Matematická analýza pro fyziky III

Robert Černý & Milan Pokorný

12. ledna 2020

Obsah

14 Posloupnosti a řady funkcí **1**
14.1 Bodová a stejnoměrná konvergence 1
14.2 Kritéria stejnoměrné konvergence řad funkcí 6
14.3 Záměna limit, derivace a integrál 13
14.4 Spojitá funkce, nemající derivaci v žádném bodě 24

15 Lebesgueův integrál **27**
15.1 Úvod 27
15.2 σ-algebra a míra 28
15.3 Konstrukce Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^N$ 35
15.3.1 Lebesgue–Stieltjesova míra 48
15.4 Měřitelné funkce 52
15.5 Aproximace měřitelných funkcí jednoduchými 58
15.6 Dodatek: borelovské funkce 63
15.7 Integrál z nezáporné funkce 65
15.8 Integrál z funkce měnící znaménko 71
15.9 Vztah k Riemannovu a Newtonovu integrálu 77
15.10 Integrály závislé na parametru 79
15.10.1 Γ-funkce a B-funkce 85
15.11 Fubiniho věta 86
15.11.1 Dodatek: důkaz Fubiniho věty 90
15.12 Věta o substituci 97
15.12.1 Dodatek: důkaz Věty o substituci 99
15.13 Zobecnění Lebesgueova integrálu 111
15.14 Dodatek k větám o záměně limity a integrálu 115
15.14.1 Jensenova nerovnost 118

16 Lebesgueovy prostory **121**
16.1 Lebesgueovy prostory, základní vlastnosti 122
16.2 Hölderova nerovnost a její důsledky 126
16.3 Konvergence v L^p prostorech, úplnost 133
16.4 Separabilita L^p pro $p \in [1, \infty)$, husté podmnožiny 136
16.5 Konvoluční zhlazování 138
16.6 Dodatek: spojitost v průměru 145

16.7 Dodatek: chování L^p-normy při limitním přechodu . . . 146

17 Křivkový a plošný integrál klasicky 151

17.1 Klasická teorie křivkového integrálu . . . 151
17.1.1 Křivky v $\mathbb{R}^N$ . . . 152
17.1.2 Křivkový integrál prvního a druhého druhu . . . 154
17.1.3 Základní vlastnosti křivkového integrálu . . . 155
17.1.4 Křivkový integrál a potenciálnost vektorového pole . . . 159
17.2 Klasická teorie plošného integrálu . . . 162
17.2.1 k-plochy v $\mathbb{R}^N$ . . . 162
17.2.2 Zavedení plošného obsahu a plošného integrálu prvního druhu 165
17.2.3 Základní vlastnosti plošného obsahu a plošného integrálu prvního druhu . . . 166
17.2.4 Tečný prostor, tečná rovina a vektorový součin v $\mathbb{R}^N$ . . . 171
17.2.5 Geometrické úvahy vedoucí k zavedení plošného obsahu pomocí Gramovy matice . . . 175
17.2.6 Plošný integrál prvního druhu přes zobecněné k-plochy . . . 177
17.3 Integrální věty . . . 181
17.3.1 Gauss–Ostrogradského věta a její důsledky . . . 181
17.3.2 Greenova věta . . . 190
17.3.3 Stokesova věta v $\mathbb{R}^3$ . . . 192
17.3.4 Potenciálnost vektorového pole v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$ . . . 195
17.4 Dodatek: důkaz Gauss–Ostrogradského věty . . . 198

18 Diferenciální formy a jejich integrace 209

18.1 Vnější algebra na vektorovém prostoru . . . 209
18.2 Diferenciální formy a jejich přenášení . . . 213
18.2.1 Integrace diferenciálních forem . . . 223
18.2.2 Plošný integrál prvního druhu v jazyce diferenciálních forem 233
18.3 Zobecněná Stokesova věta . . . 234
18.4 Hausdorffova míra a dimenze . . . 248
18.4.1 Hausdorffova míra . . . 248
18.4.2 Hausdorffova dimenze . . . 253

A Významní matematici 3 259

Kapitola 14

Posloupnosti a řady funkcí

V předchozích kapitolách jsme už několikrát narazili na problém prohození pořadí dvojice limitních procesů. Obecně není možné tuto operaci provádět: například $\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\frac{m}{n}\right) \neq \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}\right)$. Na druhou stranu, v některých situacích to možné je a někdy se dokonce jedná o velmi účinný nástroj k řešení matematických problémů (vzpomeňte si na prohazování sumy a derivace v případě mocninných řad, což se často využívá při jejich sčítání). Zde se budeme zabývat posloupnostmi funkcí, které v jistém smyslu konvergují k nějaké funkci a bude nás zajímat, jak vlastnosti členů posloupnosti funkcí ovlivňují vlastnosti funkce limitní. Základní otázkou bude právě prohození limitních procesů. Jako velice vhodný typ konvergence se ukáže nám již dobře známá konvergence generovaná supremovou normou na prostorech spojitých funkcí.

14.1 Bodová a stejnoměrná konvergence

S posloupnostmi funkcí jsme se již setkali v metrických prostorech. Jedním ze studovaných prostorů byl prostor $C([a,b])$ opatřený maximovou normou. Odpovídající konvergenci jsme nazývali *stejnoměrná konvergence*. Tento pojem je vhodné rozšířit i do situací, kdy pracujeme na obecnější množině, než je omezený uzavřený interval.

Definice 14.1.1 (Stejnoměrná konvergence)**.** Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na Ω.

Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_n\}$ *konverguje stejnoměrně* na Ω k funkci φ, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } n \geq n_0 \text{ a } x \in \Omega.$$

V takovém případě píšeme $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na Ω.

Stejnoměrnou konvergenci řady funkcí definujeme pomocí stejnoměrné konvergence jejích částečných součtů.

Poznámka 14.1.2. (i) Jestliže $m \in \mathbb{N}$, $\Omega_i \subset \mathbb{R}^N$ pro $i \in \{1, \dots, m\}$ a $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na Ω_i pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$, pak $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na $\bigcup_{i=1}^m \Omega_i$ (k zadanému $\varepsilon > 0$ má každá množina Ω_i index, od něhož platí odhad z definice, na $\bigcup_{i=1}^m \Omega_i$ pak stačí vzít maximum z těchto indexů). Speciálně, pokud $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na (a, b), $\varphi_n(a) \to \varphi(a)$ a $\varphi_n(b) \to \varphi(b)$, pak $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na $[a, b]$.
(ii) Pro nekonečný počet množin podobné tvrzení neplatí. Stačí uvážit posloupnost $\varphi_n(x) = \frac{x}{n}$ na $\mathbb{R}$ a množiny $\Omega_i = [-i, i]$, $i \in \mathbb{N}$.
(iii) Pokud $\Omega_1 \subset \Omega_2$, pak $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na Ω_2 implikuje $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na Ω_1.

Budeme pracovat ještě s jedním typem konvergence posloupnosti funkcí. Tato konvergence nesouvisí s žádnou normou či metrikou, ale už jsme se s ní setkali při studiu konvergence mocninných řad.

Definice 14.1.3 (Bodová konvergence)**.** Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a $\varphi \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na Ω.

Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_n\}$ *konverguje bodově* na Ω k funkci φ, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $x \in \Omega$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

V takovém případě píšeme $\varphi_n \to \varphi$ na Ω.

Bodovou konvergenci řady funkcí definujeme pomocí bodové konvergence jejích částečných součtů.

Poznámka 14.1.4. (i) Zatímco u stejnoměrné konvergence číslo δ závisí jen na ε, u bodové konvergence připouštíme ještě závislost na $x \in \Omega$. Toto je vyjádřeno v zápise pomocí predikátové logiky prohozením pořadí obecného a existenčního kvantifikátoru. Tedy $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na Ω, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \cup [n_0, \infty) \ \forall x \in \Omega \qquad |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon,$$

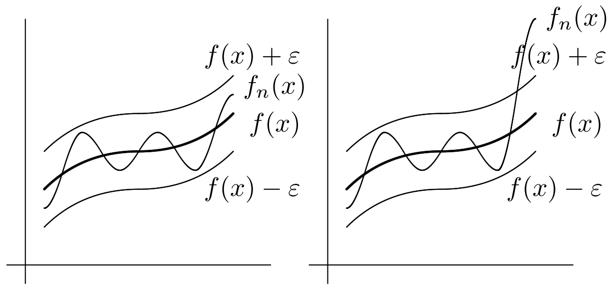
zatímco $\varphi_n \to \varphi$ na Ω, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in \Omega \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \cup [n_0, \infty) \qquad |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

(ii) Snadno vidíme, že stejnoměrná konvergence implikuje bodovou.
(iii) Bodová konvergence stejnoměrnou neimplikuje. Stačí uvážit funkce $\varphi_n(x) = \frac{x}{n}$ na $\mathbb{R}$.
(iv) Má-li Ω jen konečný počet prvků, pak obě konvergence splývají.
(v) Snadno se nahlédne, že pokud $\varphi_n \to \varphi$ na Ω_α, kde α probíhá libovolnou (třeba i nespočetnou) množinu A, pak $\varphi_n \to \varphi$ na $\bigcup_{\alpha \in A} \Omega_\alpha$.

Příklad 14.1.5. Uvažujme posloupnost funkcí $\varphi_n(x) = x^n$ na $[0, 1]$. Snadno nahlédneme, že $\varphi_n \to \varphi$, kde

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{pro } x = 1. \end{cases}$$



Obrázek 14.1: Porovnání bodové a stejnoměrné konvergence: zatímco stejnoměrná konvergence požaduje, aby grafy funkcí f_n ležely v tenkých pásech okolo grafu funkce f, bodová konvergence připouští, že se funkce f_n budou v některých bodech k funkci f přibližovat hodně nerovnoměrně.

Vzhledem ke vztahu bodové a stejnoměrné konvergence je φ jediným kandidátem na limitu při stejnoměrné konvergenci. Nyní již snadno nahlédneme, že $\{\varphi_n\}$ nekonverguje stejnoměrně na $[0,1]$, neboť

$$\|\varphi_n - \varphi\|_\infty = \sup_{[0,1]} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = 1 \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Mohli jsme také použít úplnost prostoru $C([0,1])$ opatřeného supremovou normou, díky které musí být stejnoměrné limity spojitých funkcí opět spojité. K tomu se ještě vrátíme později.

Následující výsledek plyne triviálně z definic. Je to však základní nástroj ověřování stejnoměrné konvergence.

Tvrzení 14.1.6 (O charakterizaci stejnoměrné konvergence)**.** *Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na Ω. Pak*

$$\varphi_n \rightrightarrows \varphi \text{ na } \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \big(\sup_{\Omega} |\varphi_n - \varphi|\big) = 0.$$

Cvičení 14.1.7. Dokažte podrobně předchozí tvrzení.

Příklad 14.1.8. (i) Jestliže vezmeme $\varphi_n(x) = x^n$ na $[0,1]$ a φ jako bodovou limitu představenou v předchozím příkladu, máme

$$\sup_{[0,1]} |\varphi_n - \varphi| = \sup_{[0,1)} x^n = 1,$$

čímž jsme opět vyvrátili stejnoměrnou konvergenci na $[0,1]$.

Pokud bychom však pracovali na intervalu $[0,1-\delta]$ pro libovolné $\delta \in (0,1)$, měli bychom

$$\sup_{[0,1-\delta]} |\varphi_n - \varphi| = \sup_{[0,1-\delta]} x^n = (1-\delta)^n \overset{n\to\infty}{\to} 0,$$

a proto $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na $[0,1-\delta]$.

(ii) Uvažujme posloupnost $\varphi_n(x) = x \arctan(nx)$ na $\mathbb{R}$. Okamžitě dostáváme $\varphi_n(x) \to \frac{\pi}{2}|x| =: \varphi(x)$ na $\mathbb{R}$. Díky sudosti příslušných funkcí se stačí v dalším omezit na interval $[0, \infty)$. Hledáme suprema funkcí

$$D_n(x) := \frac{\pi}{2}x - x \arctan(nx).$$

Máme

$$D'_n(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(nx) - \frac{nx}{1 + n^2x^2}.$$

Protože ze vzorce pro D'_n není vidět, ve kterých bodech funkce D_n nabývá globálního maxima (dokonce ani není jasné, že se maxima vůbec nabývá), přistupme k podrobnějšímu studiu průběhu funkce D_n. Máme

$$D''_n(x) = -\frac{n}{1 + n^2x^2} - \frac{n(1 + n^2x^2) - nx(2n^2x)}{(1 + n^2x^2)^2} = \frac{-2n}{(1 + n^2x^2)^2} < 0$$

a

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(nx) - \frac{nx}{1 + n^2x^2}\right) = 0.$$

Odtud D'_n je kladná na $[0, \infty)$, proto je D_n rostoucí na $[0, \infty)$ a dostáváme

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_n - \varphi| &= \sup_{[0,\infty)} D_n = \lim_{x\to\infty} D_n(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\pi}{2}x - x \arctan(nx)\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(nx)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{n}{1+n^2x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{nx^2}{1 + n^2x^2} = \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Zřejmě tedy $\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}} |\varphi_n - \varphi| = 0$, a proto $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na $\mathbb{R}$.

Připomeňme si výsledek z teorie metrických prostorů, podle něhož stejnoměrná limita funkcí z $C([a, b])$ je opět spojitá funkce. Pokud bychom chtěli podobný výsledek třeba pro otevřený interval (a, b), stačí nám pro každý bod $x_0 \in (a, b)$ najít interval $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, kde použijeme stejnoměrnou konvergenci. Pro tento typ problémů se tedy hodí následující zeslabení pojmu stejnoměrná konvergence.

Definice 14.1.9 (Lokálně stejnoměrná konvergence)**.** Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na Ω.

Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_n\}$ *konverguje lokálně stejnoměrně* na Ω k funkci φ, jestliže pro každé $x_0 \in \Omega$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\varphi_n \rightrightarrows \varphi \qquad \text{na } \mathcal{U}_\delta(x_0) \cap \Omega.$$

V takovém případě píšeme $\varphi_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} \varphi$ na Ω.

Poznámka 14.1.10. (i) Lokálně stejnoměrná konvergence je slabší vlastnost než stejnoměrná konvergence a silnější než bodová konvergence.
(ii) Díky Borelově pokrývací větě (Věta 11.8.3) lokálně stejnoměrná konvergence

implikuje stejnoměrnou konvergenci na každé kompaktní podmnožině množiny Ω. Každou kompaktní množinu totiž můžeme pokrýt nespočetně mnoha otevřenými okolí bodů z dané množiny (použijeme právě ta, na kterých daná posloupnost konverguje stejnoměrně) a z toho pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí dané kompaktní množiny. Díky konečnosti podpokrytí pak plyne stejnoměrná konvergence na dané kompaktní množině, detaily jsou ponechány čtenáři jako užitečné cvičení. Odtud pro Ω kompaktní splývají pojmy stejnoměrná konvergence a lokálně stejnoměrná konvergence.
(iii) Povšimněte si, že stejnoměrná konvergence na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ implikuje stejnoměrnou konvergenci na $[x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}]$. Lokálně stejnoměrná konvergence je tedy skutečně vhodný typ konvergence pro zachování spojitosti při limitním přechodu (bodová konvergence je pro tento účel příliš slabá, jak nám ukázal příklad s funkcemi x^n na $[0, 1]$).

Příklad 14.1.11. Výše jsme ukázali, že posloupnost funkcí $\{x^n\}$ konverguje stejnoměrně na množinách tvaru $[0, 1-\delta]$, kde $\delta \in (0, 1)$, ale nekonverguje stejnoměrně na $[0, 1]$. Snadno se dá také nahlédnout, že nekonverguje stejnoměrně na $[0, 1)$. Skutečně, pokud by zde stejnoměrně konvergovala, pak by díky bodové konvergenci v bodě 1 stejnoměrně konvergovala také na $[0, 1]$ (bodová a stejnoměrná konvergence na jednobodové množině splývají, navíc stejnoměrná konvergence na dvou množinách implikuje stejnoměrnou konvergenci na jejich sjednocení).

Z předchozích výsledků je vidět, že funkce x^n konvergují lokálně stejnoměrně na $[0, 1)$. Na $[0, 1]$ lokálně stejnoměrnou konvergenci nemáme, neboť pro $x_0 = 1$ nelze splnit podmínku z definice.

Analogicky jako konvergence posloupností čísel, i stejnoměrná konvergence posloupností funkcí se dá charakterizovat vhodným tvarem B–C podmínky, kterou brzy oceníme zejména v důkazech kritérií pro stejnoměrnou konvergenci řad či u důkazů, že řady stejnoměrně nekonvergují, kde je negace této podmínky často jediným nástrojem, který máme k dispozici.

Věta 14.1.12 (B–C podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)**.** *Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Pak posloupnost $\{\varphi_n\}$ konverguje stejnoměrně na Ω právě tehdy, když je splněna Bolzano–Cauchyova podmínka*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0, \infty)\, \forall p \in \mathbb{N}\, \forall x \in \Omega \qquad |\varphi_n(x) - \varphi_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Tato implikace okamžitě plyne z trojúhelníkové nerovnosti, neboť pokud $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na Ω, pak

$$|\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)| \leq |\varphi_{n+p}(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - \varphi_n(x)|$$

a to dává naši B–C podmínku.
„$\Leftarrow$“ Z naší B–C podmínky pro stejnoměrnou konvergenci máme pro každé $x \in \Omega$ zaručeno splnění B–C podmínky číselné posloupnosti $\{\varphi_n(x)\}$. Tyto posloupnosti proto musí konvergovat k reálným číslům, která označme $\varphi(x)$. Funkce $\varphi\colon x \mapsto \varphi(x)$ je proto bodovou limitou posloupnosti $\{\varphi_n\}$.

Zbývá ukázat, že získaná bodová konvergence je dokonce stejnoměrná. Zafixujme $\varepsilon > 0$ a vezměme jemu odpovídající $n_0 \in \mathbb{N}$ z B–C podmínky. Pak pro libovolné $n \geq n_0$ a $x \in \Omega$ máme díky bodové konvergenci a B–C podmínce

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| = \lim_{p\to\infty} |\varphi_n(x) - \varphi_{n+p}(x)| \leq \varepsilon.$$

□

Poznámka 14.1.13. V případě stejnoměrné konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ se uvedená B–C podmínka týká částečných součtů zkoumané řady a lze ji proto přepsat do tvaru

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0, \infty)\, \forall p \in \mathbb{N}\, \forall x \in \Omega \qquad \Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} \varphi_k(x) \Big| < \varepsilon.$$

Poznámka 14.1.14. Je přirozenou otázkou, zda pro stejnoměrnou konvergenci platí podobná aritmetika, jako je aritmetika limit pro posloupnosti. Díky trojúhelníkové nerovnosti je snadné nahlédnout, že

$$\varphi_n \rightrightarrows \varphi, \psi_n \rightrightarrows \psi \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_n \pm \psi_n \rightrightarrows \varphi \pm \psi$$

a také

$$\varphi_n \rightrightarrows \varphi, \alpha \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha\varphi_n \rightrightarrows \alpha\varphi.$$

Na druhou stranu neplatí třeba zachování stejnoměrné konvergence při součinu, což vidíme z příkladu

$$\varphi_n \equiv \frac{1}{n}, \quad \varphi \equiv 0, \quad \psi_n(x) = \psi(x) = x \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

Než přistoupíme ke studiu dalších vlastností stejnoměrné konvergence, dovybavíme se ještě několika nástroji pro určování stejnoměrné konvergence řad funkcí (výše uvedené nástroje, zejména Tvrzení o charakterizaci konvergence, tedy Tvrzení 14.1.6, by v případě práce s řadou funkcí požadovalo studium chování částečných součtů, jejichž předpis v mnoha případech neumíme získat).

14.2 Kritéria stejnoměrné konvergence řad funkcí

Věta 14.2.1 (Nutná podmínka stejnoměrné konvergence)**.** *Nechť $\{\varphi_k\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ stejnoměrně konverguje na Ω, pak $\varphi_k \rightrightarrows 0$ na Ω.*

Důkaz. Pokud existuje φ tak, že platí $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k =: s_n \rightrightarrows \varphi$, pak také máme $s_{n-1} \rightrightarrows \varphi$ a odečtením dostáváme požadovaný výsledek. □

Pro ověření (absolutní) stejnoměrné konvergence řad se nejčastěji používá následující kritérium.

Věta 14.2.2 (Weierstrassovo kritérium). *Nechť $\{\varphi_k\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ a $\{w_k\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}_0^+$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ konverguje stejnoměrně na Ω a nechť*

$$|\varphi_k(x)| \le w_k(x) \qquad \text{pro všechna } x \in \Omega \text{ a } k \in \mathbb{N},$$

pak $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|$ konvergují stejnoměrně na Ω a na Ω platí

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} w_k.$$

Důkaz. Protože $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ konverguje stejnoměrně na Ω, splňuje B–C podmínku pro stejnoměrnou konvergenci (Věta 14.2.1). Ta implikuje B–C podmínku pro stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|$ díky odhadu $|\varphi_k(x)| \le w_k(x)$, neboť pro všechna $n, p \in \mathbb{N}$ a $x \in \Omega$ máme

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} \varphi_k(x)\Big| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |\varphi_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} w_k(x).$$

Analogicky také plyne odhad pro součty řad. □

Poznámka 14.2.3. Předchozí věta se často, ale ne výlučně, používá pro případ, že w_k nezávisí na x, máme tedy odhad pomocí číselné řady a stačí ověřit její konvergenci.

Příklad 14.2.4. Uvažujme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$. Nutná podmínka stejnoměrné konvergence je splněna na $[0,1]$ (dokonce na $[-1,1]$). Řada však nemůže konvergovat stejnoměrně na intervalu $[0,1]$, protože nekonverguje v bodě 1. Pokud uvážíme interval $[0, 1-\delta]$, kde $\delta \in (0,1)$, pak máme

$$\sup_{[0,1-\delta]} \frac{x^k}{k} = \frac{(1-\delta)^k}{k}.$$

Protože $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\delta)^k}{k} < \infty$, Weierstrassovo kritérium (Věta 14.2.2) nám dává stejnoměrnou konvergenci naší řady na $[0, 1-\delta]$. Z dosavadních výsledků také vidíme, že máme lokálně stejnoměrnou konvergenci na $[0,1)$.

Naše řada nekonverguje stejnoměrně na $[0,1)$, neboť zde porušuje B–C podmínku; splňuje totiž její negaci

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall n_0 \in \mathbb{N}\, \exists n \in \mathbb{N} \cup [n_0, \infty)\, \exists p \in \mathbb{N}\, \exists x_0 \in \Omega \qquad |\varphi_n(x_0) - \varphi_{n+p}(x_0)| \ge \varepsilon. \tag{14.2.1}$$

Abychom toto ukázali, stačí si nejprve uvědomit, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $p \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \ge 2$. Nyní, když už máme čísla n a p zafixovaná, zvolme $x_0 \in (0,1)$ tak blízké číslu 1, že platí $x_0^{n+p} \ge \frac{1}{2}$. Pak nutně

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} x_0^k \ge 1.$$

Odtud vidíme, že pro $\varepsilon = 1$ není možné splnit B–C podmínku.

Jinou možností je ukázat sporem, že konvergence nemůže být stejnoměrná. Předpokládejme tedy na okamžik, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

konverguje stejnoměrně na $[0,1)$. Je tedy splněna B–C podmínka, což znamená, že

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} \cup [n_0, \infty)\, \forall p \in \mathbb{N}\, \forall x \in [0,1) \qquad \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k} < \varepsilon.$$

Pokud provedeme limitu pro $x \to 1_-$, dostáváme, že

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} \cup [n_0, \infty)\, \forall p \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \leq \varepsilon.$$

To je ovšem B–C podmínka pro konvergenci číselné řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, která nemůže být splněna, protože řada diverguje. Dospěli jsme ke sporu, proto řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ nemůže konvergovat stejnoměrně na $[0,1)$.

