Sada příkladů 6/9

Křivkový a plošný integrál

Křivkový integrál

1. Parametrizujte epicykloidu, tj. křivku, která vznikne pohybem zvoleného bodu jedné kružnice, kutálející se po jiné pevné kružnici.

2. Napište v parametrickém tvaru rovnici kružnice, která je průnikem koule a roviny.

3. Napište parametrický tvar kuželosečky, tj. průniku kužele a roviny a provedte diskusi.

4. Parametrizujte křivku, zadanou jako průnik dvou sfér v $\mathbb{R}^3$.

   Spočtěte následující křivkové integrály:

5. $\int_C x^2 \, \mathrm{d}s$, kde C je oblouk AB křivky $y = \ln x$, $A = (2, \ln 2)$, $B = (1, 0)$

6. $\int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) \, \mathrm{d}s$, kde C je asteroida $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

7. $\int_C |y| \, \mathrm{d}s$, kde C je lemniskáta $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

8. $\int_C (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x + (x^2 - y^2) \, \mathrm{d}y$, kde C je obvod trojúhelníka ABC, $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$, přičemž (A, B, C) je trojice uspořádaná ve smyslu orientace křivky

9. $\int_C \frac{(x + y) \, \mathrm{d}x - (x - y) \, \mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$, kde C je kružnice $x^2 + y^2 = a^2$, přičemž trojice bodů $A = (a, 0)$, $B = (0, a)$, $C = (-a, 0)$ je uspořádaná ve smyslu orientace křivky

10. $\int_C y \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}y + x \, \mathrm{d}z$, kde C je průsečnice ploch $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$ a trojice bodů $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (-1, 0, 0)$ je uspořádaná ve smyslu orientace křivky

11. Ukažte, že $\int_C f(x^2+y^2+z^2)(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z)$, kde f je spojitá funkce, je roven nule přes libovolnou uzavřenou křivku C.

Spočtěte následující křivkové integrály:

12. $\int_A^B (x^4 + 4xy^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\,\mathrm{d}y$, kde $A = (-2, -1)$, $B = (3, 0)$

13. $\int_A^B \left(2xy^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2x}{y^2}\right)\mathrm{d}x + \left(2x^2y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2x^2}{y^3}\right)\mathrm{d}y$, kde $A = (2, 1)$, $B = (1, 2)$ a křivka se nachází uvnitř prvního kvadrantu

14. $\int_A^B \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, kde $A = (0, 0, a)$, $B = (0, b, 0)$ a křivka prochází mimo počátek

15. Vypočtěte hmotnost hmotného oblouku $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in (0, 2\pi)$, je-li jeho lineární hustota $\mu(x, y, x) = k(x^2 + y^2 + z^2)$.

16. Najděte těžiště homogenního oblouku kružnice o poloměru a, $0 \le \varphi \le 2\alpha$.

17. Spočtěte gravitační sílu, kterou působí homogenní půlkružnice o poloměru R a hmotnosti M na hmotný bod o hmotnosti m ve svém středu.