Sada příkladů 4/9

Henri Lebesgue a jeho integrál

Fubiniho věta, věta o substituci

1. Převeďte $\int_\Omega f(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ na jednoduchý integrál, jestliže f je spojitá a $\Omega = \{(x,y); |x|+|y| \le 1\}$.

2. Převeďte $\int_\Omega f(x \cdot y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ na jednoduchý integrál, jestliže f je spojitá a Ω je ohraničeno křivkami $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$ a x, $y > 0$.

3. Přepište $\int_0^1 (\int_y^1 f(x)\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y$ pomocí jednoho integrálu.

4. Určete plošný obsah části roviny omezené následujícími křivkami:
   a) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$
   b) $(x^3+y^3)^2 = xy$
   c) $x+y=a$, $x+y=b$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$, $0<a<b$, $0<\alpha<\beta$

5. Určete objem tělesa omezeného následujícími plochami:
   a) $x+y+z=a$, $x^2+y^2=R^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $a \ge R\sqrt{2} > 0$
   b) $z=xy$, $z=0$, $x+y+z=1$
   c) $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$, $z=0$
   d) $z=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, $z=0$, $x^2+y^2=R^2$
   e) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, a, b, $c>0$
   f) $(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})^2+\frac{z^2}{c^2}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, a, b, $c>0$
   g) $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz$

6. Spočtěte následující integrály:
   a) $\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
   b) $\int_\Omega x^{-p}y^{-q}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $\Omega = \{(x,y); xy \ge 1, x \ge 1\}$
   c) $\int_\Omega (x+y)^{-p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $\Omega = \{(x,y); x+y \ge 1, 0 \le x \le 1\}$

7. Najděte souřadnice hmotného středu homogenní desky ohraničené $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, x, y, $a > 0$.

8. Najděte momenty setrvačnosti I_x a I_y homogenní desky s hustotou $\varrho = 1$ ohraničené $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$, $x=0$, $y=0$, $0 \le x \le a$.

9. Najděte souřadnice hmotného středu homogenního tělesa ohraničeného $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$, a, b, $c > 0$.

10. Kruhový válec s osou ve směru osy z kartézských souřadnic je naplněn plynem, jehož hustota se řídí barometrickou formulí

$$\varrho = \varrho_0 \exp(-\frac{\varrho_0}{p_0} g z)\,,$$

kde p_0 je tlak na spodní základně $z = 0$, g je tíhové zrychlení. Výška válce je h, poloměr R. Určete hmotnost vzduchu ve válci.