Poznámka 14.2.5. Poslední postup lze s úspěchem použít zejména u mocninných řad (obecněji u řad se spojitými členy) k vyvrácení stejnoměrné konvergence na intervalu přiléhajícím k bodu, kde řada diverguje. Nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ nekonverguje v bodě $x_1 > 0$. Pokud by tato řada stejnoměrně konvergovala na intervalu $[0, x_1)$, pak by zde splňovala B–C podmínku. Ke každému $\varepsilon > 0$ bychom pak měli $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k \Big| < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } x \in [0, x_1),\ n \geq n_0 \text{ a } p \in \mathbb{N}.$$

Odtud díky spojitosti funkcí $x \mapsto x^k$ dostáváme

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x_1^k \Big| \leq \varepsilon \qquad \text{pro všechna } n \geq n_0 \text{ a } p \in \mathbb{N}.$$

To implikuje konvergenci řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k$ a máme spor.

Stejným způsobem se dá postupovat na libovolném paprsku vycházejícím ze středu konvergenční kružnice mocninné řady.

Poznámka 14.2.6. Weierstrassovo kritérium (Věta 14.2.2) je při aplikacích poměrně rychlé, ale není příliš silné. Uvážíme-li například řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{(k,k+1)}$ (připomeňme, že $\chi_{(k,k+1)}$ značí charakteristickou funkci intervalu $(k, k+1)$, tedy funkci, která má hodnotu 1 na uvedeném intervalu a všude jinde je nulová), snadno se ověří její stejnoměrná konvergence na $\mathbb{R}$, ale při pokusu o aplikaci Weierstrassova kritéria nelze užít lepší volbu než $a_k = \frac{1}{k}$, čímž dostáváme harmonickou řadu, která diverguje.

Weierstrassovo kritérium se dá také použít k zesílení našich výsledků o konvergenci mocninných řad.

Důsledek 14.2.7. *Nechť mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ má poloměr konvergence $R \in (0,\infty]$. Pak konverguje lokálně stejnoměrně na*

$$B_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C}\colon |z-z_0| < R\}.$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $z_0 = 0$. Zvolme $z_1 \in B_R(0)$. K němu zvolme ještě $\varrho \in (|z_1|, R)$. Nyní máme $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\varrho^k < \infty$ (každá mocninná řada konverguje absolutně uvnitř svého konvergenčního kruhu) a navíc

$$|a_k z^k| = |a_k||z^k| \le |a_k|\varrho^k \quad \text{pro všechna } k \in \mathbb{N}_0 \text{ a } x \in B_\varrho(0).$$

Weierstrassovo kritérium (Věta 14.2.2) dává stejnoměrnou konvergenci na $B_\varrho(0)$, což je množina obsahující nějaké okolí bodu z_1. Protože $z_1 \in B_R(0)$ bylo libovolné, jsme hotovi. □

Příklad 14.2.8. (i) Řada $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ má poloměr konvergence $R = \infty$, a proto podle předchozího výsledku konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{C}$. Díky Borelově pokrývací větě (Věta 11.8.3) konverguje stejnoměrně na libovolném kompaktu (a na libovolné omezené množině, protože ta leží v nějaké uzavřené kouli). Nemůže však konvergovat stejnoměrně na $\mathbb{C}$, neboť $\sup_{\mathbb{C}} |\frac{z^k}{k!}| = \infty$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, což vylučuje splnění nutné podmínky stejnoměrné konvergence řady.
(ii) Uvažujme řadu $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{1+k^2x^2}$ na $\mathbb{R}$. Tato řada konverguje bodově všude na $\mathbb{R}$. Skutečně, pro $x = 0$ je to zřejmé a pro $x \neq 0$ máme odhad $|\frac{x}{1+k^2x^2}| \le |\frac{x}{k^2x^2}| = \frac{1}{k^2|x|}$. Pomocí Weierstrassova kritéria (Věta 14.2.2) snadno dokážeme stejnoměrnou konvergenci na množině $(-\infty,-\delta] \cup [\delta,\infty)$ pro libovolné $\delta > 0$, neboť na této množině máme

$$\left|\frac{x}{1+k^2x^2}\right| \le \left|\frac{x}{k^2x^2}\right| = \left|\frac{1}{k^2x}\right| \le \frac{1}{\delta}\frac{1}{k^2} \qquad \text{a} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\delta}\frac{1}{k^2} < \infty.$$

Na druhou stranu, na libovolném okolí počátku není splněna B–C podmínka stejnoměrné konvergence. Skutečně, zvolme libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ a položme $x = \frac{1}{2n_0}$. Pak

$$\sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{x}{1+k^2x^2} = \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{\frac{1}{2n_0}}{1+k^2\frac{1}{(2n_0)^2}} \ge \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{\frac{1}{2n_0}}{1+(2n_0)^2\frac{1}{(2n_0)^2}}$$
$$= \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{4n_0} = \frac{1}{4}.$$

Nyní si odvodíme kritéria stejnoměrné konvergence související s kritérii neabsolutní konvergence řad.

Věta 14.2.9 (Leibnizovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci)**.** *Nechť $\{a_k\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ splňujících $0 \le a_{k+1}(x) \le a_k(x)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in \Omega$. Pak*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k \text{ konverguje stejnoměrně na } \Omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_k \rightrightarrows 0 \text{ na } \Omega.$$

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Tato implikace plyne z nutné podmínky pro stejnoměrnou konvergenci řad funkcí.
„$\Leftarrow$“ Podle Leibnizova kritéria řada konverguje bodově na Ω. Zbývá dokázat stejnoměrnou konvergenci pomocí vhodného odhadu veličiny

$$\sup_{\Omega} |S(x) - S_n(x)| = \sup_{\Omega} \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k(x) \Big|.$$

Rozlišujeme dva případy. Nechť je $n+1$ liché, pak máme

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k(x) = -a_{n+1}(x) + (a_{n+2}(x) - a_{n+3}(x)) + \cdots \ge -a_{n+1}(x).$$

Zároveň máme

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k(x) = (-a_{n+1}(x) + a_{n+2}(x)) + (-a_{n+3}(x) + a_{n+4}(x)) + \cdots \le 0.$$

Pro $n+1$ sudé analogicky dostaneme $0 \le \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k(x) \le a_{n+1}(x)$.

Proto výsledek plyne z předpokladu $a_k \rightrightarrows 0$ na Ω. □

Definice 14.2.10 (Stejná stejnoměrná omezenost)**.** Nechť $\{b_k\}$ je posloupnost komplexních funkcí definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že tato posloupnost je *stejně stejnoměrně omezená* na Ω, jestliže existuje $K \in [0, \infty)$ splňující $|b_k(x)| \le K$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in \Omega$.
Někdy se též v této situaci říká, že posloupnost $\{b_k(x)\}$ je *stejnoměrně omezená* v $n \in \mathbb{N}$ a v $x \in \Omega$.

Věta 14.2.11 (Abelovo a Dirichletovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci)**.** *Nechť $\{a_k\}$ je posloupnost reálných funkcí definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ splňujících*

$$0 \le a_{k+1}(x) \le a_k(x)$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in \Omega$. Nechť $\{b_k\}$ je posloupnost komplexních funkcí definovaných na Ω.
(Dirichlet) Jestliže $a_k \rightrightarrows 0$ na Ω a posloupnost částečných součtů posloupnosti $\{b_k\}$ je stejně stejnoměrně omezená, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje stejnoměrně na Ω.
(Abel) Jestliže $\{a_k\}$ je stejně stejnoměrně omezená na Ω a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje stejnoměrně na Ω, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje stejnoměrně na Ω.

Důkaz. Nejprve předpokládejme Dirichletovy podmínky a ukažme, že zkoumaná řada splňuje B–C podmínku pro stejnoměrnou konvergenci. Zvolme $\varepsilon > 0$. Ve znění nerovnosti z B–C podmínky si členy posloupnosti $\{b_k\}$ vyjádříme pomocí částečných součtů této posloupnosti, které budeme značit B_n, a máme

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k &= a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{n+p-1}b_{n+p-1} + a_{n+p}b_{n+p}\\ &= a_{n+1}(B_{n+1} - B_n) + a_{n+2}(B_{n+2} - B_{n+1})\\ &\qquad + \cdots + a_{n+p-1}(B_{n+p-1} - B_{n+p-2}) + a_{n+p}(B_{n+p} - B_{n+p-1})\\ &= -B_n a_{n+1} + B_{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2}) + B_{n+2}(a_{n+2} - a_{n+3})\\ &\qquad + \cdots + B_{n+p-1}(a_{n+p-1} - a_{n+p}) + a_{n+p}B_{n+p}.\end{aligned}$$

Odtud s využitím monotonie $\{a_k\}$, stejné stejnoměrné omezenosti $\{B_n\}$ a vlastnosti $a_k \rightrightarrows 0$, dostáváme pro n dostatečně velké následující odhad

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\Big| &\le |-B_n a_{n+1}| + |B_{n+1}|(a_{n+1} - a_{n+2}) + |B_{n+2}|(a_{n+2} - a_{n+3})\\ &\qquad + \cdots + |B_{n+p-1}|(a_{n+p-1} - a_{n+p}) + |a_{n+p}B_{n+p}|\\ &\le C\varepsilon + C(a_{n+1} - a_{n+2}) + C(a_{n+2} - a_{n+3})\\ &\qquad + \cdots + C(a_{n+p-1} - a_{n+p}) + C\varepsilon\\ &= C\varepsilon + C(a_{n+1} - a_{n+p}) + C\varepsilon \le C\varepsilon + Ca_{n+1} + C\varepsilon \le 3C\varepsilon.\end{aligned}$$

Ověřili jsme B–C podmínku pro limitu částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ a jsme v prvním případě hotovi.

Nyní předpokládejme Abelovy podmínky. Označme $B := \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Díky tomu, že $B_n \rightrightarrows B$ na Ω, výše odvozený zápis výrazu $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k$ dává

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\Big| &= \Big| -B_n a_{n+1} + B_{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2}) + B_{n+2}(a_{n+2} - a_{n+3})\\ &\qquad + \cdots + B_{n+p-1}(a_{n+p-1} - a_{n+p}) + a_{n+p}B_{n+p}\Big|\\ &= \Big| -(B_n - B)a_{n+1} + (B_{n+1} - B)(a_{n+1} - a_{n+2})\\ &\qquad + \cdots + (B_{n+p-1} - B)(a_{n+p-1} - a_{n+p}) + (B_{n+p} - B)a_{n+p}\Big|\\ &\le |B_n - B|a_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |B_k - B|(a_k - a_{k+1}) + |B_{n+p} - B|a_{n+p}\\ &\le \varepsilon a_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \varepsilon(a_{n+k} - a_{n+k+1}) + \varepsilon a_{n+p}\\ &= \varepsilon a_{n+1} + \varepsilon(a_{n+1} - a_{n+p}) + \varepsilon a_{n+p} = 2\varepsilon a_{n+1} \le 2C\varepsilon.\end{aligned}$$

Opět jsme ověřili B-C podmínku a jsme hotovi. □

Nyní jsme již připraveni dokázat Abelovu větu (Věta 9.3.8), kterou jsme používali ke sčítání řad.

Věta 14.2.12 (Abelova věta)**.** *Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$ a odpovídající mocninná řada $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ má poloměr konvergence $R \in (0, \infty)$. Je-li $\varphi \in [0, 2\pi)$ takové, že pro $z = R\mathrm{e}^{i\varphi}$ konverguje řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, pak mocninná řada $f(z)$ konverguje stejnoměrně na množině $\{t\mathrm{e}^{i\varphi} : t \in [0, R]\}$ a funkce $t \mapsto f(t\mathrm{e}^{i\varphi})$ je spojitá na $[0, R]$.*

Důkaz. Položme $\alpha_k = (\frac{t}{R})^k$ a $\beta_k = a_k(R\mathrm{e}^{i\varphi})^k$. Pak funkční řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (t\mathrm{e}^{i\varphi})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \beta_k$$

konverguje stejnoměrně na $[0, R]$ podle Abelova kritéria. Navíc stejnoměrná limita spojitých funkcí (částečných součtů mocninné řady) je spojitá. □

Příklad 14.2.13. V předchozích kapitolách jsme zjistili, že na $(-1, 1)$ platí

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Podle Leibnizova kritéria pro stejnoměrnou konvergenci (tedy Věty 14.2.9; aplikujeme jej zvlášť na intervalech $[-1, 0]$ a $[0, 1]$ kvůli změně znaménka činitele x^{2k+1}, v prvním případě navíc vytýkáme znaménko mínus před sumu) dostáváme, že funkční řada na pravé straně konverguje stejnoměrně na $[-1, 1]$. Díky tomu je součet spojitý, a proto rovnost platí dokonce na intervalu $[-1, 1]$. Jako vedlejší produkt jsme sečetli řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Příklad 14.2.14. Vyšetřeme, kde konvergují stejnoměrně funkční řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} \qquad \text{a} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}. \tag{14.2.2}$$

Stačí se omezit na podintervaly intervalu $[0, 2\pi)$. Předně máme

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} \qquad \text{a} \qquad \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}.$$

Díky tomu ze vztahů $\sin t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}$ a $\cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}$ snadno obdržíme, že posloupnosti funkcí $\{\cos kx\}$ a $\{\sin kx\}$ mají stejně stejnoměrně omezené částečné součty na $[\delta, 2\pi - \delta]$ pro libovolné $\delta \in (0, \pi)$. Z Dirichletova kritéria pro stejnoměrnou konvergenci proto dostáváme, že na intervalech typu $[\delta, 2\pi - \delta]$ obě řady konvergují stejnoměrně.

Ukažme, že žádná z našich řad nekonverguje stejnoměrně na $(0,2\pi)$ (zkoumat stejnoměrnou konvergenci na intervalu $[0,2\pi)$ není potřeba: první z řad nekonverguje v nule, druhá v nule konverguje, a proto případná stejnoměrná konvergence na $(0,2\pi)$ je ekvivalentní stejnoměrné konvergenci na $[0,2\pi)$). Zafixujme libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$, položme $p = n_0$ a $x = \frac{1}{4n_0}$. Pak máme

$$\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p} \frac{\cos kx}{k} = \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{\cos(\frac{k}{4n_0})}{k} \geq \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{\cos(\frac{2n_0}{4n_0})}{2n_0} = \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}$$

a

$$\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p} \frac{\sin kx}{k} = \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{\sin(\frac{k}{4n_0})}{k} \geq \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{\sin(\frac{n_0}{4n_0})}{2n_0} = \frac{1}{2}\sin\frac{1}{4}.$$

Odtud vidíme, že v obou případech je porušena B–C podmínka. Poznamenejme ještě, že bodovou konvergenci první řady máme na intervalu $(0,2\pi)$ a druhá řada bodově konverguje na celém intervalu $[0,2\pi)$.

Poznámka 14.2.15. Při vyvracení stejnoměrné konvergence na intervalu $(0,2\pi)$ jsme u první řady z (14.2.4) také mohli použít postup z Poznámky 14.2.5. Pokud by totiž funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$ konvergovala stejnoměrně na $(0,2\pi)$, podle B–C podmínky bychom měli, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ a $x \in (0,2\pi)$

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos kx}{k}\Big| < \varepsilon.$$

Potom díky spojitosti funkce $\cos(kx)$ v bodě $x = 0$ dostáváme, že

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos 0}{k}\Big| = \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k}\Big| \leq \varepsilon,$$

což dává spor, neboť řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje.

14.3 Záměna limit, derivace a integrál posloupnosti a řady funkcí

Věta 14.3.1 (Moore–Osgoodova věta). *Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $(a,b) \subset \mathbb{R}$ a $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nechť $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na (a,b) a pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje vlastní $\lim_{x\to b_-} \varphi_n(x)$. Pak existuje vlastní $\lim_{x\to b_-} \varphi(x)$ a platí*

$$\lim_{x\to b_-} \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to b_-} \varphi_n(x).$$

Důkaz. Označme $c_n := \lim_{x\to b_-} \varphi_n(x)$. Nejprve ukažme, že posloupnost $\{c_n\}$ konverguje ověřením B–C podmínky. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak díky stejnoměrné konvergenci posloupnosti $\{\varphi_n\}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro libovolná $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ platí

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n+p}(x)| < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } x \in (a,b).$$

Pro zafixovaná n, p nyní můžeme zvolit $x \in (a, b)$ tak blízko k bodu b, že máme

$$|c_n - c_{n+p}| \leq |c_n - \varphi_n(x)| + |\varphi_n(x) - \varphi_{n+p}(x)| + |\varphi_{n+p}(x) - c_{n+p}| < 3\varepsilon.$$

Existuje proto vlastní $c := \lim_{n\to\infty} c_n$.

Zbývá ukázat, že $c = \lim_{x\to b_-} \varphi(x)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ tak velké, že

$$|c_n - c| < \varepsilon \qquad \text{a} \qquad |\varphi_n - \varphi| < \varepsilon \quad \text{na } (a, b).$$

Konečně, díky tomu, že $c_n = \lim_{x\to b_-} \varphi_n(x)$, existuje $\delta > 0$ tak malé, že platí $|c_n - \varphi_n(x)| < \varepsilon$ na $(b - \delta, b)$. Proto pro všechna $x \in (b - \delta, b)$ máme

$$|\varphi(x) - c| \leq |\varphi(x) - \varphi_n(x)| + |\varphi_n(x) - c_n| + |c_n - c| < 3\varepsilon.$$

□

Poznámka 14.3.2. (i) Závěr Moore–Osgoodovy věty (Věty 14.3.1) říká

$$\lim_{x\to b_-} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to b_-} \varphi_n(x).$$

(ii) Analogická věta platí pro stejnoměrně konvergentní řady funkcí.
(iii) Náš výsledek z teorie metrických prostorů tvrdící, že stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá, je vlastně důsledkem Moore-Osgoodovy věty (to není nijak překvapivé, důkazy jsou si hodně podobné).
(iv) Pokud by od určitého indexu platilo $c_n = \infty$, drobnou modifikací důkazu by šlo získat $\lim_{x\to b_-} \varphi(x) = \infty$ (podobně pro limitu $-\infty$).
(v) Snadno se dá dokázat i verze Moore–Osgoodovy věty pro funkce více proměnných, která pracuje s předpokladem stejnoměrné konvergence na nějakém prstencovém okolí bodu, v němž počítáme limitu funkčních hodnot.

Poznámka 14.3.3. Moore–Osgoodova věta (Věta 14.3.1) se dá také používat jako nástroj k vyvrácení stejnoměrné konvergence. Uvažme například funkce $\varphi_n(x) = x^n$ na $[0, 1)$, kde mají bodovou limitu $\varphi \equiv 0$. Pak tyto funkce zde nemohou konvergovat stejnoměrně, neboť by platilo

$$1 = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1_-} x^n = \lim_{x\to 1_-} \lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

což by nás přivedlo ke sporu.

Příklad 14.3.4. (i) Z prvního semestru víme, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad \text{na } (-1, 1).$$

Podle Weierstrassovy věty (Věta 14.2.2) snadno ověříme, že řada nalevo konverguje stejnoměrně na $[-1 + \delta, 1 - \delta]$ pro libovolné $\delta \in (0, 1)$. Řada nekonverguje stejnoměrně na $[-1, 1 - \delta]$ protože v bodě $x = -1$ nesplňuje nutnou podmínku konvergence číselné řady. Nekonverguje stejnoměrně ani na $(-1, 1-\delta]$, protože pak by podle Moore–Osgoodovy věty (Věta 14.3.1) platilo

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}.$$

Naše řada nekonverguje stejnoměrně také na $[-1+\delta, 1)$, protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$\lim_{x\to 1_-} \sum_{k=0}^{n} x^k = n+1 \qquad \text{(hlavně je tato limita konečná)}$$

a Moore-Osgoodova věta by v tom případě dávala, že $\lim_{x\to 1_-} \frac{1}{1-x}$ je také konečné číslo, což není pravda.

Poznámka 14.3.5. Všimněme si v předchozím příkladu, že césarovský součet $(C,1)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = \frac{1}{2}$.

Vraťme se ještě na chvíli k otázce zachování spojitosti při limitním přechodu. Již víme, že bodová konvergence zachování spojitosti nezaručuje (připomeňme si posloupnost $\{x^n\}$ na $[0,1]$), stejnoměrná či lokálně stejnoměrná konvergence spojitost zachovává. Žádná ze dvou posledně jmenovaných konvergencí však pro zachování spojitosti není nutná, jak ukazuje příklad

$$\varphi_n(x) = nx\mathrm{e}^{-nx} \qquad \text{na } [0,1],$$

kde bodovou limitou je spojitá funkce $\varphi \equiv 0$, ale volba $x_n := \frac{1}{n}$ dává

$$\varphi_n(x_n) = \mathrm{e}^{-1},$$

což vyvrací stejnoměrnou konvergenci na každém okolí počátku. Na druhou stranu, v případě monotonních posloupností funkcí je vztah mezi stejnoměrnou konvergencí a zachováním spojitosti podstatně silnější.

Věta 14.3.6 (Dini)**.** *Nechť* $\{\varphi_n\} \subset C([a,b])$, $\varphi \in C([a,b])$, $\varphi_n \to \varphi$ *na* $[a,b]$ *a* $\varphi_{n+1} \le \varphi_n$ *na* $[a,b]$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$. *Pak* $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ *na* $[a,b]$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\varphi \equiv 0$. Pokud by neplatilo $\varphi_n \rightrightarrows 0$ na $[a,b]$, existovalo by $\varepsilon > 0$ takové, že pro nekonečně mnoho indexů bychom měli $\sup_{[a,b]} \varphi_n \ge 2\varepsilon$. Po přechodu k podposloupnosti můžeme předpokládat, že to platí pro všechny indexy, neboli existuje posloupnost $\{x_n\} \subset [a,b]$ splňující $\varphi_n(x_n) \ge \varepsilon$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Díky Weierstrassově větě (Věta 14.2.2) můžeme dalším přechodem k podposloupnosti zařídit, že

$$x_n \to x_0 \in [a,b].$$

Nyní díky tomu, že $\varphi_n(x_0) \to 0$, lze zvolit $m \in \mathbb{N}$ splňující $\varphi_m(x_0) < \frac{\varepsilon}{3}$. Dále existuje $p \ge m$ takové, že díky vlastnosti $x_n \to x_0$ a spojitosti funkce φ_m máme $|\varphi_m(x_p) - \varphi_m(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{3}$. Proto předpoklad $\varphi_{n+1} \le \varphi_n$ na $[a,b]$ dává

$$\varepsilon \le \varphi_p(x_p) \le \varphi_m(x_p) \le \varphi_m(x_0) + |\varphi_m(x_p) - \varphi_m(x_0)| < \frac{2\varepsilon}{3}$$

a máme spor. $\square$

Poznámka 14.3.7. Diniho věta (Věta 14.3.6) neplatí na otevřeném intervalu, jak ukazuje nám již dobře známá posloupnost $\{x^n\}$ uvažovaná na $(0,1)$. Stejně tak byla důležitá omezenost uvažovaného intervalu, jak nám ukazuje posloupnost $\{\frac{x}{n}\}$ uvažovaná na $\mathbb{R}$.

Poznámka 14.3.8. Při aplikaci Diniho věty (Věta 14.3.6) na řady je požadovaná monotonie částečných součtů, která je ekvivalentní nezápornosti členů řady.

K nejdůležitějším aplikacím stejnoměrné konvergence patří záměna limity a integrálu. Výsledek si vyslovíme pro posloupnost funkcí. Pro řady samozřejmě platí analogický výsledek.

