Sada příkladů 9/9

Diferenciální formy a jejich integrace

1. Nechť $e_1, \dots e_6$ je kanonická báze v $\mathbb{R}^6$. Zjednodušte:
   a) $e_2 \wedge e_5 \wedge e_3 \wedge [e_1 \wedge e_4 + e_4 \wedge e_2]$
   b) $[e_2 + e_5] \wedge e_3 \wedge e_1 \wedge [e_5 - e_4]$

2. Nechť $e_1, \dots e_3$ je kanonická báze v $\mathbb{R}^3$. Nechť $v_1 = e_1 + e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_1 + e_3$. Vypočítejte $e = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$. Přitom odvoďte, čemu se rovná
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Vypočítejte $\mathrm{d}\omega$, je-li:
   a) $\omega = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}z$
   b) $\omega = \sin x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z$

4. Napište rovnice, které musí splňovat φ_i resp. ψ_{ij} forem
   a) $\omega = \varphi_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4 - \varphi_2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4 + \varphi_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_4 - \varphi_4\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$
   b) $\tau = \psi_{12}\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4 - \psi_{13}\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_4 + \psi_{14}\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \psi_{23}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_4 - \psi_{24}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \psi_{34}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$,
   aby
   a) $\omega = \mathrm{d}\tau$
   b) $\mathrm{d}\omega = 0$.

5. Ukažte, že je-li ω forma sudého stupně, pak $\tau = \omega \wedge \mathrm{d}\omega$ je exaktní.

6. Nechť $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je dáno předpisem $\Phi(s,t) = [st, s\cos t, \mathrm{e}^t]$. Nalezněte $\Phi^*\omega$ pro:
   a) $\omega = x\,\mathrm{d}y$
   b) $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$

7. Nechť $\omega = \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ je 1-forma na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Nechť $\Phi(t) = [r\cos t, r\sin t]$, kde $r > 0$ je pevné. Nalezněte formu $\Phi^*\omega$.

8. Nalezněte 1-formu ω pro kterou $\mathrm{d}\omega = (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ a užijte ji pro výpočet integrálu
$$\int_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$
kde $\Omega = \{|x|+|y|<4\} \setminus \{x^2+y^2 \le 1\}$.

9. Vypočítejte $\int_M \omega$, kde:
a) $\omega = xz\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ na $\mathbb{R}^3$, $M = \{x^2 = y^2+z^2+1, x \in [1,\sqrt{2})\}$ s orientací danou normálou v bodě $m \in M$, jejíž první komponenta je kladná
b) $\omega = \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$ na $\mathbb{R}^3$, $M = \{y = x^2+z^2, y \le 4\}$ s orientací danou normálou v bodě $m \in M$, jejíž druhá komponenta je kladná

10. Ověřte Stokesovu větu pro:
a) $\omega = x\,\mathrm{d}z$ pro plochu $c : x = uv, y = u+v, z = u^2+v^2, [u,v] \in (0,1)^2, v < u$
b) $\omega = xy\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + yz\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}w$ pro plochu $c : x = u^2+v^2, y = u-v, z = uv, w = u+v, [u,v] \in (0,1)^2$

11. Nechť $M = \{[x_1,x_2,x_3,x_4]; x_1^2+x_2^2+x_3^2 < x_4^2, 0 < x_4 < 1\} \subset \mathbb{R}^4$. Ukažte, že M je zobecněná plocha dimenze 4 v $\mathbb{R}^4$, najděte její parametrizaci c tak, aby souhlasila s kanonickou orientací na $\mathbb{R}^4$. Vypočítejte:
a) $\int_{\partial c} (x_2+x_4)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$
b) $\int_{\partial c} |x|^2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$