Sada příkladů na 2. týden

Co budeme potřebovat z teorie

Jde o funkcionály ve tvaru

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx \tag{1}$$

definované na množině

$$M = \{y \in C^1([a,b]) :\ y(a) = A,\ y(b) = B\}, \tag{2}$$

kde $a, b, A, B \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$.

Tuto obecnou situaci si ovšem upravíme na speciální úlohu

$$\Phi(u) = F(u + \varphi),$$

kde $\varphi(x) = \dfrac{B-A}{b-a}(x-a) + A$, a

$$X = \{u \in C^1([a,b]) :\ u(a) = u(b) = 0\}.$$

Je snadné si rozmyslet, že $u \in X$ právě tehdy, když $u + \varphi \in M$, a že $u \in X$ je extrémem funkcionálu Φ právě tehdy, když $u + \varphi$ je extrémem (stejného typu) funkcionálu F.

Věta (Euler-Lagrangeova rovnice)**.** *Nechť $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ a y je stacionárním bodem funkcionálu F. Potom je funkce*

$$x \mapsto f_z(x, y(x), y'(x))$$

spojitě diferencovatelná na $[a,b]$ a platí (tzv. ***Euler-Lagrangeova rovnice****)*

$$f_y(x, y(x), y'(x)) - (f_z(x, y(x), y'(x)))' = 0, x \in [a,b]. \tag{3}$$

Hlavní poznatky

1. (regularita minimizéru) pokud je y stacionárním bodem F a pro nějaké $\xi \in (a,b)$ platí
$$f_{zz}(\xi, y(\xi), y'(\xi)) \neq 0.$$
Potom existuje $\delta > 0$, že y je C^2 na okolí ξ.

2. (Lagrangeova nutná podmínka) pokud je y bodem minima funkcionálu F. Potom
$$f_{zz}(x, y(x), y'(x)) \geq 0, \quad x \in [a,b].$$

3. (Legendrova postačující podmínka) pokud je y stacionárním bodem funkcionálu F a pokud existují $\alpha, \delta > 0$, že

$$d^2\Phi_{h,h}(u_0) \geq \alpha||h||^2, \quad h \in X, \ ||h|| < \delta,$$

potom y je bodem minima.

4. (Lagrangeova postačující podmínka) pokud je y stacionárním bodem funkcionálu F. Jestliže existuje $\delta > 0$, že pro každé $h \in X$, $||h|| < \delta$ splňuje funkce $\varphi : t \mapsto F(y + th)$ podmínku

$$\varphi''(t) \geq 0, \quad t \in (0, 1).$$

Potom F má v bodě y lokální minimum.

5. (konvexita a extrém) Pokud je zobrazení $(u, v) \mapsto f(x, u, v)$ konvexní pro všechna $x \in [a, b]$ a $y \in M \cap C^2([a, b])$ je stacionárním bodem funkcionálu F. Potom má F v bodě y minimum.

Definice (Jacobiho rovnice a konjugovaný bod)**.** *Nechť $f \in C^3([a, b] \times \mathbb{R}^2)$ a $y \in M \cap C^2([a, b])$ je stacionárním bodem funkcionálu F. Položme*

$$P(x) = f_{zz}(x, y(x), y'(x))$$

a

$$Q(x) = f_{yy}(x, y(x), y'(x)) - (f_{yz}(x, y(x), y'(x)))'.$$

Rovnici

$$-(Ph')' + Qh = 0$$

nazýváme ***Jacobiho rovnicí****. Bod $x \in (a, b]$ nazveme* ***konjugovaným bodem*** *k bodu a, pokud existuje netriviální řešení Jacobiho rovnice h, pro které platí $h(a) = h(x) = 0$.*

Věta (Jacobiho)**.** *Nechť $f \in C^3([a, b] \times \mathbb{R}^2)$ a $y \in M \cap C^2([a, b])$ je stacionárním bodem funkcionálu F a platí*

$$f_{zz}(x, y(x), y'(x)) > 0, \quad x \in [a, b].$$

Potom

1. *pokud na $(a, b]$ neexistuje konjugovaný bod k bodu a, potom y je bodem lokálního minima funkcionálu F na M.*

2. *pokud je y bodem lokálního minima funkcionálu F na M, potom na (a, b) neexistuje konjugovaný bod k bodu a.*

Příklady

1. Vyšetřete extrémy funkcionálu

$$F(y) = \int_0^1 (y)^2 + yy' + (y')^2$$

vzhledem k množině

$$M = \{y \in C^1([0,1]) : y(0) = 0, y(1) = \sinh 1\}.$$

2. Vyšetřete extrémy funkcionálu

$$F(y) = \int_0^1 \frac{x^3}{(y')^2}$$

vzhledem k množině

$$M = \{y \in C^1([2,3]) : y(2) = 4, y(3) = 9\}.$$

3. Vyšetřete extrémy funkcionálu

$$F(y) = \int_1^2 x^2(y')^2$$

vzhledem k množině

$$M = \{y \in C^1([1,2]) : y(1) = 1, y(2) = 2\}.$$

4. Vyšetřete extrémy funkcionálu

$$F(y) = \int_1^2 x^2(y')^2 + 2yy'$$

vzhledem k množině

$$M = \{y \in C^1([1,2]) : y(1) = 1, y(2) = 2\}.$$

5. Vyšetřete extrémy funkcionálu

$$F(y) = \int_{-1}^1 2y^2 + x^2(y')^2$$

vzhledem k množině

$$M = \{y \in C^1([1,2]) : y(-1) = -1, y(1) = 1\}.$$