Věta 14.3.9 (O záměně stejnoměrné limity a Riemannova integrálu)**.** *Nechť posloupnost* $\{\varphi_n\} \subset C([a,b])$ *a* $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ *na* $[a,b]$*. Pak*

$$(\mathcal{R})\int_a^b \varphi_n \,\mathrm{d}x \overset{n\to\infty}{\to} (\mathcal{R})\int_a^b \varphi \,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Díky spojitosti všech funkcí (pro φ to plyne z vlastností stejnoměrně konvergentních posloupností) Riemannovy integrály existují a pro n dostatečně velké máme

$$\left|(\mathcal{R})\int_a^b \varphi_n \,\mathrm{d}x - (\mathcal{R})\int_a^b \varphi \,\mathrm{d}x\right| \leq (\mathcal{R})\int_a^b |\varphi_n - \varphi| \,\mathrm{d}x \leq (\mathcal{R})\int_a^b \varepsilon \,\mathrm{d}x = (b-a)\varepsilon,$$

z čehož plyne požadovaný výsledek. □

Poznámka 14.3.10. (i) V uvedené situaci Riemannův a Newtonův integrál splývají, výsledek tedy bylo možné vyslovit i pro Newtonův integrál.
(ii) Výsledek není možné převést na případ neomezeného intervalu (s Newtonovým integrálem), jak ukazuje posloupnost $\varphi_n \equiv \frac{1}{n}$, která splňuje $\varphi_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$, ale

$$(\mathcal{N})\int_0^\infty \varphi_n \,\mathrm{d}x = \infty \qquad \text{zatímco} \qquad (\mathcal{N})\int_0^\infty 0 \,\mathrm{d}x = 0.$$

(iii) Podobný výsledek neplatí pro bodovou konvergenci. Stačí položit pro $n \geq 2$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{pro } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ n - n^2(x - \frac{1}{n}) & \text{pro } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{pro } x \in [\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

Pak $\varphi_n \to 0$ na $[0,1]$, ale

$$(\mathcal{R})\int_0^1 \varphi_n \,\mathrm{d}x = 1, \qquad \text{zatímco} \qquad (\mathcal{R})\int_0^1 0 \,\mathrm{d}x = 0.$$

Příklad 14.3.11. (i) Máme

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\Big) \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^k}{k!} \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Big[\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\Big]_0^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} - 1 = [\mathrm{e}^x]_0^1.\end{aligned}$$

Prohození sumy a integrálu nám umožnila stejnoměrná konvergence, která plyne z Diniho věty (Věta 14.3.6) nebo Weierstrassova kritéria (Věta 14.2.2).
(ii) Platí

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}\Big) \,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{k!} \,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\frac{x^k}{k!k}\Big]_0^1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!k}.$$

Prohození sumy a integrálu se zdůvodní jako výše, jen v případě aplikace Diniho věty je nutné pracovat s funkcí $\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$ spojitě dodefinovanou v počátku hodnotou 1.

Poznámka 14.3.12. První část předchozího příkladu má jen pramalou hodnotu, neboť jsme použili zdlouhavý postup, třebaže integrand má dobře známou primitivní funkci. Druhá část je podstatně zajímavější, neboť naše techniky hledání primitivní funkce z první části skript neumožňují takovou úlohu řešit. Výsledek je však neuspokojivý tím, že řadu neumíme sečíst. Zde je ale vhodné poznamenat, že jsme přece jen nějaký pokrok udělali. Získaná řada se dá celkem pohodlně použít k numerickým aproximacím skutečné hodnoty integrálu (zkuste si rozmyslet, kolik členů je potřeba sečíst k dosažení přesnosti třeba $\frac{1}{1000}$).

Předchozí příklad se dal také řešit pomocí technik z teorie mocninných řad. Techniky v této kapitole jsou však univerzálnější, neboť v matematice nacházejí uplatnění i další typy funkčních řad.

Příklad 14.3.13. Zkusme naše metody použít na výpočet (Newtonova) integrálu

$$\begin{aligned}I := \int_0^{\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x + 1} \,\mathrm{d}x &= \int_0^{\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \Big(\frac{x}{\mathrm{e}^x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathrm{e}^{-kx}\Big) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x \mathrm{e}^{-kx}\Big) \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

K prohození sumy a integrálu potřebujeme stejnoměrnou konvergenci na omezeném intervalu, proto chvíli pracujme s integrály (v dalším je $m \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} I_m :&= \int_0^m \Big(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} x\mathrm{e}^{-kx}\Big)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\int_0^m x\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\Big(-\Big[\frac{x}{k}\mathrm{e}^{-kx}\Big]_0^m + \int_0^m \frac{1}{k}\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\Big(-\Big[\frac{x}{k}\mathrm{e}^{-kx}\Big]_0^m - \Big[\frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{-kx}\Big]_0^m\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\Big(\frac{1}{k^2} - \frac{m}{k}\mathrm{e}^{-km} - \frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{-km}\Big). \end{aligned}$$

Při integraci jsme použili metodu per partes a prohození sumy a integrálu nám umožnila stejnoměrná konvergence plynoucí z Leibnizova kritéria (Věta 14.2.9), při jehož aplikaci jsme využili (ověřte pomocí hledání globálních extrémů)

$$0 \le x\mathrm{e}^{-kx} \le \frac{1}{k}\mathrm{e}^{-k\frac{1}{k}} \qquad \text{na } [0,\infty).$$

Nyní díky definici Newtonova integrálu dostáváme

$$\begin{aligned} I = \lim_{m\to\infty} I_m &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2} + \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\Big(-\frac{m}{k}\mathrm{e}^{-km} - \frac{m}{k^2}\mathrm{e}^{-km}\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Při přechodu z prvního na druhý řádek jsme využili toho, že

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{m}{k}\mathrm{e}^{-km} \in (0, m\mathrm{e}^{-m}),$$

neboť posloupnost $k \mapsto \frac{m}{k}\mathrm{e}^{-km}$ je klesající a kladná (to se využije při zkoumání lichých a sudých částečných součtů jako v důkazu Leibnizova kritéria), podobně pro řadu $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{m}{k^2}\mathrm{e}^{-km}$. Dodejme ještě, že $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi}{6}$, což zjistíme třeba v kapitole o Fourierových řadách; proto $I = \frac{\pi}{12}$.

Poznámka 14.3.14. Z příkladů vidíme, že prohození sumy (nebo limity) a integrálu může být užitečný nástroj pro výpočet integrálu (pokud se nám podaří vzniklou řadu sečíst). Připomeňme, že k tomuto prohození nestačí bodová konvergence. Zesílení bodové konvergence na konvergenci stejnoměrnou však není zdaleka jediná možnost. V teorii Lebesgueova integrálu se dozvíme několik dalších přístupů k zesílení bodové konvergence, abychom sumu a integrál mohli prohazovat. Dodejme ale, že důkazy příslušných tvrzení se opírají o teorii Lebesgueova integrálu.

V dalším se budeme zabývat otázkou, jak souvisí stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí se stejnoměrnou konvergencí odpovídajících derivací a stejnoměrnou konvergencí odpovídajících primitivních funkcí. Připomeňme, že u mocninných řad, které jsou speciálním případem námi uvažovaných posloupností či řad funkcí, je přechod k primitivní funkci či libovolné derivaci povolenou operací (zachovává se poloměr konvergence a vždy máme lokálně stejnoměrnou konvergenci na konvergenčním kruhu). Věta o záměně stejnoměrné limity a Riemannova integrálu (Věta 14.3.9) okamžitě dává, že pro $\{\varphi_n\} \subset C([a,b])$ dostáváme stejnoměrnou konvergenci funkcí

$$\Phi_n(x) := \int_a^x \varphi_n \, \mathrm{d}x$$

definovaných na $[a,b]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Na neomezeném intervalu takto zřejmě získáme jen lokálně stejnoměrnou konvergenci. Libovolné primitivní funkce (připomeňme, že jsou určeny jednoznačně až na aditivní konstantu) brát nemůžeme, jak ukazuje volba $\varphi_n \equiv 0$ a $\Phi_n = n$. Otázka zachování stejnoměrné konvergence při derivování má jasně negativní odpověď, neboť funkce s malými funkčními hodnotami mohou mít velké hodnoty derivace. Stačí si třeba povšimnout, že

$$\frac{1}{n}\sin(nx) \rightrightarrows 0 \quad \text{na } \mathbb{R},$$

ale

$$\Big(\frac{1}{n}\sin(nx)\Big)' = \cos(nx)$$

nekonverguje stejnoměrně na žádném nedegenerovaném intervalu (obor hodnot každé periody je $[-1,1]$). V našich výsledcích budeme vždy získávat stejnoměrnou konvergenci nederivovaných funkcí ze stejnoměrné konvergence funkcí derivovaných.

Věta 14.3.15 (O vztahu stejnoměrné konvergence a derivace)**.** *Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z omezeného intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Nechť každá funkce φ_n má na (a,b) vlastní derivaci, $\{\varphi_n'\}$ konverguje stejnoměrně na (a,b) a existuje $x_0 \in (a,b)$ takové, že $\{\varphi_n(x_0)\}$ konverguje. Pak existuje funkce φ taková, že $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na (a,b), φ má vlastní derivaci na (a,b) a $\varphi_n' \rightrightarrows \varphi'$.*

Důkaz. Nejprve dokažme, že posloupnost $\{\varphi_n\}$ splňuje B–C podmínku pro stejnoměrnou konvergenci. Nechť $n, p \in \mathbb{N}$. Pak díky Lagrangeově větě o přírůstku funkce (Věta 6.3.3) aplikované na funkci $\varphi_{n+p} - \varphi_n$ máme pro libovolné $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)| &\le |\varphi_{n+p}(x_0) - \varphi_n(x_0)| \\ &\qquad + |(\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)) - (\varphi_{n+p}(x_0) - \varphi_n(x_0))| \\ &\le |\varphi_{n+p}(x_0) - \varphi_n(x_0)| + |\varphi_{n+p}'(\xi) - \varphi_n'(\xi)|(b-a). \end{aligned}$$

Nyní již jen stačí první člen úplně napravo odhadnout pomocí B–C podmínky odpovídající konvergenci číselné posloupnosti $\{\varphi_n(x_0)\}$ a druhý člen pomocí B–C podmínky odpovídající stejnoměrné konvergenci posloupnosti funkcí $\{\varphi_n'\}$ na

(a,b). Výsledný odhad nezávisí na volbě x, máme tedy splněnu B–C podmínku pro stejnoměrnou konvergenci $\{\varphi_n\}$ na (a,b). Limitu označme φ.

Ukažme ještě, že pro libovolné $x \in (a,b)$ platí $\varphi_n'(x) \to \varphi'(x)$ (to k dokončení důkazu stačí, neboť již víme, že $\{\varphi_n'\}$ konverguje stejnoměrně a odpovídající stejnoměrná limita je pak také bodovou limitou). Definujme

$$\psi_n(h) := \frac{\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)}{h} \qquad \text{pro } h \in (0, b-x).$$

Pak aplikací Lagrangeovy věty o přírůstku funkce na funkci $\varphi_{n+p} - \varphi_n$ dostáváme

$$\begin{aligned} |\psi_{n+p}(h) - \psi_n(h)| &= \left| \frac{(\varphi_{n+p}(x+h) - \varphi_n(x+h)) - (\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x))}{h} \right| \\ &= |\varphi_{n+p}'(\xi) - \varphi_n'(\xi)|. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že stejnoměrná konvergence posloupnosti $\{\varphi_n'\}$ implikuje stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $\{\psi_n\}$ na $(0, b-x)$ (povšimněme si, že bodovou limitou je funkce $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$). Moore–Osgoodova věta (Věta 14.3.1) nyní dává

$$\begin{aligned} \varphi_+'(x) &= \lim_{h \to 0_+} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0_+} \lim_{n \to \infty} \psi_n(h) = \lim_{n \to \infty} \lim_{h \to 0_+} \psi_n(h) \\ &= \lim_{n \to \infty} \lim_{h \to 0_+} \frac{\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)}{h} = \lim_{n \to \infty} {\varphi_n}_+'(x). \end{aligned}$$

Pro derivaci zleva bychom postupovali analogicky. □

Náš poslední výsledek se dá přeformulovat pro primitivní funkce a také pro řady.

Důsledek 14.3.16 (O stejnoměrné limitě primitivních funkcí). *Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z omezeného intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Nechť každá funkce φ_n má na (a,b) primitivní funkci Φ_n, $\{\varphi_n\}$ konverguje stejnoměrně na (a,b) k jisté funkci φ a existuje $x_0 \in (a,b)$ takové, že $\{\Phi_n(x_0)\}$ konverguje. Pak φ má primitivní funkci na (a,b), označme ji Φ, a platí pro ni $\Phi_n \rightrightarrows \Phi$ na (a,b).*

Důsledek 14.3.17 (O stejnoměrné limitě řady primitivních funkcí). *Nechť $\{\varphi_k\}$ je posloupnost funkcí z omezeného intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Nechť každá funkce φ_k má na (a,b) primitivní funkci Φ_k, $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ konverguje stejnoměrně na (a,b) k jisté funkci φ a existuje $x_0 \in (a,b)$ takové, že $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x_0)$ konverguje. Pak φ má primitivní funkci na (a,b), označme ji Φ, a platí pro ni $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \rightrightarrows \Phi$ na (a,b).*

Důsledek 14.3.18 (O derivaci stejnoměrně konvergentní řady). *Nechť $\{\varphi_k\}$ je posloupnost funkcí z omezeného intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Nechť každá funkce φ_k má na (a,b) vlastní derivaci, $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k'$ konverguje stejnoměrně na (a,b) a existuje $x_0 \in (a,b)$ takové, že $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x_0)$ konverguje. Pak existuje funkce φ taková, že $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \rightrightarrows \varphi$ na (a,b), φ má vlastní derivaci na (a,b) a $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k' \rightrightarrows \varphi'$.*

Připomeňme, že stejnoměrná konvergence byla základním kamenem důkazu Picard–Lindelöfovy existenční věty (Věta 10.3.5), tj. věty o existenci a jednoznačnosti řešení pro systémy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Naše nové výsledky, kupříkladu Důsledek o derivaci stejnoměrně konvergentní řady (Důsledek 14.3.18), mají aplikace dokonce přímo při řešení diferenciálních rovnic (tedy nejen v důkazech).

Příklad 14.3.19. Zabývejme se řešením (parciální diferenciální) rovnice vedení tepla v jedné prostorové dimenzi (standardně se interpretuje jako vedení tepla homogenním drátem)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{pro } t \in (0,T) \text{ a } x \in (0,\pi),$$

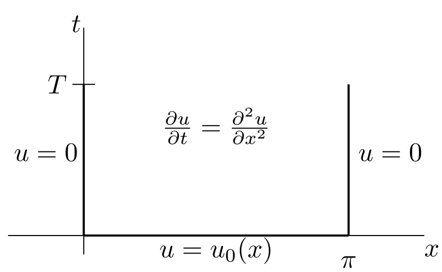
kde $T > 0$ a hledaná funkce u je dvakrát spojitě diferencovatelná podle x na $(0,\pi)$, jedenkrát podle t na $(0,T)$, $u \in C([0,T] \times [0,\pi])$ a splňuje okrajové podmínky

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \qquad \text{pro všechna } t \in (0,T)$$

a počáteční podmínku

$$u(0,x) = u_0(x) \qquad \text{pro všechna } x \in [0,\pi],$$

kde $u_0 \in C([0,\pi])$ je zadaná funkce a platí pro ni $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$ (kompatibilita počátečních a okrajových podmínek). V druhé části příkladu budeme uvažovat několik konkrétních voleb funkce u_0.



Obrázek 14.2: Ilustrace k zadání rovnice vedení tepla.

Rovnici budeme řešit *Fourierovou metodou rozdělení proměnných*, která spočívá v tom, že nejprve nalezneme velmi speciální netriviální řešení ve tvaru

$$u(t,x) = T(t)X(x),$$

kde $X \in C^2((0,\pi)) \cap C([0,\pi])$ a $T \in C^1((0,T)) \cap C([0,T])$, a pak s využitím linearity rovnice prostor řešení rozšíříme. Rovnice získává tvar (časovou derivaci značíme tečkou)

$$X(x)\dot{T}(t) = X''(x)T(t).$$

V bodech, kde $T(t) \neq 0$ a $X(x) \neq 0$, proto platí

$$\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Obě strany poslední rovnice musí tedy být konstantní. Odpovídající konstantu označme λ, čímž dostáváme

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \qquad \text{a} \qquad \dot{T}(t) - \lambda T(t) = 0.$$

První rovnice má řešení

$$X(x) = \begin{cases} C_1 x + C_2 & \text{pro } \lambda = 0 \\ C_1 \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda} x} + C_2 \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda} x} & \text{pro } \lambda > 0 \\ C_1 \cos(\sqrt{|\lambda|} x) + C_2 \sin(\sqrt{|\lambda|} x) & \text{pro } \lambda < 0. \end{cases}$$

Pokud se již nyní pokusíme splnit okrajové podmínky $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$, dostáváme podmínku (hledáme netriviální řešení, tudíž nulovost nezařizuje funkce T) $X(0) = X(\pi) = 0$. Tu se nám povede splnit jen ve třetím případě a ještě jen v situaci, kdy $C_1 = 0$ a $\lambda = -n^2$, kde $n \in \mathbb{N}$. V tomto případě pak druhou diferenciální rovnici řeší funkce $T(t) = \mathrm{e}^{-n^2 t}$. Celkově máme pro každé $n \in \mathbb{N}$ řešení ($c_n \in \mathbb{R}$)

$$u_n(t,x) := c_n \mathrm{e}^{-n^2 t} \sin(nx),$$

které splňuje $u_n(0,x) = c_n \sin(nx)$. Snadno se ověří, že i v bodech, kde $\sin(nx) = 0$, je splněna původní rovnice.

Zřejmě libovolná konečná lineární kombinace získaných funkcí je opět řešením dané rovnice. Navíc $u(0,x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin(nx)$. Nás bude zajímat, zda je řešením naší úlohy i

$$u(t,x) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{-n^2 t} \sin(nx).$$

První otázkou je, zda umíme funkci u_0 přiřadit posloupnost koeficientů $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$, aby platilo

$$u_0(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx).$$

Jedná se o netriviální otázku, kterou se budeme zabývat v teorii *Fourierových řad* (dozvíme se v ní, které funkce je možné rozkládat do tvaru $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)$, jakým způsobem se uvedené řady sčítají a jakým způsobem konvergují k původní funkci).

Pro jednoduchost v dalším například předpokládejme, že máme

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sin(nx),$$

pro nějaké $p \in (0,\infty)$. Pokud položíme $c_n = \frac{1}{n^p}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, máme splněnou počáteční i okrajovou podmínku. Zbývá ukázat, že $u \in C([0,T] \times [0,\pi])$, je dvakrát spojitě diferencovatelná podle proměnné x a jedenkrát podle proměnné t na $(0,T)\times(0,\pi)$ a platí

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad \text{na } (0,T)\times(0,\pi).$$

Pokud jde o spojitost na množině $[0,T]\times[0,\pi]$, díky Weierstrassovu kritériu (Věta 14.2.2) řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\mathrm{e}^{-n^2t}\sin(nx)$ zde pro všechna $p>1$ konverguje stejnoměrně. Proto spojitost jednotlivých členů řady zaručuje spojitost funkce u.

Přistupme k ověření splnění diferenciální rovnice. K tomu nám stačí, aby platila řetězová rovnost (v následujícím výpočtu potřebujeme ověřit druhou a předposlední rovnost, ostatní rovnosti jsou jasné)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\mathrm{e}^{-n^2t}\sin(nx)\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-n^2t}\sin(nx)\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}n^2\mathrm{e}^{-n^2t}\sin(nx)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\mathrm{e}^{-n^2t}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin(nx)\\&=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\mathrm{e}^{-n^2t}\sin(nx)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

Při ověření druhé rovnosti použijeme Důsledek o derivaci stejnoměrně konvergentní řady (Důsledek 14.3.18). Potřebujeme ukázat, že pro každé zafixované $x\in(0,\pi)$ řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\mathrm{e}^{-n^2t}\sin(nx)$$

konverguje alespoň pro jedno $t\in(0,T)$ a že

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p-2}}\mathrm{e}^{-n^2t}\sin(nx)$$

konverguje stejnoměrně na $(0,T)$. Díky Weierstrassovu kritériu (Věta 14.2.2) druhá podmínka platí pro libovolné $p>3$, kdy i splnění první podmínky plyne z Weierstrassova kritéria.

Mnohem výhodnější je však používat Důsledek o derivaci stejnoměrně konvergentní řady (Důsledek 14.3.18) jen na malých okolích bodů, v nichž právě derivujeme. Pak nám stačí lokálně stejnoměrná konvergence druhé řady. Vždy totiž můžeme kolem zadaného bodu zkonstruovat tak malé okolí, že jsou na něm hodnoty proměnné t kladné a odražené od nuly. Díky tomu Weierstrassovo kritérium ve spolupráci s činitelem e^{-n^2t} zajistí stejnoměrnou konvergenci na našem okolí dokonce pro všechna $p\in\mathbb{R}$. Bodová konvergence první řady je opět snadno ověřitelná.

Předposlední rovnost se získá analogicky, ale ve dvou krocích. Nejprve ukážeme lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\mathrm{e}^{-n^2t}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin(nx)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p-2}}\mathrm{e}^{-n^2t}\sin(nx)$$

(což už jsme vlastně udělali výše) a bodovou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \mathrm{e}^{-n^2 t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-1}} \mathrm{e}^{-n^2 t} \cos(nx).$$

Tím získáme lokálně stejnoměrnou konvergenci druhé z uvedených řad a rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \mathrm{e}^{-n^2 t} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \sin(nx) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \mathrm{e}^{-n^2 t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(nx).$$

Nyní už jen stačí ověřit bodovou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \mathrm{e}^{-n^2 t} \sin(nx),$$

což spolu s lokálně stejnoměrnou konvergencí řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \mathrm{e}^{-n^2 t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(nx)$, kterou jsme již ověřili výše, zaručuje, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \mathrm{e}^{-n^2 t} \sin(nx)$ konverguje lokálně stejnoměrně a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \mathrm{e}^{-n^2 t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(nx) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \mathrm{e}^{-n^2 t} \sin(nx).$$

Celkově máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \mathrm{e}^{-n^2 t} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \sin(nx) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \mathrm{e}^{-n^2 t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(nx) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \mathrm{e}^{-n^2 t} \sin(nx).$$

Tím byl úspěšně završen důkaz platnosti pomocné řetězové rovnosti a jsme hotovi. Navíc je snadno vidět, že výše získané výsledky o lokálně stejnoměrné konvergenci funkčních řad odpovídajících parciálním derivacím funkce u je možné analogicky získat pro parciální derivace libovolně vysokého řádu, a proto $u \in C^{\infty}((0,T) \times (0,\pi))$.

14.4 Aplikace stejnoměrné konvergence řad funkcí: konstrukce spojité funkce, která nemá derivaci v žádném bodě

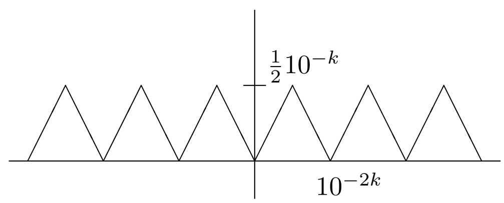
V předchozích částech textu jsme se několikrát zmiňovali o tom, že spojitost funkce jedné reálné proměnné je poměrně vzácná vlastnost, neboť i když má funkce ve zkoumaném bodě limitu, této limitě se rovná jen jediná z nespočetně mnoha možných funkčních hodnot. Podobně pro existenci derivace, kde se opět jedná o velice speciální chování, které i v případě spojité funkce bývá spíše výjimkou. Pro naši představu, takové chování nemá v počátku třeba spojitá funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

neboť $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sin(\frac{1}{x})$ nabývá v libovolném okolí počátku každé hodnoty intervalu $[-1,1]$ nekonečněkrát. Tento typ konstrukcí nám poskytuje představu o tom, že pro spojitou funkci je nejpravděpodobnější, že v daném bodě derivaci nebude mít. V matematické analýze jsou známé ještě podstatně silnější výsledky tvrdící, že typická spojitá funkce nemá derivaci vůbec v žádném bodě. Takovýto výsledek nebudeme dokazovat, nicméně zkonstruujme si alespoň jednu funkci s právě uvedenou vlastností.

