\int_a^b f = (R)\int_a^b f.$$

Věta (Leviho věta)**.** *Nechť pro posloupnost* $\{f_n\} \subset \mathcal{L}_d$ *platí* $f_n \nearrow f$ *a nechť existuje* $M \in \mathbb{R}$, *že* $\int f_n \leq M$, $n \in \mathbb{N}$, *potom*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Věta (Leviho věta pro řady)**.** *Nechť* $\{f_n\} \subset \mathcal{L}_d$ *je posloupnost nezáporných funkcí a nechť existuje* $M \in \mathbb{R}$, *že* $\int \sum_{k=1}^{n} f_n \leq M$, $n \in \mathbb{N}$. *Potom* $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{L}_d$ *a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n = \int f.$$

Věta (Fatouovo lemma)**.** *Nechť* $\{f_n\}$ *je posloupnost funkcí z* $\mathcal{L}_n^+$, $f_n \to f$ *s.v. a existuje* $M \in \mathbb{R}$, *že* $\int f_n \leq M$, $n \in \mathbb{N}$. *Potom* $f \in \mathcal{L}_d^+$ *a* $\int f \leq M$.

Věta (Lebesgueova o majorantě)**.** *Nechť* $\{f_n\}$ *je posloupnost funkcí z* $\mathcal{L}_d$, $f_n \to f$ *s.v. a existuje* $g \in \mathcal{L}_d$, *že* $|f_n| \leq g$ *s.v.*, $n \in \mathbb{N}$. *Potom* $f \in \mathcal{L}_d$ *a*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Příklady

1. Ověřte, že
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = 0.$$

2. Ověřte, že
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x^n}\,dx = 1.$$

3. Platí $\lim\limits_{n\to\infty}\int_M f_n = \int_M \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pro
$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \quad M = (0,1),\ (1,\infty),\ (0,\infty)?$$

4. Ověřte, že
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\log(x+n)}{n}\cdot e^{-x}\cos x\,dx = 0.$$
Návod: výraz $\frac{\log(x+n)}{n}$ odhadněte polynomem nezávislým na n a použijte Lebesgueovu větu.

5. Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot\sqrt[n]{x}}\,dx.$$
Návod: uvažujte zvlášť intervaly $(0,1)$ a $(1,\infty)$. Na $(0,1)$ je rozhodujícím členem $\sqrt[n]{x}$, zde lze použít Leviho i Lebesgueovu větu. Na $(1,\infty)$ rozhoduje $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Pro jeho odhad zespoda použijte binomickou větu a následně použijte Lebesgueovu větu. I na $(1,\infty)$ lze použít Leviho větu, nicméně použití je poněkud náročnější.

6. Existuje posloupnost funkcí $f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n \searrow 0$ taková, aby platilo $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^\infty f_n \neq 0$? Návod: zkuste nejdříve sestrojit posloupnost množin A_n takovou, že $A_n \supset A_{n+1}$ a $\lambda(A_n)=\infty$, $n\in\mathbb{N}$, a která splňuje $\bigcap\limits_n A_n = \emptyset$. Pak položte $f_n = \chi_{A_n}$.

7. Spočtěte
$$\lim_{a\to\infty}\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx, \quad \lim_{a\to 0+}\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx.$$
Návod: pomocí Heineho věty převeďte na limitu posloupnosti.

8. Spočtěte
$$\lim_{a\to 1-}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\log(a-\sin x)}\,dx.$$
Návod: pomocí Heineho věty převeďte na limitu posloupnosti.

9. Spočtěte

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx,\quad \lim_{a\to 0+}\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx.$$

10. Dokažte, že

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Návod: pro první příklad použijte rozvoj $\log(1-x)$ v mocninnou řadu. Pomocí Leviho věty pak dokažte, že lze integrovat člen po členu.

11. Dokažte, že

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\,dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

Návod: vytkněte $\frac{x}{e^x}$ a zbytek rozveďte do nekonečné řady pomocí vzorečku pro geometrickou řadu.

*12. Vypočtěte

$$\int_0^\infty \log(1-e^{-x})\,dx.$$

Návod: vhodnou substitucí převeďte na jeden z předchozích příkladů.

*13. Dokažte, že

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

pro $|b| < a$. Návod: $\sin(bx)$ rozveďte v Taylorovu řadu. Pro konvergenci použijte Lebesgueovu větu. Integrál lze spočítat i přímo.

*14. Ověřte pro $p, q > 0$, že

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{p+nq}.$$

Návod: všimněte si, že můžeme uvažovat jen $x \in (0,1)$. To znamená, že člen $\frac{1}{1+x^q}$ lze rozvést pomocí vzorce pro součet geometrické řady. Pak už stačí použít Lebesgueovu větu s majorantou $\frac{2x^{p-1}}{1+x^2}$ (k jejímůž odvození použijeme vzoreček pro částečné součty geometrické řady). Možno použít i Leviho větu, ale zde je užitečné rozvést v geometrickou řadu s kvocientem x^2.

*15. Ověřte, že

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos(\sqrt{x})\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n n!}{(2n)!}.$$

Návod: $\cos(\sqrt{x})$ rozvedeme do Taylorovy řady a následné integrály počítáme per partes (můžeme si zároveň všimnout, že jde o integrály z definice Γ funkce (př. 1) a použít, co o této případně víme).

*16. Ověřte, že

$$\int_0^1 \log\left(\frac{1}{1-x}\right)\, dx = 1.$$

Návod: použijeme vzoreček pro logaritmus podílu a pak rozvedeme v Taylorovu řadu.

*17. Ověřte pro $|b| < a$, že

$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin(bx)}{x}\, dx = \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$

Návod: rozvedeme $\sin(bx)$ v Taylorovu řadu, integrujeme člen po členu (Lebesgueova věta) pomocí per partes. Na závěr porovnáme s Taylorovou řadou pro $\arctan x$.

Všechny příklady jsou převzaty ze sbírky prof. Lukeše, kde naleznete i podrobnější verze mnoha návodů, jde po řadě o příklady $4,3$; $4,22$; $4,23(d)$; $4,8$; $4,7$; $4,13$; $4,15$; $4,19$; $4,18$; $4,25$; $4,26$; $4,46(a)$ a $4,47$.