Definujme funkce $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jako 10^{-2k}-periodické funkce splňující

$$f_k(x) = \begin{cases} 10^k x & \text{pro } x \in [0, \frac{1}{2}10^{-2k}] \\ \frac{1}{2}10^{-k} - 10^k(x - \frac{1}{2}10^{-2k}) & \text{pro } x \in [\frac{1}{2}10^{-2k}, 10^{-2k}]. \end{cases}$$



Obrázek 14.3: Konstrukce spojité funkce, která nemá nikde derivaci.

Položme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

Za pomoci Weierstrassova kritéria (Věta 14.2.2) snadno nahlédneme, že se jedná o stejnoměrnou limitu spojitých funkcí, tedy o spojitou funkci. Ukažme ještě, že tato funkce má vlastnost, že pro každá $x \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ a $K > 0$ existují body $x_1, x_2 \in \mathcal{U}_\delta(x)$ splňující

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} > K \qquad \text{a} \qquad \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} < -K, \tag{14.4.1}$$

což má za následek, že nemůže existovat $f'(x)$. Nechť x, δ, K jsou dány. Zkonstruujeme bod x_1 požadovaných vlastností (konstrukce bodu x_2 je podobná). Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ tak velké, aby

$$10^{-2n} < \delta \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{2}10^{n-1} > K.$$

Z konstrukce vidíme, že existuje bod $\alpha \in [x - 10^{-2n}, x)$ splňující $f_n(\alpha) = 0$ a bod $\beta \in (x, x + 10^{-2n}]$ splňující $f_n(\beta) = \frac{1}{2}10^{-n}$. Z konstrukce dále plyne, že

$$f_m(\alpha) = f_m(\beta) = 0 \qquad \text{pro všechna } m \geq n.$$

Navíc každá funkce f_k je lipschitzovská s konstantou 10^k. Díky tomu dostáváme

$$\begin{aligned} f(\beta) - f(\alpha) &= \sum_{k=1}^{n} \big(f_k(\beta) - f_k(\alpha)\big) = f_n(\beta) - f_n(\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \big(f_k(\beta) - f_k(\alpha)\big) \\ &\geq \frac{1}{2}10^{-n} - \sum_{k=1}^{n-1} 10^k(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Odtud díky $\beta - \alpha \leq 2 \cdot 10^{-2n}$ dostáváme

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \geq \frac{\frac{1}{2}10^{-n}}{2 \cdot 10^{-2n}} - \sum_{k=1}^{n-1} 10^k \geq \frac{1}{4}10^n - 2 \cdot 10^{n-1} = \frac{1}{2}10^{n-1}.$$

Pokud je nyní bod $(x, f(x))$ pod spojnicí bodů $(\alpha, f(\alpha))$ a $(\beta, f(\beta))$, máme

$$\frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x} > \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \geq \frac{1}{2}10^{n-1}$$

a pokládáme $x_1 = \beta$. V opačném případě máme

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \geq \frac{1}{2}10^{n-1}$$

a pokládáme $x_1 = \alpha$. Tím jsme završili důkaz formule (14.4.1) a jsme hotovi.

Shrňme si vlastnosti námi zkonstruované funkce. Na jedné straně je f spojitá jakožto stejnoměrná limita spojitých funkcí. Na straně druhé naše funkce nejenže v žádném bodě $x \in \mathbb{R}$ nemá derivaci, ale dokonce vykazuje ještě patologičtější vlastnost

$$\liminf_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = -\infty \qquad \text{a} \qquad \limsup_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \infty.$$

Kapitola 15

Lebesgueův integrál

15.1 Úvod

Doposud jsme pracovali jen s Riemannovým a Newtonovým integrálem. Nyní si navíc představíme integrál Lebesgueův, jehož zavedení je velice zdlouhavé, ale získáme tím integrál, který má řadu výhod:

- třída integrovatelných funkcí bude podstatně širší
- definice integrálu je nezávislá na dimenzi (vše se bude odvíjet od definice objemu množiny v $\mathbb{R}^N$)
- budeme mít podstatně více nástrojů pro záměnu limitních procesů a integrálu, zároveň budou mít odpovídající věty slabší předpoklady, než byla stejnoměrná konvergence
- získáme vícerozměrnou větu o substituci (založenou na větě o regulárním zobrazení)
- získáme nástroj pro přepis vícerozměrného integrálu na postupnou aplikaci integrálů jednorozměrných
- normované lineární prostory vybudované ze standardních integrálních norem pracujících s Lebesgueovým integrálem jsou úplné (zásadní skutečnost třeba pro moderní teorii parciálních diferenciálních rovnic, ale i v některých fyzikálních aplikacích jako je například kvantová fyzika).

Samotná konstrukce Lebesgueova integrálu částečně připomíná konstrukci integrálu Riemannova, je tu ale jeden zásadní rozdíl. Se základní myšlenkou této konstrukce se nyní seznámíme na jednoduchém příkladu. Uvažujme nezápornou po částech konstantní funkci

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{I_k}(x),$$

kde $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_m \in [0, \infty)$ a $I_1, \dots, I_m \subset \mathbb{R}$ jsou po dvou disjunktní omezené intervaly. Značí-li $\mathrm{vol}(I_k)$ objem (délku) k-tého intervalu a $\bigcup_{k=1}^m I_k \subset [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, pak pro Riemannův integrál platí

$$(R) \int_\alpha^\beta f \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^m a_k \, \mathrm{vol}(I_k).$$

Pokud jsou hodnoty $a_1, \dots, a_m$ po dvou různé, pravá strana se dá také zapsat jako

$$\sum_{k=1}^m a_k \, \mathrm{vol}(f^{-1}(a_k)).$$

U právě zmíněného typu funkcí se nový zápis jeví stejně výhodný jako zápis první. Pokud však uvážíme třeba Dirichletovu funkci ($D(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$) na intervalu $(0,1)$, Riemannův integrál neexistuje, ale veličině

$$0 \cdot \mathrm{vol}(D^{-1}(0) \cap (0,1)) + 1 \cdot \mathrm{vol}(D^{-1}(1) \cap (0,1))$$

je přirozené propůjčit nulovou hodnotu, neboť racionální čísla jsou mezi reálnými velice vzácná (mají menší mohutnost).

Právě přiřazení objemu zadané množině pro nás bude při budování Lebesgueova integrálu prvořadou otázkou. Aby teorie integrálu fungovala rozumným způsobem, budeme kupříkladu potřebovat, aby se posunutím množiny nezměnil její objem a aby pro disjunktní množiny $A, B \subset \mathbb{R}^N$ platilo

$$\mathrm{vol}(A \cup B) = \mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B)$$

(tato vlastnost bude mít za následek aditivitu integrálu vůči integračnímu oboru). Obtížnost přiřazení objemu dané množině nám demonstruje Banach–Tarského paradox, podle něhož je možné jednotkovou kouli v $\mathbb{R}^3$ rozložit na konečný počet disjunktních podmnožin, jejichž vhodnou rotací, posunutím a opětovným sjednocením získáme jednotkové koule dvě. Přesněji řečeno, mohou nám chybět nějaké malé množiny, z pohledu níže představené teorie jsou však zanedbatelné. Tento jev nám znemožní přiřazení objemu některým množinám, budeme pracovat jen s takzvanými *měřitelnými množinami*.

15.2 σ-algebra a míra

Systém množin, jimž přiřadíme objem, musí na jedné straně vylučovat podobné jevy, jako je Banach–Tarského paradox, na druhé straně musí mít jistou strukturu, která nám později umožní zavést přirozené operace pro Lebesgueův integrál (kupříkladu je přirozené požadovat, aby v případě, že množinám A, B byl přiřazen objem, byl objem přiřazen i množině $A \cup B$).

Definice 15.2.1 (σ-algebra)**.** Nechť X je množina a $\mathcal{M}$ je systém jejích podmnožin. Řekneme, že $\mathcal{M}$ je *σ-algebra* na množině X, jestliže splňuje
(i) $X \in \mathcal{M}$
(ii) jestliže $A \in \mathcal{M}$, pak $X \setminus A \in \mathcal{M}$
(iii) jestliže $\{A_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}$, pak $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{M}$.

Poznámka 15.2.2. Druhá vlastnost se slovně interpretuje jako uzavřenost σ-algebry vůči doplňku a třetí jako uzavřenost vůči spočetnému sjednocení.

Vlastnosti σ-algebry z její definice implikují několik dalších vlastností.

Tvrzení 15.2.3 (O vlastnostech σ-algebry)**.** *Nechť $\mathcal{M}$ je σ-algebra na množině X. Pak*
(i) $\emptyset \in \mathcal{M}$
(ii) *jestliže $A, B \in \mathcal{M}$, pak $A \setminus B \in \mathcal{M}$*
(iii) *jestliže $m \in \mathbb{N}$ a $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{M}$, pak $\bigcup_{j=1}^m A_j \in \mathcal{M}$*
(iv) *jestliže $\{A_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}$, pak $\bigcap_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{M}$*
(v) *jestliže $m \in \mathbb{N}$ a $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{M}$, pak $\bigcap_{j=1}^m A_j \in \mathcal{M}$.*

Důkaz. První část plyne snadno z definice z bodů (i) a (ii), $\emptyset = X \setminus X$. Druhá část plyne z identity

$$A \setminus B = X \setminus ((X \setminus A) \cup B).$$

Pro třetí část stačí zavést pomocný systém

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_m, A_m, A_m, \ldots\}.$$

Čtvrtá se získá z De Morganových vzorců, neboť

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = X \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} (X \setminus A_j).$$

Pátá část plyne ze čtvrté za pomoci systému z důkazu třetí části. □

Příklad 15.2.4. (i) Systém $\{\emptyset, X\}$ je σ-algebra.
(ii) Systém $\exp X$ (množina všech podmnožin X) je σ-algebra.
(iii) Nechť X je množina. Definujme

$$\mathcal{M} = \{A \subset X \colon A \text{ je nejvýše spočetná nebo } X \setminus A \text{ je nejvýše spočetná}\}.$$

Pak $\mathcal{M}$ je σ-algebra. Skutečně, první dvě vlastnosti požadované definicí jsou zřejmé. Nechť dále $A_j \subset \mathcal{M}$ pro $j \in \mathbb{N}$. Pokud jsou A_j nejvýše spočetné pro všechna $j \in \mathbb{N}$, je také $\bigcup_{j=1}^\infty A_j$ je nejvýše spočetná, a proto patří do $\mathcal{M}$. Pokud naopak existuje j_0 takové, že $X \setminus A_{j_0}$ je nejvýše spočetná, pak

$$X \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset X \setminus A_{j_0}$$

je nejvýše spočetná, a proto patří do $\mathcal{M}$.

Povšimněme si, že v této situaci patří jednobodové množiny do $\mathcal{M}$. Pokud bychom připustili v definici σ-algebry i nespočetná sjednocení, mohli bychom vytvořit libovolnou množinu, která už nemusí být v $\mathcal{M}$ (třeba pro $X = \mathbb{R}$ a jeho podmnožinu $(0, \infty)$).
(iv) Pokud $X = \mathbb{R}$ a položíme

$$\mathcal{M} = \{G \subset X \colon G \text{ je otevřená}\},$$

pak $\mathcal{M}$ není σ-algebra, neboť $(0,\infty) \in \mathcal{M}$, ale $\mathbb{R} \setminus (0,\infty) = (-\infty, 0] \notin \mathcal{M}$.
(v) Pokud $X = \mathbb{R}$ a položíme

$$\mathcal{M} = \{A \subset X \colon A \text{ otevřená nebo } A \text{ je uzavřená}\},$$

pak $\mathcal{M}$ není σ-algebra, neboť $[0, 1 - \frac{1}{j}] \in \mathcal{M}$ pro každé $j \in \mathbb{N}$, ale

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \Big[0, 1 - \frac{1}{j}\Big] = [0,1) \notin \mathcal{M}.$$

Věta 15.2.5 (O nejmenší σ-algebře)**.** *Je-li X množina a $\mathcal{N}$ systém podmnožin X, pak na X existuje jednoznačně daná nejmenší σ-algebra obsahující $\mathcal{N}$.*

Důkaz. Systém σ-algeber obsahujících $\mathcal{N}$ je neprázdný, neboť tuto vlastnost má například $\exp X$. Nechť $\mathcal{M}$ je průnik σ-algeber s uvedenou vlastností. Pak zřejmě $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ a snadno se z definice ověří, že $\mathcal{M}$ je σ-algebra ($X \in \mathcal{M}$, neboť X leží ve všech proniknutých σ-algebrách, atd.). □

Cvičení 15.2.6. Nechť X je množina všech dnů v týdnu, tedy

$$X = \{\text{pondělí}, \text{úterý}, \dots, \text{neděle}\}.$$

(i) Vytvořte nejmenší σ-algebru na X obsahující množiny $\{\text{sobota}\}$ a $\{\text{neděle}\}$.
(ii) Vytvořte nejmenší σ-algebru na X obsahující množinu $\{\text{sobota}, \text{neděle}\}$.

Definice 15.2.7 (Borelovské množiny, množiny typu F_σ a G_δ)**.** Nechť (X, ϱ) je metrický prostor. Nejmenší σ-algebra obsahující systém otevřených podmnožin v (X, ϱ) (existence a jednoznačnost plynou z předchozí věty) se nazývá *Borelova σ-algebra*, značí se $\mathcal{B}$ a v ní obsažené množiny se nazývají *borelovské množiny.*

O množině říkáme, že je typu F_σ, jestliže se dá zapsat jako nejvýše spočetné sjednocení uzavřených množin. O množině říkáme, že je typu G_δ, jestliže se dá zapsat jako nejvýše spočetný průnik otevřených množin.

Poznámka 15.2.8. (i) Všechny otevřené množiny jsou zřejmě borelovské. Díky druhé vlastnosti z definice σ-algebry jsou všechny uzavřené množiny také borelovské. Díky třetí vlastnosti z definice σ-algebry jsou všechny množiny typu F_σ borelovské. Množiny typu G_δ jsou borelovské díky čtvrté části Tvrzení o vlastnostech σ-algebry (Tvrzení 15.2.3).
(ii) Z De Morganových vzorců snadno obdržíme

$$A \text{ je typu } F_\sigma \qquad \Longleftrightarrow \qquad X \setminus A \text{ je typu } G_\delta.$$

(iii) Každá uzavřená množina je zřejmě typu F_σ. Každá otevřená množina $G \subset X$ je také typu F_σ, neboť můžeme psát

$$G = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j, \qquad \text{kde } F_j := \{x \in X \colon \inf_{y \in X \setminus G} \varrho(x,y) \geq 2^{-j}\}$$

(množiny napravo jsou uzavřené, neboť zobrazení $x \mapsto \inf_{y \in X \setminus G} \varrho(x, y)$ je spojité).
(iv) Analogicky do systému G_δ množin padnou jak otevřené, tak uzavřené množiny.
(v) V případě $\mathbb{R}$ se standardní metrikou množina $[0, 1)$ není ani uzavřená, ani otevřená, ale je jak typu F_σ, tak typu G_δ. Systémy G_δ-množin a F_σ-množin obsahují tedy více než jen otevřené a uzavřené množiny.
(vi) V odborné literatuře se dá najít, že je-li metrický prostor dostatečně bohatý (třeba $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{R}^N$), pak systémy G_δ-množin a F_σ-množin nesplývají a navíc do borelovských množin padnou i jiné množiny než G_δ-množiny a F_σ-množiny. Později si ukážeme, že třeba v $\mathbb{R}$ existují navíc množiny, které nejsou borelovské.

Roli objemu z našich úvodních poznámek nyní převezme obecnější pojem.

Definice 15.2.9 (Míra)**.** Nechť X je množina a $\mathcal{M}$ je σ-algebra na X. Zobrazení $\mu\colon \mathcal{M} \to [0, \infty]$ se nazývá *míra*, jestliže je σ-aditivní na $\mathcal{M}$ (jsou-li $\{A_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}$ po dvou disjunktní, pak $\mu(\bigcup_{j=1}^\infty A_j) = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)$). Trojice $(X, \mathcal{M}, \mu)$ se pak nazývá *měřitelný prostor* (nebo *prostor s mírou*). Budeme vždy předpokládat, že existuje $A \in \mathcal{M}$ tak, že $\mu(A) < \infty$.

Poznámka 15.2.10. (i) Množina $\bigcup_{j=1}^\infty A_j$ uvedená v definici patří do $\mathcal{M}$.
(ii) Vždy platí $\mu(\emptyset) = 0$, neboť $\mu(A) = \mu(A \cup \bigcup_{j=1}^\infty \emptyset) = \mu(A) + \sum_{j=1}^\infty \mu(\emptyset)$, kde $\mu(A) < \infty$. Kdybychom existenci takové množiny nepředpokládali, nevyloučili bychom případ, že $\mu(A) = \infty$ pro všechny $A \in \mathcal{M}$.
(iii) σ-aditivita se týká i konečných systémů množin díky systémům typu

$$\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \dots\}.$$

(iv) Míra má tedy tři vlastnosti: je nezáporná, σ-aditivní a její definiční obor je přesně $\mathcal{M}$. Pozor, obor hodnot obsahuje ∞.

Příklad 15.2.11. (i) Je-li X libovolná množina a $\mathcal{M} := \exp X$, pak definici míry splňuje

$$\mu(A) := \begin{cases} \text{počet prvků } A & \text{pro } A \text{ konečnou} \\ \infty & \text{jinak.} \end{cases}$$

Této míře se říká *aritmetická* (nebo *sčítací*) míra.
(ii) Je-li X libovolná množina, $\mathcal{M} := \exp X$ a $x \in X$ libovolný pevně zvolený prvek, pak definujeme Diracovu míru

$$\mu(A) = \delta_x(A) := \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in A \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Definice 15.2.12 (Důležité typy měr)**.** Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor. Míra μ se nazývá *konečná*, jestliže $\mu(X) < \infty$. Míra μ se nazývá *σ-konečná*, jestliže X lze napsat jako spočetné sjednocení množin z $\mathcal{M}$, které mají konečnou míru. Míra μ se nazývá *pravděpodobnostní*, jestliže $\mu(X) = 1$.

Definice 15.2.13 (Úplná míra)**.** Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor. Míra μ se nazývá *úplná*, jestliže pro každou množinu $A \in \mathcal{M}$ splňující $\mu(A) = 0$ platí

$$B \subset A \qquad \Longrightarrow \qquad B \in \mathcal{M}.$$

Poznámka 15.2.14. (i) Úplnost míry tedy nesouvisí jen s předpisem pro zobrazení μ, ale vyžaduje také dostatečné bohatství systému $\mathcal{M}$.
(ii) Pokud množina B splňuje podmínku z definice úplné míry, pak máme $A \setminus B \in \mathcal{M}$ a σ-aditivita pak implikuje

$$0 \le \mu(B) = \mu(A) - \mu(A \setminus B) = -\mu(A \setminus B) \le 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(B) = 0.$$

Příklad 15.2.15. (i) Aritmetická míra na X je konečná právě tehdy, když X je konečná. Tato míra je pravděpodobnostní právě tehdy, když X je jednoprvková. Tato míra je σ-konečná právě tehdy, když X je nejvýše spočetná. Aritmetická míra je vždy úplná.
(ii) Diracova míra je pravděpodobnostní (tudíž konečná i σ-konečná). Zřejmě je také úplná.

Věta 15.2.16 (Základní vlastnosti míry)**.** *Nechť* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor. Pak*
(i) $\mu(\emptyset) = 0$
(ii) μ *je konečně aditivní (pokud jsou* $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$ *po dvou disjunktní, pak* $\mu(\bigcup_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j)$*)*
(iii) μ *je monotonní (pokud* $A, B \in \mathcal{M}$ *a* $A \subset B$*, pak* $\mu(A) \le \mu(B)$*)*
(iv) μ *je* σ*-subaditivní (pokud* $\{A_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}$*, pak* $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{M}$ *a* $\mu(\bigcup_{j=1}^\infty A_j) \le \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)$*)*
(v) *pokud* $\{A_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}$ *a* $A_1 \subset A_2 \subset \dots$*, pak* $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{M}$ *a*

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$$

(vi) *pokud* $\{A_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}$*,* $\mu(A_1) < \infty$ *a* $A_1 \supset A_2 \supset \dots$*, pak* $\bigcap_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{M}$ *a*

$$\mu\Big(\bigcap_{j=1}^\infty A_j\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

Důkaz. Části (i) a (ii) jsme si už vysvětlili výše. Část (iii) plyne z odhadu

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \ge \mu(A).$$

Při důkazu čtvrté části postupně položme

$$B_1 := A_1, \quad B_2 := A_2 \setminus A_1, \quad B_3 := A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \quad \dots.$$

Tím jsme přešli k systému po dvou disjunktních množin a díku bodu (iii) dostáváme

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^\infty B_j\Big) = \sum_{j=1}^\infty \mu(B_j) \le \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j).$$

Při důkazu pátého tvrzení vytvoříme systém po dvou disjunktních množin volbou $B_1 := A_1$ a $B_j := A_j \setminus A_{j-1}$ pro každé $j \geq 2$ a dostáváme

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\Big)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Při důkazu tvrzení (vi) vytvoříme pomocný systém předpisem $B_j := A_1 \setminus A_j$. Pak platí $B_1 \subset B_2 \subset \dots$, množiny $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ a $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ jsou disjunktní a jejich sjednocením je A_1. Díky pátému tvrzení dostáváme

$$\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \mu\Big(A_1 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Big) = \mu(A_1) - \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Big) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$
$$= \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1) - \mu(A_1 \setminus A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

neboť množiny A_n a $A_1 \setminus A_n$ jsou disjunktní a jejich sjednocením je A_1. □

Poznámka 15.2.17. V šesté části předchozí věty není možné vypustit předpoklad $\mu(A_1) < \infty$, jak ukazuje příklad aritmetické míry a systému množin

$$A_j := \{j, j+1, j+2, \dots\} \qquad \text{pro } j \in \mathbb{N},$$

kde pro všechna $j \in \mathbb{N}$ máme $\mu(A_j) = \infty$, ale $\mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = \mu(\emptyset) = 0$.

V dalším se budeme zabývat otázkou zúplnění míry. Tomu odpovídá následující konstrukce. Definujme

$$\mathcal{N} := \{A \subset X\colon A \text{ je podmnožinou nějaké množiny z } \mathcal{M}\text{, která má nulovou míru}\}$$

a

$$\widetilde{\mathcal{M}} := \{M \cup N\colon M \in \mathcal{M} \text{ a } N \in \mathcal{N}\}.$$

Novou míru nyní definujme předpisem

$$\widetilde{\mu}(M \cup N) := \mu(M) \qquad \text{pro všechna } M \in \mathcal{M} \text{ a } N \in \mathcal{N}.$$

Věta 15.2.18 (O zúplnění míry). *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a $\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mu}$ jsou jako výše. Pak $\widetilde{\mathcal{M}}$ je σ-algebra obsahující $\mathcal{M}$ a $\widetilde{\mu}$ je úplná míra na $\widetilde{\mathcal{M}}$, která je na $\widetilde{\mathcal{M}}$ dobře definovaná (každé množině z $\widetilde{\mathcal{M}}$ je jednoznačně přiřazeno číslo z $[0,\infty]$) a na $\mathcal{M}$ se shoduje s μ.*

Důkaz. Nejprve se zabývejme vlastnostmi $\widetilde{\mathcal{M}}$. Zřejmě $\mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$, a proto také $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Nechť dále $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Pak existují $M \in \mathcal{M}$, $N \in \mathcal{N}$ a $B \in \mathcal{M}$ takové, že

$$A = M \cup N, \qquad N \subset B \qquad \text{a} \qquad \mu(B) = 0.$$

Pak máme

$$X \setminus A = (X \setminus (M \cup B)) \cup (B \setminus N).$$

Podle vlastností σ-algebry máme $X \setminus (M \cup B) \in \mathcal{M}$ a podle definice $\mathcal{N}$ dostáváme $B \setminus N \in \mathcal{N}$. Celkově $X \setminus A \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Nechť dále $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$. Pak existují $\{M_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, $\{N_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}$ a $\{B_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ takové, že

$$A_j = M_j \cup N_j, \quad N_j \subset B_j \quad \text{a} \quad \mu(B_j) = 0 \qquad \text{pro všechna } j \in \mathbb{N}.$$

Následně

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j.$$

Díky definici σ-algebry máme $\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \in \mathcal{M}$. Navíc platí $\bigcup_{j=1}^{\infty} N_j \in \mathcal{N}$, neboť

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} N_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \qquad \text{a} \qquad \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = 0.$$

Celkově jsme dosud ukázali, že $\widetilde{\mathcal{M}}$ je σ-algebra obsahující $\mathcal{M}$.

Nyní se zabývejme vlastnostmi $\widetilde{\mu}$. Předně každé množině $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ je přiřazena alespoň jedna hodnota $\widetilde{\mu}(A) \in [0, \infty]$. Nechť existuje $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$, kterému jsou přiřazeny hodnoty alespoň dvě. To znamená, že existují $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$, $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ a $B_1, B_2 \in \mathcal{M}$ takové, že

$$A = M_i \cup N_i, \quad N_i \subset B_i \quad \text{a} \quad \mu(B_i) = 0 \qquad \text{pro } i = 1, 2 \quad \text{a} \quad \mu(M_1) < \mu(M_2).$$

Pak ale díky tomu, že $M_2 \subset A \subset M_1 \cup B_1$, dostáváme

$$\begin{aligned}\mu(M_1) < \mu(M_2) &\leq \mu(M_1 \cup B_1) = \mu(M_1 \cup (B_1 \setminus M_1)) = \mu(M_1) + \mu(B_1 \setminus M_1) \\ &\leq \mu(M_1) + \mu(B_1) = \mu(M_1),\end{aligned}$$

což dává spor. Proto je zobrazení $\widetilde{\mu}$ dobře definováno a navíc platí, že se na $\mathcal{M}$ shoduje s μ. Ověřme, že $\widetilde{\mu}$ má vlastnosti míry. Nezápornost je zřejmá, definiční obor $\widetilde{\mu}$ jsme právě vyšetřili a je jím celé $\widetilde{\mathcal{M}}$. Nyní dokážeme σ-aditivitu. Nechť $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ je systém po dvou disjunktních množin. Pak existují $\{M_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, $\{N_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}$ a $\{B_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ takové, že

$$A_j = M_j \cup N_j, \quad N_j \subset B_j \quad \text{a} \quad \mu(B_j) = 0 \qquad \text{pro všechna } j \in \mathbb{N}.$$

Nyní máme $\bigcup_{j=1}^{\infty} N_j \in \mathcal{N}$, neboť

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} N_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \qquad \text{a} \qquad \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = 0.$$

Proto ($\{M_j\}_{j=1}^{\infty}$ jsou po dvou disjunktní)

$$\widetilde{\mu}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \widetilde{\mu}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j\Big) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(M_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(A_j).$$

Zbývá úplnost. Nechť $A \in X$ je takové, že existuje $B \in \widetilde{\mathcal{M}}$ splňující $A \subset B$ a $\widetilde{\mu}(B) = 0$. Pak podle definice $\widetilde{\mathcal{M}}$ lze psát $B = M \cup N$, kde $M \in \mathcal{M}$ a $N \in \mathcal{N}$. Navíc

$$\widetilde{\mu}(B) = \mu(M).$$

Odtud $\mu(M) = 0$, a proto $M \cap A \in \mathcal{N}$. Navíc, protože $N \in \mathcal{N}$, platí $N \cap A \in \mathcal{N}$. Konečně díky $A \subset B = M \cup N$ máme

$$A = A \cap (M \cup N) = (M \cap A) \cup (N \cap A) \in \mathcal{N}$$

(snadno se ověří, že sjednocení dvou prvků množiny $\mathcal{N}$ je opět z $\mathcal{N}$). Protože $A \in \mathcal{N}$, můžeme psát $A = \emptyset \cup A$, a proto (používáme $\emptyset \in \mathcal{M}$)

$$\widetilde{\mu}(A) = \mu(\emptyset) = 0,$$

což jsme chtěli ukázat. □

V dalším budeme všechny uvažované či konstruované míry považovat za zúplněné (což nebudeme připomínat). Pak má dobrý smysl následující definice.

Definice 15.2.19 (Vlastnost platící skoro všude)**.** Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a $M \in \mathcal{M}$. Nechť P je výroková funkce definovaná na M. Řekneme, že P platí *skoro všude* na M (nebo platí pro *skoro všechna* $x \in M$), jestliže existuje $N \in \mathcal{M}$ taková, že $\mu(N) = 0$ a výrok $P(x)$ platí pro každé $x \in M \setminus N$. V případě, že $M = X$, stručně říkáme, že výrok platí skoro všude. Termíny „skoro všude“ a „skoro všechna“ se obvykle zkracují na „s.v.“.

15.3 Konstrukce Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^N$

Nyní si zavedeme Lebesgueovu míru λ_N. Ta bude mít řadu vlastností, které považujeme za přirozené u míry, jež má reprezentovat naši představu o objemu množiny. Mimo jiné bude platit, že je-li A tvaru $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N$, kde pro každé $i \in \{1, \ldots, N\}$ jsou I_i omezené intervaly tvaru (a_i, b_i) nebo $[a_i, b_i)$ nebo $(a_i, b_i]$ nebo $[a_i, b_i]$, pak

$$\lambda_N(A) = \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i).$$

Konstrukci provedeme ve dvou krocích. Nejprve zavedeme na celém $\exp \mathbb{R}^N$ takzvanou *Lebesgueovu vnější míru* odvozenou od naší představy o objemu, nicméně nebude se jednat o skutečnou míru (není ani konečně aditivní). Přechodem k vhodné σ-algebře (oproti $\exp \mathbb{R}^N$ se vzdáme mnoha „ošklivých“ množin) pak ve druhém kroku získáme míru skutečnou.

Námi dosud používaný symbol pro objem vol budeme v dalším používat jen pro omezené intervaly a bude znamenat $\prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i)$, má-li uvažovaný interval tvar uvedený výše.

Definice 15.3.1 (Lebesgueova vnější míra)**.** Nechť $A \subset \mathbb{R}^N$. Položme

$$\lambda_N^*(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol} I_j \colon \{I_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ je spočetné pokrytí } A \\ \text{tvořené omezenými otevřenými intervaly}\Big\}.$$

Zobrazení $A \mapsto \lambda_N^*(A)$ se nazývá *Lebesgueova vnější míra.*

Poznámka 15.3.2. V definici nezáleží na tom, zda uvažujeme spočetná či nejvýše spočetná pokrytí. Pokud totiž připustíme i konečná pokrytí, hodnotu infima to neovlivní, neboť každý otevřený interval můžeme rozdělit na dvojici otevřených intervalů, které se překrývají libovolně málo, a tento proces můžeme iterovat. Z podobných důvodů není podstatné, zda prázdnou množinu považujeme za (omezený otevřený) interval, či nikoliv.

Příklad 15.3.3. Zafixujme $\varepsilon > 0$. Nechť $\{q_j\}_{j=1}^{\infty}$ jsou všechna racionální čísla seřažená do posloupnosti. Definujme otevřené intervaly $I_j := (q_j - \frac{\varepsilon}{2^j}, q_j + \frac{\varepsilon}{2^j})$. Pak

$$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \qquad \text{a} \qquad \lambda_1^*(\mathbb{Q}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol} I_j = \sum_{j=1}^{\infty} 2\frac{\varepsilon}{2^j} = 2\varepsilon.$$

Proto $\lambda_1^*(\mathbb{Q}) = 0$.

Nyní si uvedeme základní vlastnosti Lebesgueovy vnější míry. Připomeňme ještě, že pokud $A, B \subset \mathbb{R}^N$, pak se definuje $A + B := \{a + b \colon a \in A, b \in B\}$ (v případě, že B je jednobodová, je $A + B$ jen posunutá množina A).

Věta 15.3.4 (O vlastnostech Lebesgueovy vnější míry)**.** *Lebesgueova vnější míra má následující vlastnosti:*
(i) *je monotonní (jestliže $A \subset B$, pak $\lambda_N^*(A) \leq \lambda_N^*(B)$)*
(ii) *je σ-subaditivní (jestliže $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^N$, pak $\lambda_N^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_N^*(A_j)$)*
(iii) *je translačně invariantní (jestliže $x \in \mathbb{R}^N$ a $A \subset \mathbb{R}^N$, pak $\lambda_N^*(A+x) = \lambda_N^*(A)$)*
(iv) *při α-násobném roztažení (pro $\alpha \in (0, \infty)$) se Lebesgueova vnější míra množiny změní na α^N-násobek původní hodnoty*
(v) $\lambda_N^*(I) = \operatorname{vol} I$ *pro každý omezený interval v $\mathbb{R}^N$.*

Důkaz. První vlastnost je zřejmá, neboť každé pokrytí množiny B je zároveň pokrytím množiny A.

Druhá vlastnost se získá tak, že k jednotlivým množinám A_j vezmeme (díky definici infima) pokrytí $\{I_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$ tak, aby

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol} I_{j,k} \leq \lambda_N^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Protože nejvýše spočetné sjednocení nejvýše spočetných systémů množin je nejvýše spočetný systém množin, je systém $\{I_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty}$ přípustné pokrytí množiny $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$.

Přepišme získané pokrytí jako $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pak pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ musí platit

$$\sum_{n=1}^{n_0} \operatorname{vol} J_n \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol} I_{j,k} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_N^*(A_j) + \varepsilon,$$

z čehož plyne dokazovaný odhad.

Třetí vlastnost je zřejmá, neboť pro každou souřadnici máme

$$(b_i + x_i) - (a_i + x_i) = b_i - a_i.$$

Dokažme čtvrtou vlastnost. Tvoří-li systém $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ pokrytí zadané množiny jako v definici λ_N^*, α-násobně roztažené intervaly $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ pokrývají α-násobně roztaženou uvažovanou množinu a zároveň nové intervaly mají objem roven α^N-násobku objemu intervalů původních. Díky tomu je Lebesgueova vnější míra roztažené množiny rovna nejvýše α^N-násobku původní hodnoty. Obrácený odhad dostaneme za pomoci inverzního zobrazení k našemu roztažení.

Konečně se věnujme důkazu páté vlastnosti. Předně uvažujme případ omezeného uzavřeného intervalu $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ máme $I \subset (a_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon) \times \cdots \times (a_N - \varepsilon, b_N + \varepsilon)$. Odtud

$$\lambda_1^*(I) \leq \inf_{\varepsilon>0} \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i + 2\varepsilon) = \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i)$$

a stejný odhad zřejmě platí i v případě omezených intervalů, které nejsou uzavřené.

Ukažme obrácený odhad pro omezený uzavřený interval I. Nechť $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ je pokrytí intervalu I omezenými otevřenými intervaly. Můžeme použít Borelovu pokrývací větu (Věta 11.7.3) k přechodu ke konečnému podpokrytí. Přesněji, existuje $j_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $I \subset \bigcup_{j=1}^{j_0} I_j$. Protože navíc zřejmě máme

$$\sum_{j=1}^{j_0} \operatorname{vol} I_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol} I_j,$$

stačí dokázat, že $\operatorname{vol} I \leq \sum_{j=1}^{j_0} \operatorname{vol} I_j$. Předpokládejme, že všechny výše zvolené intervaly $\{I_j\}_{j=1}^{j_0}$ mají nenulový objem (jinak změníme pořadí a zmenšíme j_0). Nechť v dalším $d > 0$ označuje minimální délku hrany napříč intervaly $\{I_j\}_{j=1}^{j_0}$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně malé a nechť $\{\widetilde{I}_j\}_{j=1}^{j_0}$ je systém intervalů získaných ze systému $\{I_j\}_{j=1}^{j_0}$ tak, že u všech intervalů zachováme jejich střed ale délku hrany zvětšíme na $(1+\varepsilon)$-násobek původní hodnoty (proto $\operatorname{vol} \widetilde{I}_j = (1+\varepsilon)^N \operatorname{vol} I_j$, jednotlivé intervaly jsme nafoukli). Rozdělme nyní interval I na m^N stejně velkých zmenšených kopií původního intervalu (po dvou disjunktní vnitřky, překrývají se jen stěny), kde $m \in \mathbb{N}$ je tak velké, že nejdelší hrana vzniklých intervalů je nejvýše rovna $\frac{d\varepsilon}{2}$. Díky tomu, že systém $\{I_j\}_{j=1}^{j_0}$ pokrývá I, každý interval má neprázdný průnik alespoň s jednou množinou I_j. Následně díky předchozí konstrukci tento interval padne celý do $\widetilde{I}_j$. Díky monotonii veličiny vol proto dostáváme

$$\operatorname{vol} I \leq \sum_{j=1}^{j_0} \operatorname{vol} \widetilde{I}_j = (1+\varepsilon)^N \sum_{j=1}^{j_0} \operatorname{vol} I_j.$$

Protože ε bylo libovolné, máme $\operatorname{vol} I \leq \sum_{j=1}^{j_0} \operatorname{vol} I_j$.

V případě intervalu, který není uzavřený, využijeme výsledku pro uzavřený interval, monotonie Lebesgueovy vnější míry a skutečnosti, že $I \supset [a_1+\delta, b_1-\delta] \times \cdots \times [a_N+\delta, b_N-\delta]$ pro každé $\delta > 0$. □

Později nepřímo ukážeme, že λ_N^* není σ-aditivní. Dokonce obecně neplatí ani aditivita pro dvojici disjunktních množin. Tento problém vyřešíme tím, že původní definiční obor $\exp \mathbb{R}^N$ nahradíme menší σ-algebrou.

Definice 15.3.5 (Lebesgueovsky měřitelná množina a Lebesgueova míra)**.** Nechť $A \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že A je *lebesgueovsky měřitelná*, jestliže pro každou množinu $T \subset \mathbb{R}^N$ platí

$$\lambda_N^*(T) = \lambda_N^*(T \cap A) + \lambda_N^*(T \setminus A).$$

Množinu všech lebesgueovsky měřitelných množin značíme $\mathcal{M}_N^*$ a zúžení Lebesgueovy vnější míry z $\exp \mathbb{R}^N$ na $\mathcal{M}_N^*$ budeme nazývat *Lebesgueovou mírou* a značit ji λ_N.

Poznámka 15.3.6. (i) Podmínka z předchozí definice se nazývá *Carathéodoryho kritérium měřitelnosti.*
(ii) Díky σ-subaditivitě Lebesgueovy vnější míry vždy platí

$$\lambda_N^*(T) \leq \lambda_N^*(T \cap A) + \lambda_N^*(T \setminus A).$$

Díky tomu je rovnost z definice automaticky splněna v případě $\lambda_N^*(T) = \infty$. Pro lebesgueovskou měřitelnost tedy stačí ověřovat podmínku

$$\lambda_N^*(T) \geq \lambda_N^*(T \cap A) + \lambda_N^*(T \setminus A) \qquad \text{kdykoliv } \lambda_N^*(T) < \infty.$$

Nyní je třeba dokázat, že Lebesgueova míra skutečně splňuje definici míry (včetně toho, že systém lebegueovsky měřitelných množin tvoří σ-algebru).

Věta 15.3.7 (O korektnosti definice Lebesgueovy míry)**.** *Systém $\mathcal{M}_N^*$ je σ-algebra a zobrazení λ_N je míra na $\mathcal{M}_N^*$.*

Důkaz. Důkaz provedeme v několika krocích.

Krok 1: lebesgueovská měřitelnost $\mathbb{R}^N$ a doplňku měřitelné množiny.
Snadno se ověří, že $\lambda_N^*(\emptyset) = 0$. Díky tomu $\mathbb{R}^N \in \mathcal{M}_N^*$, neboť pro každou testovací množinu $T \subset \mathbb{R}^N$ máme

$$\lambda_N^*(T) = \lambda_N^*(T) + \lambda_N^*(\emptyset) = \lambda_N^*(T \cap \mathbb{R}^N) + \lambda_N^*(T \setminus \mathbb{R}^N).$$

Dále pokud $A \in \mathcal{M}_N^*$, pak platí i $\mathbb{R}^N \setminus A \in \mathcal{M}_N^*$, neboť pro libovolnou $T \subset \mathbb{R}^N$ platí

$$\lambda_N^*(T) = \lambda_N^*(T \cap A) + \lambda_N^*(T \setminus A) = \lambda_N^*(T \setminus (\mathbb{R}^N \setminus A)) + \lambda_N^*(T \cap (\mathbb{R}^N \setminus A)).$$

Krok 2: lebesgueovská měřitelnost průniku dvou měřitelných množin (pomocný výsledek).
Nechť $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_N^*$. Využijeme následující tři rovnosti (v první rovnosti testujeme lebesgueovsky měřitelnou množinu A_1 pomocí T, ve druhé testujeme A_2 pomocí $T \cap A_1$ a ve třetí testujeme A_1 pomocí $T \setminus (A_1 \cap A_2)$)

$$\begin{aligned}
\lambda_N^*(T) &= \lambda_N^*(T \cap A_1) + \lambda_N^*(T \setminus A_1) \\
\lambda_N^*(T \cap A_1) &= \lambda_N^*((T \cap A_1) \cap A_2) + \lambda_N^*((T \cap A_1) \setminus A_2) \\
\lambda_N^*(T \setminus (A_1 \cap A_2)) &= \lambda_N^*((T \setminus (A_1 \cap A_2)) \cap A_1) + \lambda_N^*((T \setminus (A_1 \cap A_2)) \setminus A_1) \\
&= \lambda_N^*((T \cap A_1) \setminus A_2) + \lambda_N^*(T \setminus A_1).
\end{aligned}$$

Odtud (první člen pravé strany první rovnosti upravíme pomocí druhé rovnosti a druhý člen pomocí třetí rovnosti)

$$\begin{aligned}
\lambda_N^*(T) &= \lambda_N^*(T \cap A_1) + \lambda_N^*(T \setminus A_1) \\
&= \lambda_N^*((T \cap A_1) \cap A_2) + \lambda_N^*((T \cap A_1) \setminus A_2) + \lambda_N^*(T \setminus (A_1 \cap A_2)) \\
&\qquad - \lambda_N^*((T \cap A_1) \setminus A_2) \\
&= \lambda_N^*((T \cap (A_1 \cap A_2)) + \lambda_N^*(T \setminus (A_1 \cap A_2)).
\end{aligned}$$

Tím je lebesgueovská měřitelnost $A_1 \cap A_2$ dokázána.

Krok 3: lebesgueovská měřitelnost konečných průniků a konečných sjednocení měřitelných množin (pomocný výsledek).
Díky předchozímu kroku indukcí dokážeme lebesgueovskou měřitelnost konečného průniku. Dále pomocí De Morganových vzorců a lebesgueovské měřitelnosti doplňku lebesgueovsky měřitelné množiny odtud dostaneme také lebesgueovskou měřitelnost konečného sjednocení lebesgueovsky měřitelných množin.

Krok 4: konečná aditivita Lebesgueovy míry (pomocný výsledek).
Přistupme nyní k důkazu aditivity Lebesgueovy míry. Důkaz provedeme nejprve pro dvojici disjunktních množin $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_N^*$. Rozlišíme dva případy. Pokud $\lambda_N^*(A_1 \cup A_2) = \infty$, pak σ-subaditivita Lebesgueovy vnější míry dává, že platí alespoň jeden z výroků $\lambda_N^*(A_1) = \infty$ a $\lambda_N^*(A_2) = \infty$. Díky tomu platí i dokazovaná identita.

Nechť naopak platí $\lambda_N^*(A_1 \cup A_2) < \infty$. Otestujme měřitelnou množinu A_1 pomocí $A_1 \cup A_2$. Pak máme díky disjunktnosti A_1 a A_2

$$\lambda_N^*(A_1 \cup A_2) = \lambda_N^*((A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \lambda_N^*((A_1 \cup A_2) \setminus A_1) = \lambda_N^*(A_1) + \lambda_N^*(A_2).$$

Dále pokračujeme indukcí přes počet množin.

Krok 5: měřitelnost spočetného sjednocení měřitelných množin.
Nechť $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}_N^*$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že tyto množiny jsou po dvou disjunktní, jinak přejdeme k systému

$$\widetilde{A}_1 = A_1, \quad \widetilde{A}_2 = A_1 \cup A_2 \setminus \widetilde{A}_1, \quad \widetilde{A}_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \setminus (\widetilde{A}_1 \cup \widetilde{A}_2), \quad \dots.$$

Nyní pro libovolnou $T \subset \mathbb{R}^N$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme (testujeme lebesgueovskou měřitelnost množiny A_n množinou $T \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j$)

$$\begin{aligned}\lambda_N^*\Big(T \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) &= \lambda_N^*\Big(T \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j \cap A_n\Big) + \lambda_N^*\Big(T \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j \setminus A_n\Big)\\ &= \lambda_N^*(T \cap A_n) + \lambda_N^*\Big(T \cap \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\Big).\end{aligned}$$

Odtud indukcí pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\lambda_N^*\Big(T \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_N^*(T \cap A_j).$$

Protože $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ je lebesgueovsky měřitelná podle čtvrtého kroku, předchozí výsledek a monotonie Lebesgueovy vnější míry nám dávají

$$\begin{aligned}\lambda_N^*(T) &= \lambda_N^*\Big(T \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) + \lambda_N^*\Big(T \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big)\\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_N^*(T \cap A_j) + \lambda_N^*\Big(T \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big)\\ &\geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_N^*(T \cap A_j) + \lambda_N^*\Big(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big).\end{aligned}$$

Protože poslední výsledek platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$, limitním přechodem a dvojím využitím σ-subaditivity Lebesgueovy vnější míry dostáváme

$$\begin{aligned}\lambda_N^*(T) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_N^*(T \cap A_j) + \lambda_N^*\Big(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big)\\ &\geq \lambda_N^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} T \cap A_j\Big) + \lambda_N^*\Big(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big)\\ &= \lambda_N^*\Big(T \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) + \lambda_N^*\Big(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \geq \lambda_N^*(T).\end{aligned}$$

V poslední rovnosti se tudíž všechny členy rovnají a máme lebesgueovskou měřitelnost $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$.

Krok 6: σ-aditivita Lebesgueovy míry.
Nechť $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}_N^*$ jsou po dvou disjunktní. Pak díky konečné aditivitě Lebesgueovy míry a monotonii Lebesgueovy vnější míry máme

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_N^*(A_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda_N^*(A_j) = \lim_{n\to\infty} \lambda_N^*\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \leq \lambda_N^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big).$$

Obrácená nerovnost platí vždy díky σ-subaditivitě Lebesgueovy vnější míry. $\square$

Věta 15.3.8 (O lebesgueovské měřitelnosti otevřených množin)**.** *Každá otevřená množina v $\mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelná.*

Důkaz. Protože lebesgueovsky měřitelné množiny tvoří σ-algebru a podle Věty o charakterizaci otevřených množin pomocí otevřených intervalů (Věta 11.7.9) se dá každá otevřená množina zapsat jako spočetné sjednocení omezených otevřených intervalů, stačí ukázat lebesgueovskou měřitelnost omezeného otevřeného intervalu. Nechť tedy $I \subset \mathbb{R}^N$ je omezený otevřený interval, $T \subset \mathbb{R}^N$ je testovací množina splňující $\lambda_N^*(T) < \infty$ a $\varepsilon > 0$.

Pak existuje systém otevřených intervalů $\{I_j\}_{j=1}^\infty$ takový, že

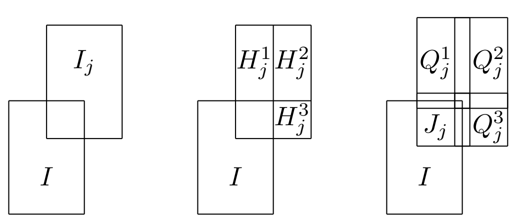
$$T \subset \bigcup_{j=1}^\infty I_j \qquad \text{a} \qquad \sum_{j=1}^\infty \operatorname{vol} I_j \leq \lambda_N^*(T) + \varepsilon.$$

Ze systému $\{I_j\}_{j=1}^\infty$ nyní zkonstruujeme pomocné systémy otevřených intervalů $\{J_j\}_{j=1}^\infty$ a $\{Q_j^k\}_{j=1,k=1}^{\infty,3^N}$. Zafixujme na chvíli $j \in \mathbb{N}$. Předně $I \cap I_j$ je buď prázdná množina nebo otevřený interval. Snadno tedy zkonstruujeme otevřený interval J_j splňující

$$I \cap I_j \subset J_j \qquad \text{a} \qquad \operatorname{vol}(J_j) \leq \operatorname{vol}(I \cap I_j) + \frac{1}{2}\frac{1}{2^j}\varepsilon.$$

Dále uzávěr množiny $I_j \setminus I$ se dá zřejmě popsat jako sjednocení nejvýše 3^N uzavřených intervalů $\{H_j^k\}_{k=1}^{3^N}$ s po dvou disjunktními vnitřky (pokud je intervalů méně než 3^N, systém doplníme prázdnými množinami). Množiny $\{H_j^k\}_{k=1}^{3^N}$ nahradíme o trochu většími otevřenými intervaly $Q_j^1, \dots, Q_j^{3^N}$, aby platilo (využíváme $\operatorname{vol}(I_j) = \operatorname{vol}(I \cap I_j) + \sum_{k=1}^{3^N} \operatorname{vol}(H_j^k)$ a předchozí odhad)

$$I_j \setminus I \subset \bigcup_{k=1}^{3^N} Q_j^k \qquad \text{a} \qquad \operatorname{vol}(J_j) + \sum_{k=1}^{3^N} \operatorname{vol}(Q_j^k) < \operatorname{vol}(I_j) + \frac{1}{2^j}\varepsilon.$$



Obrázek 15.1: Nahrazení intervalu I_j sjednocením intervalů, které následně zvětšíme.

Pak

$$T \cap I \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} J_j, \qquad T \setminus I \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{3^N} Q_j^k$$

a díky naší konstrukci máme

$$\begin{aligned}\lambda_N^*(T \cap I) + \lambda_N^*(T \setminus I) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol}(J_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{3^N} \operatorname{vol}(Q_j^k) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_j) + \varepsilon \leq \lambda_N^*(T) + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, získali jsme klíčovou nerovnost pro lebesgueovskou měřitelnost. □

Věta 15.3.9 (O úplnosti Lebesgueovy míry)**.** *Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^N$ je úplná. Dokonce každá množina splňující $\lambda_N^*(A) = 0$ je lebesgueovsky měřitelná.*

Důkaz. Dokažme rovnou druhou vlastnost (je zřejmě silnější než úplnost). Nechť $T \subset \mathbb{R}^N$ je libovolná testovací množina splňující $\lambda_N^*(T) < \infty$ a $A \subset \mathbb{R}^N$ splňuje $\lambda_N^*(A) = 0$. Pak díky monotonii Lebesgueovy vnější míry máme

$$\lambda_N^*(T) \leq \lambda_N^*(T \cap A) + \lambda_N^*(T \setminus A) \leq \lambda_N^*(A) + \lambda_N^*(T \setminus A) = \lambda_N^*(T \setminus A) \leq \lambda_N^*(T)$$

a jsme hotovi. □

Příklad 15.3.10. (i) Jednobodovou množinu lze pokrýt libovolně malým intervalem. Proto má nulovou Lebesgueovu vnější míru. Následně je tato množina lebesgueovsky měřitelná a má nulovou Lebesgueovu míru. Díky σ-aditivitě Lebesgueovy míry dostáváme, že každá spočetná množina je lebesgueovsky měřitelná a má nulovou Lebesgueovu míru. Speciálně množina racionálních čísel v $\mathbb{R}$ má nulovou Lebesgueovu míru.
(ii) Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a $J \subset \mathbb{R}^{N-1}$ je omezený interval. Snadno dostaneme, že množina $\{x_0\} \times J$ je lebesgueovsky měřitelná a má nulovou Lebesgueovu míru.

Důsledek 15.3.11 (O lebesgueovské měřitelnosti intervalů v $\mathbb{R}^N$)**.** *Libovolný interval $I \subset \mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelný. Je-li navíc omezený, platí $\lambda_N(I) = \operatorname{vol} I$.*

Důkaz. Pro otevřený omezený interval plyne výsledek z Věty o lebesgueovské měřitelnosti otevřených množin (Věta 15.3.8) a čtvrté části Věty o vlastnostech Lebesgueovy vnější míry (Věta 15.3.4). Podle druhé části předchozího příkladu navíc víme, že každý omezený interval, který není otevřený, je možné zapsat jako sjednocení otevřeného intervalu a konečného počtu množin nulové Lebesgueovy míry. Neomezený interval se dá popsat jako spočetné sjednocení intervalů omezených. □

V tuto chvíli máme poměrně velký počet nástrojů k důkazu lebesgueovské měřitelnosti studované množiny. Demonstrujme si je alespoň na $\mathbb{R}$.

Příklad 15.3.12. (i) Množina $(0,1] \cup [2,3)$ je lebesgueovsky měřitelná, neboť jde o sjednocení dvou intervalů, ale dá se zapsat i jako $(0,3) \setminus (1,2)$.
(ii) Množina $\mathbb{Q}$ je lebesgueovsky měřitelná, neboť je spočetným sjednocením uzavřených (jednobodových) množin. Už jsme také ukázali, že každá nejvýše spočetná množina má nulovou Lebesgueovu míru.
(iii) Množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ je lebesgueovsky měřitelná, neboť je spočetným sjednocením otevřených intervalů, případně doplňkem spočetné množiny do $\mathbb{R}$.

Věta 15.3.13 (O invariantnosti Lebesgueovy míry vůči posunutí)**.** *Lebesgueova míra na* $\mathbb{R}^N$ *je invariantní vůči posunutí.*

Důkaz. Již víme, že Lebesgueova vnější míra je translačně invariantní. Zbývá ukázat, že posunutím lebesgueovsky měřitelné množiny získáme opět lebesgueovsky měřitelnou množinu. To je však jen snadné cvičení na Carathéodoryho kritérium měřitelnosti (Definice 15.3.5; posuneme zkoumanou množinu společně s libovolnou testovací množinou, přičemž před posunutím bylo Carathéodoryho kritérium splněno). $\square$

Věta 15.3.14 (O Lebesgueově míře roztažené množiny)**.** *Nechť* $\alpha \in (0, \infty)$*. Při* α*-násobném roztažení lebesgueovsky měřitelné množiny získáme lebesgueovsky měřitelnou množinu, jejíž Lebesgueova míra je rovna* α^N*-násobku původní hodnoty.*

Důkaz. Analogické tvrzení již známe pro Lebesgueovu vnější míru. Zbývá ukázat, že roztažení zachovává lebesgueovskou měřitelnost. To je však jen snadné cvičení na Carathéodoryho kritérium měřitelnosti (Definice 15.3.5; roztáhneme zkoumanou množinu společně s libovolnou testovací množinou, přičemž před roztažením bylo Carathéodoryho kritérium splněno). $\square$

Ukažme si, že existují i neměřitelné množiny. V konstrukci využijeme *axiom výběru* (pro každý neprázdný systém neprázdných množin existuje zobrazení, které z každé množiny tohoto systému vybere právě jeden prvek).

Příklad 15.3.15 (Konstrukce lebesgueovsky neměřitelné množiny na $\mathbb{R}$ od Giuseppe Vitaliho z roku 1905)**.** Množinu $\mathbb{R}$ rozložme na nespočetně mnoho podmnožin $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tak, že $x, y \in \mathbb{R}$ patří do téže množiny V_α právě tehdy, když $x - y \in \mathbb{Q}$ (každá množina V_α je vlastně jen posunuté $\mathbb{Q}$, navíc těchto množin musí být nespočetně mnoho, neboť jejich sjednocením vznikne nespočetná množina $\mathbb{R}$).

Za použití axiomu výběru nyní definujme množinu $E \subset (0,1)$ tak, že pro každé $\alpha \in A$ vybereme právě jeden prvek z $V_\alpha \cap (0,1)$ a umístíme jej do E. Ukážeme, že množina E není lebesgueovsky měřitelná.

Za tím účelem nechť $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou všechna racionální čísla z intervalu $(-1,1)$ seřazená do posloupnosti. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$E_n := q_n + E.$$

Zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $E_n \subset (-1,2)$. Dále množiny E_n jsou po dvou disjunktní (pokud $x \in E_n \cap E_m$, pak existují $e_n, e_m \in E$ a $q_n, q_m \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)$ splňující $q_n + e_n = q_m + e_m$, tedy $q_n - q_m = e_m - e_n$. Odtud $e_m - e_n \in \mathbb{Q}$ a to implikuje $e_m = e_n$ a $q_m = q_n$, neboli $m = n$). Navíc platí $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset (0,1)$ (pro všechna $x \in (0,1)$ existuje $\alpha \in A$ takové, že $x \in V_\alpha$. Dále pro toto α existuje $e_\alpha \in (0,1)$, které bylo vybráno při konstrukci E. Pak platí $|x - e_\alpha| < 1$ a $x - e_\alpha \in \mathbb{Q}$). Máme proto

$$(0,1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset (-1,2).$$

Pokud by E byla lebesgueovsky měřitelná, díky monotonii, σ-aditivitě a translační invarianci Lebesgueovy míry by platilo

$$1 = \lambda_1((0,1)) \le \lambda_1\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1(E) \le \lambda_1((-1,2)) = 3.$$

Odtud vidíme, že nemůže platit ani $\lambda_1(E) = 0$, ani $\lambda_1(E) > 0$ a máme spor.

Příklad 15.3.16 (Cantorovo diskontinuum)**.** Z předchozích konstrukcí je jasné, že každá spočetná množina má nulovou Lebesgueovu míru. Zde si ukážeme, že i některé nespočetné množiny mají nulovou Lebesgueovu míru. Postupně definujme kompaktní množiny

$$K_0 := [0,1], \quad K_2 := [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1], \quad K_3 := [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1], \quad \ldots$$

(vždy vynecháme prostřední třetinu každého intervalu tvořícího předchozí množinu). Definujme *Cantorovo diskontinuum* předpisem

$$C := \bigcap_{j=0}^{\infty} K_j.$$

Pak C je neprázdný kompakt podle Cantorovy věty o průniku kompaktů (Věta 11.6.11). Dále C je nespočetná množina; všechny body, které tvořily hranici některého z intervalů během konstrukce, v C zůstanou a tyto body se dají popsat nekonečnou posloupností nul a jedniček. To plyne z toho, že pokud bychom zapsali reálná čísla z intervalu $[0,1]$ v trojkové soustavě, budou body Cantorova diskontinua právě takové body, že se v jejich zápise nevyskytuje cifra 1. Konečně C je lebesgueovsky měřitelná množina, protože je uzavřená, a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\lambda_1(C) \le \lambda_1(K_n) = 2^n \frac{1}{3^n} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Příklad 15.3.17 (Cantorovo diskontinuum kladné míry)**.** Pokud bychom v předchozí konstrukci nevynechávali v jednotlivých krocích prostřední třetinu, ale například $\frac{1}{(k+1)^2}$-násobek délky modifikovaného intervalu v k-tém kroku, pak by platilo (díky šesté vlastnosti z Věty o základních vlastnostech míry, tedy Věty 15.2.16)

$$\lambda_1(C) = (1 - \tfrac{1}{2^2})(1 - \tfrac{1}{3^2})(1 - \tfrac{1}{4^2}) \ldots.$$

Napravo je nenulové číslo díky tomu, že $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} < \infty$ a Větě o charakterizaci konvergence součinu (Věta 9.7.3), kterou použijeme na nekonečný součin

$$P = \prod_{k=2}^{\infty} \Big(1 + \frac{1}{k^2-1}\Big),$$

přičemž $P = \frac{1}{\lambda_1(C)}$. Dostali jsme tentokrát množinu, která má kladnou Lebesgueovu míru a nemá žádné vnitřní body.

Lebesgueova vnější míra byla zkonstruována aproximací zkoumané množiny pomocí spočetných sjednocení otevřených intervalů. Podobné aproximační vlastnosti automaticky dostávají i další typy množin.

Věta 15.3.18 (O vnější a vnitřní regularitě Lebesgueovy vnější míry)**.** *Nechť* $A \subset \mathbb{R}^N$. *Pak*

$$\lambda_N^*(A) = \inf\{\lambda_N(G) \colon A \subset G, G \text{ je otevřená}\}.$$

Pokud navíc A je lebesgueovsky měřitelná, pak

$$\lambda_N(A) = \sup\{\lambda_N(K) \colon K \subset A, K \text{ je kompaktní}\}.$$

Důkaz. Dokažme první rovnost. Z monotonie Lebesgueovy vnější míry okamžitě plyne nerovnost „$\leq$“. Naopak, sjednocením každého pokrytí $\{I_j\}_{j=1}^\infty$ z definice Lebesgueovy vnější míry dostáváme otevřenou množinu $\bigcup_{j=1}^\infty I_j$, pro kterou platí

$$\lambda_N\Big(\bigcup_{j=1}^\infty I_j\Big) \leq \sum_{j=1}^\infty \lambda_N(I_j) = \sum_{j=1}^\infty \operatorname{vol}(I_j).$$

Díky tomu snadno nahlédneme, že platí nerovnost „$\geq$“.

Dokažme druhou rovnost. Díky monotonii Lebesgueovy vnější míry vždy platí nerovnost "$\geq$". Při důkazu zbývající nerovnosti budeme rozlišovat několik případů.

Nejprve nechť A je omezená. Zvolme $\varepsilon > 0$. Zafixujme kompaktní množinu $F \supset A$. Podle první části věty existuje otevřená množina $G \supset F \setminus A$ splňující $\lambda_N(G) < \lambda_N(F \setminus A) + \varepsilon$. Položme $K := F \setminus G$, pak K je kompaktní, $K \subset A$ a díky lebesgueovské měřitelnosti A, K a G máme

$$\begin{aligned}\lambda_N(K) &= \lambda_N(F \setminus G) = \lambda_N(F) - \lambda_N(G) = \lambda_N(F \cap A) + \lambda_N(F \setminus A) - \lambda_N(G)\\ &= \lambda_N(A) + \lambda_N(F \setminus A) - \lambda_N(G) \geq \lambda_N(A) - \varepsilon.\end{aligned}$$

Pokud A není omezená, definujme posloupnost lebesgueovsky měřitelných množin (každá je průnik dvou lebesgueovsky měřitelných)

$$A_n := A \cap \{x \in \mathbb{R}^N \colon |x| < n\}.$$

Pak $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Díky páté vlastnosti z Věty o základních vlastnostech míry (Věta 15.2.16) proto máme

$$\lambda_N(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda_N(A_n).$$

Je-li nyní $\lambda_N(A) < \infty$, zafixujme $n \in \mathbb{N}$ tak velké, aby $\lambda_N(A_n) > \lambda_N(A) - \varepsilon$. Podle předchozí konstrukce existuje kompakt K_n splňující

$$K_n \subset A_n \subset A \qquad \text{a} \qquad \lambda_N(K_n) > \lambda_N(A_n) - \varepsilon > \lambda_N(A) - 2\varepsilon.$$

Pokud $\lambda_N(A) = \infty$, podobně získáme kompaktní podmnožinu množiny A libovolně velké míry. □

Předchozí věta nám umožňuje zesílit Vitaliho konstrukci a získat další lebesgueovsky neměřitelné množiny. Budeme však potřebovat ještě jedno pozorování z teorie metrických prostorů.

Tvrzení 15.3.19 (O vzdálenosti uzavřené a kompaktní množiny)**.** *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $F \subset X$ je uzavřená množina, $K \subset X$ je kompaktní množina a $F \cap K = \emptyset$. Pak*

$$\operatorname{dist}(F, K) := \inf_{x \in F, y \in K} \varrho(x, y) > 0.$$

Důkaz. Pokud by platilo $\operatorname{dist}(F, K) = 0$, našli bychom posloupnosti $\{x_n\} \subset F$ a $\{y_n\} \subset K$ takové, že $\varrho(x_n, y_n) \to 0$. Díky kompaktnosti K pak přechodem k podposloupnosti umíme zajistit, že $y_n \to y \in K$. Odtud

$$0 \leq \varrho(x_n, y) \leq \varrho(x_n, y_n) + \varrho(y_n, y) \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Proto $x_n \to y$, což díky uzavřenosti F implikuje $y \in F \cap K$ a máme spor. $\square$

Příklad 15.3.20 (Zesílení Vitaliho konstrukce)**.** Ukažme si, že dokonce každá lebesgueovsky měřitelná množina $H \subset \mathbb{R}$ splňující $\lambda_1(H) > 0$ obsahuje lebesgueovsky neměřitelnou podmnožinu.

Nejprve si dokažme pomocné tvrzení, že pro každou lebesgueovsky měřitelnou množinu $A \subset \mathbb{R}$ kladné Lebesgueovy míry existuje $\delta > 0$ takové, že množina $\{y - z : y, z \in A\}$ obsahuje otevřenou kouli $B_\delta(0)$.

S ohledem na vnitřní regularitu Lebesgueovy míry můžeme předpokládat, že množina A je kompaktní. Díky vnější regularitě Lebesgueovy míry zvolme otevřenou množinu G tak, že $A \subset G$ a $\lambda_1(G) < 2\lambda_1(A)$. Protože A je kompaktní a $\mathbb{R} \setminus G$ uzavřená, máme

$$\delta := \operatorname{dist}(A, \mathbb{R} \setminus G) > 0.$$

Dále ukažme, že pokud $x \in \mathbb{R}$ splňuje $|x| < \delta$, pak pro posunutou množinu $A + x$ platí $A + x \subset G$. Pokud by tomu tak nebylo, existovalo by $y \in A$ splňující $y + x \notin G$ a pak bychom měli

$$\delta = \operatorname{dist}(A, \mathbb{R} \setminus G) \leq |y - (y + x)| = |x| < \delta,$$

což je spor. Protože tedy máme $A \subset G$ a $A + x \subset G$, platí $A \cup (A + x) \subset G$. Pokud bychom navíc měli $A \cap (A + x) = \emptyset$, dostali bychom díky naší volbě $\lambda_1(G) < 2\lambda_1(A)$

$$\lambda_1(G) < 2\lambda_1(A) = \lambda_1(A) + \lambda_1(A + x) = \lambda_1(A \cup (A + x)) \leq \lambda_1(G),$$

což je spor. Následně pro každé $x \in B_\delta(0)$ máme $A \cap (A + x) \neq \emptyset$, neboli

$$\{y - z : y, z \in A\} \supset B_\delta(0).$$

Přistupme nyní k samotné konstrukci podmnožiny, která je lebesgueovsky neměřitelná. Nechť E je Vitaliho množina. Pro každé $r \in \mathbb{R}$ označme $E_r := E + r$. Ukažme, že existuje $r \in \mathbb{Q}$ takové, že $E_r \cap H$ není lebesgueovsky měřitelná. Pro spor předpokládejme, že všechny takové množiny měřitelné jsou. Na jednu stranu pak máme, že $\lambda_1(E_r \cap H) = 0$, neboť množina $\{y - z : y, z \in E_r \cap H\}$ obsahuje jen iracionální čísla a nulu, a proto nemůže obsahovat žádnou otevřenou kouli se středem v počátku (použili jsme pomocné tvrzení na množinu $A := E_r \cap H$). Na druhou stranu z konstrukce Vitaliho množiny máme $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} E_r = \mathbb{R}$. Proto také platí

$$H = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (E_r \cap H).$$

Odtud

$$0 < \lambda_1(H) = \lambda_1\Big(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (E_r \cap H)\Big) \le \sum_{r\in\mathbb{Q}} \lambda_1(E_r \cap H) = 0$$

a máme spor.

Skutečnost, že množina vykazuje správný typ vnitřní či vnější regularity vůči Lebesgueově vnější míře je dokonce ekvivalentní její lebesgueovské měřitelnosti.

Věta 15.3.21 (Charakterizace lebesgueovské měřitelnosti množiny)**.** *Nechť* $A \subset \mathbb{R}^N$*. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.*
(i) *A je lebesgueovsky měřitelná*
(ii) *pro každý omezený otevřený interval $I \subset \mathbb{R}^N$ platí*

$$\lambda_N^*(I) = \lambda_N^*(I \cap A) + \lambda_N^*(I \setminus A)$$

(iii) *pro každé $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^N$ splňující $A \subset G$ a*

$$\lambda_N^*(G \setminus A) \le \varepsilon$$

(iv) *existuje množina $D \subset \mathbb{R}^N$ typu G_δ splňující $A \subset D$ a $\lambda_N^*(D \setminus A) = 0$*
(v) *existují množiny $D \subset \mathbb{R}^N$ typu G_δ a H typu F_σ splňující $H \subset A \subset D$ a*

$$\lambda_N^*(D \setminus H) = 0.$$

Důkaz. Implikace „(i)⇒(ii)“ je triviální. Dokažme implikaci „(ii)⇒ (iii)“. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ definujme interval $I_k := (-k,k)^N$. Podle předchozí věty (Věta 15.3.18) existují otevřené množiny G_k, H_k takové, že

$$I_k \cap A \subset G_k, \qquad I_k \setminus A \subset H_k,$$

$$\lambda_N(G_k) \le \lambda_N^*(I_k \cap A) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \qquad \text{a} \qquad \lambda_N(H_k) \le \lambda_N^*(I_k \setminus A) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $G_k, H_k \subset I_k$ (jinak přejdeme k množinám $G_k \cap I_k$ a $H_k \cap I_k$). Protože otevřené množiny jsou lebesgueovsky měřitelné, máme díky naší konstrukci a vlastnosti (ii)

$$\begin{aligned}\lambda_N(I_k) + \lambda_N(G_k \cap H_k) &= \lambda_N(G_k \cup H_k) + \lambda_N(G_k \cap H_k) = \lambda_N(G_k) + \lambda_N(H_k)\\ &\le \lambda_N^*(I_k \cap A) + \lambda_N^*(I_k \setminus A) + \frac{\varepsilon}{2^k} = \lambda_N(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.\end{aligned}$$

Odtud $\lambda_N(G_k \cap H_k) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$. Položme nyní $G := \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j$. Pak G je otevřená, $A \subset G$ a díky tomu, že $G_k \subset I_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}\lambda_N^*(G \setminus A) &= \lambda_N^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \setminus A\Big) = \lambda_N^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}(G_j \setminus A)\Big) = \lambda_N^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}(G_j \cap (I_j \setminus A))\Big)\\ &\leq \lambda_N^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}(G_j \cap H_j)\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_N^*(G_j \cap H_j) \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Implikace „(iii)$\Rightarrow$(iv)“ plyne z volby $D := \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$, kde G_j je otevřená množina odpovídající přesnosti $\varepsilon = \frac{1}{j}$ v (iii).

Dokažme implikaci „(iv)$\Rightarrow$(v)“. Předně D vezmeme jako ve (iv). Dále aplikujme (iv) na množinu $\mathbb{R}^N \setminus A$. Dostaneme množinu $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j$, kde $\{B_j\}$ jsou otevřené množiny, $B_j \supset \mathbb{R}^N \setminus A$ pro každé $j \in \mathbb{N}$ a

$$\lambda_N^*\Big(\bigcap_{j=1}^{n} B_j \setminus (\mathbb{R}^N \setminus A)\Big) \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Nyní definujme uzavřené množiny $H_j := \mathbb{R}^N \setminus B_j$ a pak položíme $H := \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j$. Množina H je typu F_σ a $H \subset A$. Navíc

$$\begin{aligned}A \setminus H &= A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j = A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty}(\mathbb{R}^N \setminus B_j)\\ &= A \setminus \Big(\mathbb{R}^N \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\Big) = A \cap \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j \setminus (\mathbb{R}^N \setminus A).\end{aligned}$$

Proto

$$\lambda_N^*(A \setminus H) = 0$$

a celkově

$$\lambda_N^*(D \setminus H) \leq \lambda_N^*(D \setminus A) + \lambda_N^*(A \setminus H) = 0.$$

Dokažme implikaci „(v)$\Rightarrow$(i)“. Podle (v) můžeme psát $A = D \setminus (D \setminus A)$, kde $\lambda_N^*(D \setminus A) = 0$. První množina napravo je lebesgueovsky měřitelná díky lebesgueovské měřitelnosti otevřených množin a skutečnosti, že lebesgueovsky měřitelné množiny tvoří σ-algebru. Druhá množina je lebesgueovsky měřitelná díky Větě o úplnosti Lebesgueovy míry (Věta 15.3.9). $\square$

15.3.1 Lebesgue–Stieltjesova míra

V jednodimenzionálním případě Lebesgueovu míru zobecňuje *Lebesgue–Stieltjesova míra*, kterou si zde představíme. Při jejím zavádění rovnou zmíníme její hlavní vlastnosti. Přesné formulace těchto vlastností a jejich důkazy zájemce nalezne pod konstrukcí.

V dalším nechť je funkce $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neklesající a zprava spojitá na celém $\mathbb{R}$. Pro každý interval typu $(a, b]$, kde $-\infty < a \le b < \infty$, definujme

$$l_F((a, b]) := F(b) - F(a)$$

(pokud $a = b$, máme $l_F((a, a]) = l_F(\emptyset) = 0$). Následně definujeme Lebesgue–Stieltjesovu vnější míru $\mu_F^*\colon \exp\mathbb{R} \to [0, \infty]$ předpisem

$$\mu_F^*(A) := \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}(F(b_j) - F(a_j))\colon A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j]\Big\}.$$

Nyní použijeme Carathéodoryho kritérium měřitelnosti (Definice 15.3.5)

$$\mu_F^*(T) = \mu_F^*(T \cap A) + \mu_F^*(T \setminus A) \qquad \text{pro všechny testovací množiny } T \subset \mathbb{R}$$

k získání σ-algebry měřitelných množin, která obsahuje borelovské množiny. Restrikci μ_F^* na měřitelné množiny značíme μ_F.

Příklad 15.3.22. (i) Pokud vycházíme z funkce $F(x) = x$, získáme Lebesgueovu míru ($\mu_F((a, b]) = b - a$).
(ii) Jestliže

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ 1 & \text{pro } x \ge 0, \end{cases}$$

dostaneme

$$\mu_F((a, b]) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } 0 \in (a, b] \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Máme tedy Diracovu míru

$$\mu_F(A) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } 0 \in A \\ 0 & \text{pokud } 0 \notin A. \end{cases}$$

V tomto případě měřitelné množiny (celé $\exp\mathbb{R}$) tvoří podstatně bohatší systém, než jsou jen množiny borelovské.
(iii) Je-li F Cantorova funkce (ďábelské schodiště), dostáváme míru, která Cantorově diskontinuu dává hodnotu 1, jeho doplněk má nulovou míru. Dá se také ukázat, že pro každou spočetnou množinu $A \subset \mathbb{R}$ platí $\mu_F(A) = 0$ (protože žádná jednobodová množina nemá nenulovou míru).

Tvrzení 15.3.23 (O vlastnostech Lebesgue–Stieltjesovy vnější míry)**.** *Lebesgue–Stieltjesova vnější míra má následující vlastnosti:*
(i) *je monotonní (jestliže $A \subset B$, pak $\mu_F^*(A) \le \mu_F^*(B)$)*
(ii) *je σ-subaditivní (jestliže $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^N$, pak $\mu_F^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_F^*(A_j)$)*
(iii) $\mu_F^*(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} F(b_j) - F(a_j)\colon A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)\Big\}$

(iv) *pokud* $-\infty < a \le b < \infty$, *pak platí*

$$\begin{aligned}\mu_F^*((a,b]) &= F(b) - F(a)\\ \mu_F^*((a,\infty)) &= \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a)\\ \mu_F^*((-\infty,b]) &= F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x)\\ \mu_F^*(\mathbb{R}) &= \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x).\end{aligned}$$

Důkaz. První vlastnost je zřejmá, neboť každé pokrytí množiny B je zároveň pokrytím množiny A.

Druhá vlastnost se získá tak, že k jednotlivým množinám A_j vezmeme (díky definici infima) pokrytí $\{(a_{j,k}, b_{j,k}]\}_{k=1}^{\infty}$ tak, aby

$$\sum_{k=1}^{\infty}(F(b_{j,k}) - F(a_{j,k})) \le \lambda_F^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Protože nejvýše spočetné sjednocení nejvýše spočetných systémů množin je nejvýše spočetný systém množin, je systém $\{(a_{j,k}, b_{j,k}]\}_{j,k=1}^{\infty}$ přípustné pokrytí množiny $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Přepišme získané pokrytí jako $\{(c_n, d_n]\}_{n=1}^{\infty}$. Pak pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ musí platit

$$\sum_{n=1}^{n_0}(F(d_n) - F(c_n)) \le \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(F(b_{j,k}) - F(a_{j,k})) \le \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_F^*(A_j) + \varepsilon,$$

z čehož plyne dokazovaný odhad.

Dokažme třetí vlastnost. Pro zadanou $A \subset \mathbb{R}$ označme

$$\nu(A) := \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}(F(b_j) - F(a_j))\colon A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)\Big\}.$$

Zřejmě platí $\mu_F^*(A) \le \nu(A)$, protože nalevo uvažujeme širší třídu pokrytí (neboť $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)$ implikuje $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j]$). Na druhou stranu, platí-li $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j]$, pak máme $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j + \delta_j)$ pro libovolná $\{\delta_j\} \subset (0,\infty)$. S ohledem na spojitost zprava funkce F lze pro libovolné pevně zvolené $\varepsilon > 0$ dosahnout toho, že $F(b_j + \delta_j) < F(b_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$ pro každé $j \in \mathbb{N}$, a proto

$$\sum_{j=1}^{\infty}(F(b_j + \delta_j) - F(a_j)) \le \varepsilon + \sum_{j=1}^{\infty}(F(b_j) - F(a_j)),$$

což dává obrácenou nerovnost $\mu_F^*(A) \ge \nu(A)$.

Dokažme čtvrtou vlastnost. Začneme první rovností. Díky tomu, že jedním z uvažovaných pokrytí intervalu $(a,b]$ je pokrytí tvořené jediným intervalem $(a,b]$, máme

$$\mu_F^*((a,b]) \le l_F((a,b]) = F(b) - F(a).$$

Obrácená nerovnost platí zřejmě pro $a = b$. Nechť je tedy v dalším $a < b$. S ohledem na výsledek (iii), uvažme pokrytí $(a, b]$ pomocí intervalů $\{(a_j, b_j)\}$. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ pak umíme najít $x \in (a, b)$ tak, že $F(x) < F(a) + \varepsilon$. Díky Borelově pokrývací větě (Věta 11.7.3) dále existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\bigcup_{j=1}^{n}(a_j, b_j) \supset [x, b]$. Proto (druhou z následujících nerovností přenecháváme čtenáři na rozmyšlenou)

$$\sum_{j=1}^{\infty}(F(b_j) - F(a_j)) \geq \sum_{j=1}^{n}(F(b_j) - F(a_j)) \geq F(b) - F(x) \geq F(b) - F(a) - \varepsilon,$$

z čehož plyne dokazovaná nerovnost a celkově dostáváme první rovnost v (iv).

Dokažme druhou rovnost. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > a$ a uvažme pokrytí

$$(a, n_0] \cup (n_0, n_0 + 1] \cup (n_0 + 1, n_0 + 2] \cup \dots.$$

Pro toto pokrytí máme

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty}(F(b_j) - F(a_j)) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-n_0+1} (F(b_j) - F(a_j)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \big((F(n_0) - F(a)) + (F(n_0 + 1) - F(n_0)) + \dots + (F(n) - F(n - 1))\big) \\
&= \lim_{n\to\infty} F(n) - F(a).
\end{aligned}$$

Proto $\mu_F^*((a, \infty)) \leq \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a)$. Obrácenou nerovnost nám dává monotonie μ_F^* spolu s výše dokázaným výsledkem

$$\mu_F^*((a, n]) = F(n) - F(a).$$

Zbylé rovnosti dokážeme podobně. □

Tvrzení 15.3.24 (O korektnosti definice Lebesgue–Stieltjesovy míry)**.** *Systém měřitelných množin vůči Lebesgue–Stieltjesově míře je σ-algebra a zobrazení μ_F je na něm míra.*

Důkaz. Můžeme použít důkaz Věty o korektnosti definice Lebesgueovy míry (Věta 15.3.7), kde provedeme jen minimální modifikaci značení. □

Věta 15.3.25 (O měřitelnosti otevřených množin v Lebesgue–Stieltjesově míře)**.** *Každá otevřená množina v $\mathbb{R}$ je měřitelná v Lebesgue–Stieltjesově míře.*

Důkaz. Protože měřitelné množiny tvoří σ-algebru a podle Věty o charakterizaci otevřených množin pomocí otevřených intervalů (Věta 11.7.9) se dá každá otevřená množina zapsat jako spočetné sjednocení omezených otevřených intervalů, stačí ukázat měřitelnost neprázdného omezeného otevřeného intervalu. Navíc

$$(a, b) = \bigcup_{j=n_0}^{\infty} (a, b - \tfrac{1}{j}].$$

Stačí nám tedy uvažovat polouzavřené intervaly téhož typu jako na pravé straně předchozí identity. Nechť tedy máme dán interval $(a,b] \subset \mathbb{R}$, kde $-\infty < a < b < \infty$, $T \subset \mathbb{R}$ je testovací množina splňující $\mu_F^*(T) < \infty$ a $\varepsilon > 0$.

Pak podle třetí části Tvrzení o vlastnostech Lebesgue–Stieltjesovy míry (Tvrzení 15.3.23) existuje systém otevřených intervalů $\{(a_j,b_j)\}_{j=1}^{\infty}$ takový, že

$$T \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j,b_j) \qquad \text{a} \qquad \mu_F^*(T) + \varepsilon \geq \sum_{j=1}^{\infty} F(b_j) - F(a_j).$$

Ze systému $\{(a_j,b_j)\}_{j=1}^{\infty}$ nyní zkonstruujeme pomocné systémy otevřených intervalů $\{(c_j,d_j)\}_{j=1}^{\infty}$ a $\{(p_j,r_j)\}_{j=1}^{\infty}$. Zafixujme na chvíli $j \in \mathbb{N}$. Rozlišujeme několik případů.

Pokud $(a,b] \cap (a_j,b_j) = \emptyset$, položíme $(p_j,r_j) := (a_j,b_j)$ a (c_j,d_j) nedefinujeme.

Pokud $(a_j,b_j) \subset (a,b]$, položíme $(c_j,d_j) := (a_j,b_j)$ a (p_j,r_j) nedefinujeme.

Pokud $a_j < a$ a $b_j \in (a,b]$, položíme $(c_j,d_j) := (a,b_j)$ a $(p_j,r_j) := (a_j, a+\delta_j)$, kde $\delta_j > 0$ je tak malé, že $F(a+\delta_j) < F(a) + \frac{\varepsilon}{2^j}$ (jde to díky spojitosti F zprava).

Pokud $a_j \in (a,b)$ a $b_j > b$, položíme $(c_j,d_j) := (a_j, b+\delta_j)$ a $(p_j,r_j) := (b,b_j)$, kde $\delta_j > 0$ je tak malé, že $F(b+\delta_j) < F(b) + \frac{\varepsilon}{2^j}$.

Zbývá už jen případ $a_j \leq a$ a $b_j > b$, kdy položíme $(c_j,d_j) := (a, b+\delta_j)$ a do druhého systému přidáme hned dvojici intervalů $(p_j^1, r_j^1) := (a_j, a+\delta_j)$ a $(p_j^2, r_j^2) := (b, b_j)$. Zde volíme $\delta_j > 0$ tak malé, aby $F(a+\delta_j) < F(a) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$ a $F(b+\delta_j) < F(b) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$.

Celkově pak po přeindexování (v některých krocích jsme do pomocných systémů nepřidali interval žádný, jindy hned dva) máme

$$T \cap (a,b] \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(c_j,d_j), \qquad T \setminus (a,b] \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(p_j,q_j)$$

a

$$\begin{aligned}\mu_F^*(T \cap (a,b]) + \mu_F^*(T \setminus (a,b]) &\leq \sum_{j=1}^{\infty}(F(d_j) - F(c_j)) + \sum_{j=1}^{\infty}(F(r_j) - F(p_j)) \\ &\leq \varepsilon + \sum_{j=1}^{\infty}(F(b_j) - F(a_j)) \\ &\leq \mu_F^*(T) + 2\varepsilon,\end{aligned}$$

což jsme chtěli ukázat. □

15.4 Měřitelné funkce

V předchozím oddíle jsme vybudovali pojem míry. Ten má dostatečně rozumné vlastnosti, aby bylo možné zavést integrál z charakteristické funkce jakékoliv měřitelné množiny $A \subset X$ předpisem

$$\int_X \chi_A \,\mathrm{d}\mu := \mu(A).$$

Nově zavedený integrál bude díky vlastnostem míry například splňovat

$$\int_X (\chi_A + \chi_B)\,\mathrm{d}\mu = \int_X \chi_A\,\mathrm{d}\mu + \int_X \chi_B(x)\,\mathrm{d}\mu$$

pro každou dvojici disjunktních měřitelných množin. Nyní již má také dobrý smysl i náš původní záměr definovat Lebesgueův integrál pomocí analogie riemannovských součtů, neboli pro funkci $f\colon X \to \mathbb{R}$ zadanou předpisem $f = \sum_{j=1}^n a_j\chi_{A_j}$, kde $\{a_j\} \subset \mathbb{R}$ a $\{A_j\}$ jsou po dvou disjunktní měřitelné množiny, definovat

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^n a_j\mu(A_j).$$

Narážíme však ještě na problém, že většina funkcí, které budeme chtít integrovat, se nedá popsat jako konečná lineární kombinace charakteristických funkcí měřitelných množin. Proto si nyní vybudujeme teorii popisující třídu funkcí, které v jistém (pro budování integrálu velice vhodném) smyslu můžeme aproximovat funkcemi výše uvedeného typu.

Teorii budeme převážně budovat pro obecný měřitelný prostor $(X, \mathcal{M}, \mu)$ a funkce z X do $\mathbb{R}^*$ (což se ukazuje jako velmi praktické, neboť kupříkladu bodové limity posloupností funkcí mají takovýto obor hodnot). Tomuto typu funkcí se říká *numerické* funkce.

Uvedeme však i některá speciální tvrzení pro reálné funkce (obor hodnot je podmnožinou $\mathbb{R}$).

Definice 15.4.1 (Měřitelná funkce)**.** Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je $\mathcal{M}$-měřitelná (neboli $\Omega \in \mathcal{M}$) a $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^*$ je definovaná skoro všude na Ω. Řekneme, že f je $\mathcal{M}$*-měřitelná* na Ω, jestliže pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\{x \in \Omega\colon f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}.$$

V případě měřitelných funkcí vůči borelovským množinám na $\mathbb{R}^N$ hovoříme o *borelovských funkcích.* V případě měřitelných funkcí vůči lebesgueovsky měřitelným množinám na $\mathbb{R}^N$ (tedy zúplněné σ-algebře borelovských množin) hovoříme o *lebesgueovsky měřitelných funkcích.*

Poznámka 15.4.2. (i) Nejčastěji bývá $\Omega = X$, z kontextu také bývá jasné s jakou σ-algebrou pracujeme. Pak se termín „$\mathcal{M}$-měřitelná funkce na Ω“ obvykle zkracuje na „měřitelná funkce“.
(ii) V případě komplexní funkce definujeme měřitelnost pomocí měřitelnosti jednotlivých složek a nepřipouštíme, že by složky mohly nabývat nevlastních hodnot.
(iii) Není-li funkce měřitelná, stručně říkáme, že je *neměřitelná.*

Podívejme se nejprve, jak se měřitelnost zachovává při přechodu k jinému definičnímu oboru.

Tvrzení 15.4.3. *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a $f\colon X \to \mathbb{R}^*$.*
(i) *Je-li f měřitelná na měřitelné množině $\Omega \subset X$, pak je f měřitelná také na*

každé její měřitelné podmnožině.
(ii) *Je-li f měřitelná na měřitelných množinách $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}$, pak je f měřitelná také na $\bigcup_{j=1}^{\infty}\Omega_j$.*

Důkaz. První část tvrzení plyne z identity platné pro každou $A \subset \Omega$ a $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{x \in A \colon f(x) > \alpha\} = \{x \in \Omega \colon f(x) > \alpha\} \cap A$$

a z toho, že měřitelné množiny tvoří σ-algebru. Podobně druhá část tvrzení plyne z rovnosti

$$\Big\{x \in \bigcup_{j=1}^{\infty}\Omega_j \colon f(x) > \alpha\Big\} = \bigcup_{j=1}^{\infty}\{x \in \Omega_j \colon f(x) > \alpha\}.$$

□

Pokud pracujeme s měřitelnou funkcí na $\Omega \neq X$, pak se dá měřitelnost množiny $X \setminus \Omega$ využít k tomu, že po dodefinování nulou na $X \setminus \Omega$ je nová funkce měřitelná na X (skutečně, po dodefinování se podoba množin $\{f > \alpha\}$ nezměnila pro $\alpha \geq 0$ a pro $\alpha < 0$ je nová množina sjednocením původní měřitelné množiny a měřitelné množiny $X \setminus \Omega$). Domluvme se, že v dalším budeme měřitelné funkce vždy dodefinovávat nulou, což nám zjednoduší formulace vět a definic, kde již nebude vystupovat množina Ω.

Příklad 15.4.4. (i) Charakteristická funkce měřitelné množiny A je měřitelná, neboť

$$\{x \in \Omega \colon \chi_A(x) > \alpha\} = \begin{cases} X & \text{pro } \alpha < 0 \\ A & \text{pro } \alpha \in [0,1) \\ \emptyset & \text{pro } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

(ii) V případě $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda_1)$ a funkce $f(x) = x$ máme

$$\{x \in \mathbb{R} \colon f(x) > \alpha\} = (\alpha, \infty) \qquad \text{pro všechna } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Jedná se vždy o otevřenou množinu, tím pádem je borelovská a f je lebesgueovsky měřitelná (stejný výsledek bychom dostali pro libovolnou spojitou funkci na $\mathbb{R}$ díky tomu, že vzor otevřené množiny (α, ∞) je pro spojitou funkci otevřený).
(iii) Existují i neměřitelné funkce. Stačí uvážit charakteristickou funkci neměřitelné množiny.
(iv) Každá monotonní funkce na $\mathbb{R}$ je legesgueovsky měřitelná, neboť množina $\{x \in \mathbb{R} \colon f(x) > \alpha\}$ je vždy interval.
(v) Funkce log (dodefinovaná nulou) je legesgueovsky měřitelná, neboť množinu $\{x \in \mathbb{R} \colon \log x > \alpha\}$ tvoří pro $\alpha \geq 0$ interval a pro $\alpha < 0$ je to sjednocení dvou intervalů.

Měřitelnost se v literatuře definuje různými ekvivalentními způsoby.

Věta 15.4.5 (Charakterizace měřitelných funkcí pomocí úrovňových množin)**.** *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a $f \colon X \to \mathbb{R}^*$ je definovaná všude na X. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(i) *f je měřitelná*
(ii) *množina $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ je měřitelná pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$*
(iii) *množina $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ je měřitelná pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$*
(iv) *množina $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ je měřitelná pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Důkaz. Zřejmě (i)⇔(iv) a (ii)⇔(iii), neboť libovolná množina $A \subset X$ je měřitelná právě tehdy, když $X \setminus A$ je měřitelná.

Protože $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{x \in X : f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\}$, máme (i)⇒(ii).

Protože $\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in X : f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n}\}$, máme (ii)⇒(i). □

Pokud bude z kontextu zřejmé, na jaké množině pracujeme, budeme například místo $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ psát stručně $\{f \geq \alpha\}$.

Obzvlášť elegantní charakterizace pomocí vzorů otevřených množin platí pro reálné funkce (obor hodnot musí být podmnožinou $\mathbb{R}$, nikoliv $\mathbb{R}^*$, protože druhý prostor jsme si nezavedli jako metrický prostor a nemáme na něm definované otevřené množiny).

Věta 15.4.6 (Charakterizace měřitelných funkcí pomocí vzorů)**.** *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a $f : X \to \mathbb{R}$ je definovaná všude na X. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.*
(i) *f je měřitelná*
(ii) *vzor každé otevřené množiny je měřitelná množina*
(iii) *vzor každé uzavřené množiny je měřitelná množina*
(iv) *vzor každé borelovské množiny je měřitelná množina.*

Důkaz. Zřejmě (ii)⇒(i), neboť $\{f > \alpha\}$ je vzor otevřené množiny. Na druhou stranu, je-li $A \subset \mathbb{R}$ otevřená, pak se dá zapsat jako spočetné sjednocení omezených otevřených intervalů, neboli $A = \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)$ (pokud by intervalů byl jen konečný počet, jeden z nich nekonečněkrát zopakujeme). Pak

$$f^{-1}(A) = f^{-1}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)\Big) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}((a_j, b_j)) = \bigcup_{j=1}^{\infty}(\{f > a_j\} \cap \{f < b_j\}).$$

Pro měřitelnou funkci jsou množiny $\{f > a_j\}$ a $\{f < b_j\}$ měřitelné, a proto je i množina na levé straně předchozího výpočtu měřitelná. Celkově máme (i)⇔(ii).

Podobně jako výše dále snadno máme (iii)⇒(i), (iv)⇒(i) a navíc triviálně platí (iv)⇒(iii). Stačí nám tedy už jen dokázat (ii)⇒(iv).

Nechť tedy platí (ii). Definujme

$$\mathcal{A} := \Big\{A \subset \mathbb{R} : f^{-1}(A) \text{ je měřitelná}\Big\}.$$

Pak $\mathcal{A}$ obsahuje všechny otevřené podmnožiny $\mathbb{R}$ díky (ii). Dále $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$, neboť $f^{-1}(\mathbb{R}) = X \in \mathcal{M}$. Navíc pokud $A \in \mathcal{A}$, platí také $\mathbb{R}\setminus A \in \mathcal{A}$, protože $f^{-1}(\mathbb{R}\setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ a $\mathcal{M}$ je σ-algebra. Pokud $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, pak také platí $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$, neboť

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(A_j).$$

Celkově jsme zjistili, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra obsahující všechny otevřené podmnožiny $\mathbb{R}$. Obsahuje tedy všechny borelovské množiny a máme (iv). □

Další metody určování měřitelnosti funkcí jsou založené na porovnávání funkčních hodnot.

Definice 15.4.7 (Ekvivalentní funkce)**.** Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a funkce $f, g\colon X \to \mathbb{R}^*$ jsou definované všude na X. Řekneme, že f a g jsou *ekvivalentní*, jestliže $f = g$ skoro všude na X.

Věta 15.4.8 (O měřitelnosti ekvivalentních funkcí)**.** *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a funkce $f, g\colon X \to \mathbb{R}^*$ jsou ekvivalentní a definované všude na Ω. Pak jsou buď obě tyto funkce měřitelné, nebo jsou obě neměřitelné.*

Důkaz. Stačí ukázat, že když je měřitelná jedna z funkcí (bez újmy na obecnosti nechť je měřitelná f) pak je měřitelná druhá. Označme si množinu nulové míry, která nám může působit problémy

$$N := \{x \in \Omega\colon f(x) \neq g(x)\}.$$

Pak pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ máme

$$\{g > \alpha\} = \{f > \alpha\} \cup (\{g > \alpha\} \cap N) \setminus \Big((\{f > \alpha\} \setminus \{g > \alpha\}) \cap N\Big).$$

Na pravé straně se vyskytuje množina vzniklá pomocí operací zachovávajících σ-algebru z jedné měřitelné množiny a dvou množin s nulovou mírou (ty jsou měřitelné díky zúplnění míry). □

Příklad 15.4.9. Dirichletova funkce je ekvivalentní funkci, která je identicky nulová (spojitá a lebesgueovsky měřitelná), proto je Dirichletova funkce lebesgueovsky měřitelná.

Věta 15.4.10 (O měřitelnosti bodové limity měřitelných funkcí)**.** *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou měřitelné funkce na X. Pak funkce $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ jsou měřitelné na X. Speciálně pokud skoro všude na X existuje bodová limita posloupnosti $\{f_n\}$, pak je měřitelná.*

Důkaz. Nejprve si uvědomme, že můžeme předpokládat, že funkce f_n jsou definovány všude na X. Jinak je dodefinujeme nulou, a protože spočetné sjednocení množin nulové míry má nulovou míru, změna se celkově týkala jen množiny nulové míry.

Dále využijeme rovnosti (ověřte si sami jejich platnost)

$$\Big\{\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \geq \alpha\Big\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \geq \alpha\}, \qquad \Big\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n > \alpha\Big\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n > \alpha\},$$

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\inf_{k\geq n} f_k\Big) \qquad \text{a} \qquad \limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sup_{k\geq n} f_k\Big).$$

První dvě rovnosti spolu s definicí měřitelnosti funkce a skutečností, že množinové operace použité na pravých stranách těchto rovností zachovávají měřitelnost množiny (v případě první rovnosti se využije ještě druhá část Věty o charakterizaci měřitelnosti funkcí pomocí úrovňových množin, tedy Věta 15.4.5) dávají, že funkce $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ a $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ jsou měřitelné. Tyto výsledky spolu se třetí a čtvrtou rovností dávají měřitelnost funkcí $\liminf_{n\to\infty} f_n$ a $\limsup_{n\to\infty} f_n$. □

V dalším si odvodíme aritmetiku měřitelných funkcí. Na jednu stranu je téměř zřejmé, že když f je měřitelná a $s \in \mathbb{R}$, pak sf je měřitelná (pro $s = 0$ je to jasné, pro $s > 0$ si stačí uvědomit, že $\{f > \alpha\} = \{sf > s\alpha\}$, atd.). Na druhou stranu, s výjimkou velice jednoduchých případů, kdy je třeba jedna z funkcí konstantní, není na první pohled jasné, proč by mělo být možné popsat množinu $\{f + g > \alpha\}$ pomocí měřitelných množin typu $\{f > \beta\}$ a $\{g > \gamma\}$. Právě při řešení tohoto problému se nám ve vhodný okamžik bude hodit Věta o charakterizaci měřitelnosti pomocí vzorů (Věta 15.4.6).

Věta 15.4.11 (O měřitelnosti složené funkce)**.** *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce na X a $F \in C(\mathbb{R}^2)$. Pak funkce $x \mapsto F(f(x), g(x))$ je měřitelná na X. Speciálně, funkce $f \pm g$ a fg jsou měřitelné na X.*

Důkaz. Označme $\varphi\colon x \mapsto F(f(x), g(x))$ a zvolme $A \subset \mathbb{R}$ otevřenou. Protože F je spojitá na $\mathbb{R}^2$, je $F^{-1}(A)$ otevřená v $\mathbb{R}^2$. Proto ji můžeme napsat jako sjednocení spočetně mnoha omezených otevřených intervalů, neboli

$$F^{-1}(A) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (I_j \times J_j),$$

kde $\{I_j\}$ a $\{J_j\}$ jsou otevřené intervaly v $\mathbb{R}$. Odtud

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(A) &= \{x \in X\colon (f(x), g(x)) \in F^{-1}(A)\} \\
&= \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in X\colon f(x) \in I_j,\ g(x) \in J_j\} \\
&= \bigcup_{j=1}^{\infty} (f^{-1}(I_j) \cap g^{-1}(J_j)).
\end{aligned}$$

Množina úplně napravo je měřitelná díky měřitelnosti f a g. Tím je důkaz dokončen. □

Věta 15.4.12 (O lebesgueovské měřitelnosti spojité funkce)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelná a $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je spojitá na Ω vzhledem k Ω. Pak f je lebesgueovsky měřitelná na Ω. Dokonce, je-li f spojitá pouze na $\Omega \setminus P$, kde $\lambda_N(P) = 0$, pak f je lebesgueovsky měřitelná na Ω.*

Důkaz. Zafixujme $\alpha \in \mathbb{R}$. Pro každé $y \in \{x \in \Omega\colon f(x) > \alpha\}$ díky spojitosti existuje $\delta_y > 0$ takové, že

$$\mathcal{U}_{\delta_y}(y) \cap \Omega \subset \{x \in \Omega\colon f(x) > \alpha\}.$$

Proto platí

$$\{x \in \Omega\colon f(x) > \alpha\} = \bigcup_{y \in \{x \in \Omega\colon f(x) > \alpha\}} (\mathcal{U}_{\delta_y}(y) \cap \Omega) = \Omega \cap \bigcup_{y \in \{x \in \Omega\colon f(x) > \alpha\}} \mathcal{U}_{\delta_y}(y).$$

Napravo jsme dostali průnik lebesgueovsky měřitelné množiny s otevřenou množinou, což je lebesgueovsky měřitelná množina.

Za předpokladů druhé části věty máme

$$\{x \in \Omega\colon f(x) > \alpha\} = \{x \in \Omega \setminus P\colon f(x) > \alpha\} \cup \{x \in \Omega \cap P\colon f(x) > \alpha\}.$$

První množina napravo je lebesgueovsky měřitelná podle první části věty a druhá množina napravo má nulovou Lebesgueovu míru. □

Příklad 15.4.13. (i) Je-li f lebesgueovsky měřitelná, jsou rovněž lebesgueovsky měřitelné funkce $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$ a $|f| = f^+ + f^-$.
(ii) Funkce sign je lebesgueovsky měřitelná, neboť je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(iii) Funkce $x \mapsto \frac{D(x)}{x}$ je lebesgueovsky měřitelná, neboť je to součin Dirichletovy funkce, která je ekvivalentní s identicky nulovou funkcí, a funkce $x \mapsto \frac{1}{x}$, která je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Uvědomme si také, že nevadí, že funkce není definovaná v $x = 0$, protože jeden bod je množina s nulovou Lebesgueovou mírou.

15.5 Jednoduché funkce, aproximace měřitelných funkcí jednoduchými funkcemi a spojitými funkcemi

Výše jsme si uvedli, že jsme již připraveni definovat integrál pro po částech konstantní měřitelné funkce. Ve skutečnosti dokážeme pracovat s širší třídou funkcí, která se nám pro budování teorie ukáže jako klíčová.

Definice 15.5.1 (Jednoduchá funkce)**.** Nechť X je množina a $s\colon X \mapsto \mathbb{R}^*$. Řekneme, že s je *jednoduchá* funkce, jestliže $s(X)$ je konečná množina.

Poznámka 15.5.2. Jednoduchou funkci je tedy možné zapsat jako

$$s = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j},$$

kde $\{\alpha_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^*$ a A_j, $j = 1, \ldots, n$ jsou podmnožiny X. Předchozí reprezentace je jednoznačná, pokud jsou $\{\alpha_j\}$ různé hodnoty a $\{A_j\}$ po dvou disjunktní. V takovém případě je jednoduchá funkce měřitelná právě tehdy, když všechny množiny A_j jsou měřitelné.

Příklad 15.5.3. (i) Každá po částech konstantní funkce s popsaná pomocí konečného počtu intervalů je jednoduchá.
(ii) Dirichletova funkce je jednoduchá a lebesgueovsky měřitelná.
(iii) Numerická funkce definovaná jako $f \equiv \infty$ na $\mathbb{R}$ je jednoduchá a lebesgueovsky měřitelná.

Měřitelnost funkce s jednoduchými funkcemi úzce souvisí. Připomeňme, že už víme, že bodová limita jednoduchých měřitelných funkcí je měřitelná. Platí i obrácený výsledek.

Věta 15.5.4 (O aproximaci měřitelných funkcí jednoduchými funkcemi)**.** *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a $f\colon X \to [0, \infty]$ je měřitelná funkce. Pak existuje posloupnost $\{s_n\}$ jednoduchých měřitelných funkcí na X taková, že $0 \le s_n \le s_{n+1} \le f$, $s_n < \infty$ na X pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $s_n \to f$ na X.*

Důkaz. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \{1, \dots, n2^n\}$ definujme množinu

$$F_{n,k} = \Big\{x \in X\colon \frac{k-1}{2^n} \le f(x) < \frac{k}{2^n}\Big\}.$$

Nyní položíme

$$s_n(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n} & \text{pro } x \in F_{n,k}, \text{ kde } k \in \{1, \dots, n2^n\} \\ n & \text{pro } x \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{n2^n} F_{n,k}. \end{cases}$$

Tím jsme dostali jednoduchou funkci s oborem hodnot $\{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, n - \frac{1}{2^n}, n\}$ splňující $|s_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{2^n}$ kdykoliv $f(x) \le n$. Odtud $s_n \to f$ na X. Navíc jestliže pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \{1, \dots, n2^n\}$ platí $\frac{k-1}{2^n} \le f(x) < \frac{k}{2^n}$, pak máme $\frac{2(k-1)}{2^{n+1}} \le f(x) < \frac{2k}{2^{n+1}}$ a mohou nastat jen dvě možnosti

$$\frac{2(k-1)}{2^{n+1}} \le f(x) < \frac{2(k-1)+1}{2^{n+1}} \quad\Longrightarrow\quad s_{n+1}(x) = \frac{2(k-1)}{2^{n+1}} = \frac{k-1}{2^n} = s_n(x)$$

a

$$\frac{2(k-1)+1}{2^{n+1}} \le f(x) < \frac{2k}{2^{n+1}} \quad\Longrightarrow\quad s_{n+1}(x) = \frac{2(k-1)+1}{2^{n+1}} = s_n(x) + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Proto $s_n(x) \le s_{n+1}(x)$. $\square$

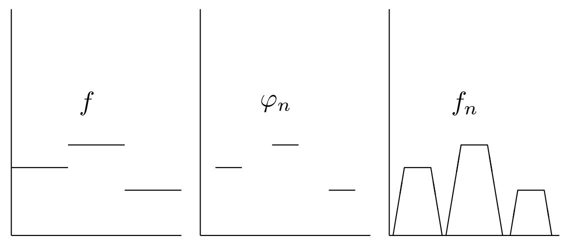
Poznámka 15.5.5. (i) Pokud je f navíc omezená, máme $s_n \rightrightarrows f$ na X.
(ii) Pokud f mění znaménko, lze předchozí konstrukci aplikovat na f^+ a f^-. Dostaneme bodově konvergentní posloupnost jednoduchých funkcí, nicméně obecně už konvergence není monotonní.

Lebesgueovsky měřitelné funkce se dají navíc aproximovat spojitými funkcemi. Musíme ovšem část definičního oboru odebrat.

Věta 15.5.6 (O aproximaci lebesgueovsky měřitelných funkcí spojitými funkcemi)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce a $\varepsilon > 0$. Pak existují měřitelná množina $A \subset \mathbb{R}^N$ a posloupnost $\{f_n\}$ spojitých funkcí na $\mathbb{R}^N$ takové, že $\lambda_N(A) < \varepsilon$ a $f_n \to f$ na $\mathbb{R}^N \setminus A$.*

Důkaz. Nejprve si stručně uvedeme myšlenku důkazu. Prvním krokem je aproximace pomocí jednoduchých funkcí tvaru $s_n = \sum_{k=1}^{m_n} a_{n,k}\chi_{A_{n,k}}$. Pokračujeme přechodem k jednoduchým funkcím tvaru $\varphi_n = \sum_{k=1}^{m_n} a_{n,k}\chi_{F_{n,k}}$, kde $F_{n,k} \subset A_{n,k}$

jsou uzavřené množiny, pro něž je $\lambda_N(A_{n,k} \setminus F_{n,k})$ velice malá (sjednocením těchto množin nakonec vznikne právě maličká množina A ze znění věty). Výhoda přechodu k množinám $F_{n,k}$ spočívá v tom, že mezi těmito množinami vznikl prostor, který nám umožní konstantní části funkce spojitě dodefinovat. Některé ze zmíněných kroků vyžadují kompaktnost použitých množin, proto nejprve uvedeme podrobný důkaz pro případ aproximace na omezené množině. Modifikaci důkazu pro obecný případ provedeme na konci.



Obrázek 15.2: Nahrazení jednoduché funkce funkcí spojitou: nejprve lehce zmenšíme jednotlivé úrovňové množiny, pak funkci spojitě dodefinujeme na doplňku jejich sjednocení.

Krok 1: aproximace na omezené množině.
Zde se budeme zabývat aproximací na otevřené jednotkové kouli $B_1(0)$. Podle předchozí poznámky Věta o aproximaci měřitelných funkcí jednoduchými funkcemi (Věta 15.5.4) dává posloupnost jednoduchých funkcí $s_n = \sum_{k=1}^{m_n} a_{n,k}\chi_{A_{n,k}}$, kde $\{a_{n,k}\}$ jsou reálná čísla a $\{A_{n,k}\}$ jsou lebesgueovsky měřitelné množiny. Podle Věty o vnější a vnitřní regularitě Lebesgueovy vnější míry (Věta 15.3.18) existují kompaktní množiny $\{F_{n,k}\}$ tak, že $F_{n,k} \subset A_{n,k} \cap B_1(0)$ a

$$\lambda_N((A_{n,k} \cap B_1(0)) \setminus F_{n,k}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+k+1}}.$$

Podle Tvrzení o vzdálenosti uzavřené a kompaktní množiny (Tvrzení 15.3.19) pak existuje $\delta_n \in (0,1)$ takové, že

$$\operatorname{dist}(F_{n,k_1}, F_{n,k_2}) \geq 2\delta_n \quad \text{kdykoliv } k_1, k_2 \in \{1, \ldots, m_n\} \text{ a } k_1 \neq k_2.$$

Definujme nyní funkci

$$f_n = \sum_{k=1}^{m_n} \psi_{n,k},$$

kde

$$\psi_{n,k}(x) = \begin{cases} a_{n,k}(1 - \frac{\operatorname{dist}(\{x\}, F_{n,k})}{\delta_n}) & \text{pokud } 0 \leq \operatorname{dist}(\{x\}, F_{n,k}) \leq \delta_n \\ 0 & \text{pokud } \operatorname{dist}(\{x\}, F_{n,k}) \geq \delta_n. \end{cases}$$

Pak $\{f_n\}$ jsou spojité funkce, pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$f_n = s_n \qquad \text{na } \bigcup_{k=1}^{m_n} F_{n,k}$$

a

$$\lambda_N\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in B_1(0)\colon f_n(x) \neq s_n(x)\}\Big) \leq \lambda_N\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{m_n}((A_{n,k} \cap B_1(0)) \setminus F_{n,k})\Big)$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\frac{\varepsilon}{2^{n+k+1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Krok 2: aproximace na neomezené množině.
Protože $\mathbb{R}^N = \bigcup_{l=1}^{\infty} B_l(0)$, pokusme se provést aproximaci na B_l pro všechna $l \in \mathbb{N}$. Jak se to dělá na $B_1(0)$, jsme si předvedli v minulém kroku. V něm získané kompaktní množiny označme $F_{n,k}^1$ a spojité aproximující funkce označme f_n^1. Pokud pracujeme na $B_2(0)$, postupujeme obdobně. Jen tentokrát se pokusíme o větší přesnost při aproximaci úrovňových množin pomocí množin kompaktních. Jako výše lze nalézt kompaktní množiny $\{\widetilde{F}_{n,k}^2\}$ tak, že $\widetilde{F}_{n,k}^2 \subset A_{n,k} \cap B_2(0)$ a

$$\lambda_N((A_{n,k} \cap B_2(0)) \setminus \widetilde{F}_{n,k}^2) < \frac{\varepsilon}{2^{n+k+2}}.$$

Abychom si nezkazili aproximaci získanou na $B_1(0)$, položme ještě $F_{n,k}^2 := \widetilde{F}_{n,k}^2 \cup F_{n,k}^1$. Pak totiž stále máme

$$F_{n_k}^2 \subset A_{n,k} \cap B_2(0) \qquad \text{a} \qquad \lambda_N((A_{n,k} \cap B_2(0)) \setminus F_{n,k}^2) < \frac{\varepsilon}{2^{n+k+2}},$$

ale navíc jsme ještě dostali $F_{n,k}^1 \subset F_{n,k}^2$. S těmito množinami nyní pracujeme jako výše při konstrukci funkcí $\{f_n^2\}$.

Pokračujeme indukcí. Dostaneme $F_{n,k}^1 \subset F_{n,k}^2 \subset F_{n,k}^3 \subset \cdots \subset A_{n,k}$, dále $F_{n,k}^l \subset A_{n,k} \cap B_l(0)$ a

$$\lambda_N((A_{n,k} \cap B_l(0)) \setminus F_{n,k}^l) < \frac{\varepsilon}{2^{n+k+l}}.$$

Nyní se již snadno ověří, že diagonální posloupnost $\{f_n^n\}$ má požadované vlastnosti. $\square$

Poznámka 15.5.7. Vhodnou modifikací důkazu předchozí věty lze dokonce ukázat, že množina A, na které posloupnost spojitých funkcí nekonverguje k dané funkci, má nulovou míru.

Připomeňme, že spojité funkce jsou lebesgueovsky měřitelné. Na druhou stranu, lebesgueovky měřitelné funkce vykazují jistou slabší verzi spojitosti. Před uvedením odpovídajícího výsledku ještě potřebujeme provést přípravu, která je zajímavá sama o sobě.

Věta 15.5.8 (Jegorovova věta)**.** *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a platí $\mu(X) < \infty$. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných funkcí z X do $\mathbb{R}^*$, které jsou skoro všude konečné a konvergují skoro všude na X. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje měřitelná množina $E \subset X$ taková, že $\mu(E) < \varepsilon$ a $\{f_n\}$ konvergují stejnoměrně na $X \setminus E$.*

Důkaz. Díky předpokladům věty můžeme najít $A \subset X$ takovou, že $\mu(A) = 0$, $\{f_n\}$ jsou konečné na $X \setminus A$ a konvergují všude na $X \setminus A$ k funkci f. Pro všechna $k, n \in \mathbb{N}$ definujme množiny

$$E_{n,k} := \bigcup_{j=n}^{\infty} \{x \in X \setminus A \colon |f_j(x) - f(x)| \geq \tfrac{1}{k}\}.$$

Pak $\{E_{n,k}\}$ jsou měřitelné množiny a platí pro ně $E_{n,k} \supset E_{n+1,k}$. Dále díky bodové konvergenci pro každé $k \in \mathbb{N}$ máme

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n,k} = \emptyset.$$

Z posledních dvou informací a $\mu(E_{1,k}) < \infty$ (využíváme $\mu(X) < \infty$) dostáváme

$$\lim_{n \to \infty} \mu(E_{n,k}) = 0.$$

Ke každému $k \in \mathbb{N}$ proto lze najít $n(k) \in \mathbb{N}$ takové, že $\mu(E_{n(k),k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Položme

$$B := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n(k),k} \qquad \text{a} \qquad E = A \cup B.$$

Pak $\mu(E) < \varepsilon$ a pro každé $x \in X \setminus E$ a každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \qquad \text{pro každé } j > n(k).$$

□

Věta 15.5.9 (Luzinova věta)**.** *Nechť $f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je lebesgueovky měřitelná a $\varepsilon > 0$. Pak existuje otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^N$ taková, že $\lambda_N(G) < \varepsilon$ a f je spojitá na $\mathbb{R}^N \setminus G$ vzhledem k $\mathbb{R}^N \setminus G$.*

Důkaz. Podle Věty o aproximaci lebesgueovsky měřitelných funkcí spojitými funkcemi (Věta 15.5.6) existují $A \subset \mathbb{R}^N$ a posloupnost spojitých funkcí $\{f_n\}$ takové, že $f_n \to f$ na $\mathbb{R}^N \setminus A$ a $\lambda_N(A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Aplikujme nyní Jegorovovu větu (Věta 15.5.8) na koulích $B_l(0)$, abychom pro všechna $l \in \mathbb{N}$ dostali množinu $A_l \subset B_l(0)$ splňující

$$f_n \rightrightarrows f \qquad \text{na } B_l(0) \setminus (A \cup A_l) \qquad \text{a} \qquad \lambda_N(A_l) < \frac{\varepsilon}{2^{l+1}}.$$

Restrikce bodové limity funkcí f_n na doplněk množiny $A \cup \bigcup_{l=1}^{\infty} A_l$ je zde proto spojitá a navíc platí $\lambda_N(A \cup \bigcup_{l=1}^{\infty} A_l) < \varepsilon$. □

15.6 Dodatek: o vztahu spojitých a měřitelných funkcí, další vlastnosti borelovských funkcí

V následujícím textu uvedeme několik příkladů a výsledků z teorie reálných funkcí (důkazy jsou součástí specializovaných přednášek na oboru matematika), o kterých si myslíme, že umožní čtenáři lepší pochopení právě probrané latky.

Předně Luzinova věta (Věta 15.5.9) se dá zesílit tak, že dokonce existuje funkce $g \in C(\mathbb{R}^N)$ splňující $g = f$ na $\mathbb{R}^N \setminus G$. To plyne z následujícího výsledku o rozšiřování spojitých funkcí.

Věta 15.6.1 (Tietzeho věta)**.** *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $F \subset X$ je uzavřená množina a $f \in C(F)$. Pak existuje $g \in C(X)$ taková, že $g = f$ na F.*

Povšimněte si, že zesílení Luzinovy věty (Věta 15.5.9), o kterém právě hovoříme, je dokonce silnější než Věta o aproximaci lebesgueovsky měřitelných funkcí spojitými funkcemi (Věta 15.5.4). Tento výsledek obecně není možné zesílit tak, aby výjimečná množina G měla nulovou Lebesgueovu míru.

Příklad 15.6.2. Funkce $f := \operatorname{sign}$ je lebesgueovsky měřitená na $\mathbb{R}$. Pokud $g \in C(\mathbb{R})$ se má od f lišit jen na velmi malé množině, jistě nabývá hodnot -1 a 1. Díky Darbouxově větě pak musí existovat $x_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x_0) = \frac{1}{2}$. Ze spojitosti f v x_0 dále existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x) \in (0, 1)$ na $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ a zde nemůže platit $f = g$.

Ve Větě o aproximaci lebesgueovsky měřitelných funkcí spojitými funkcemi (Věta 15.3.13) není možné připustit $A = \emptyset$, neboť kupříkladu k Dirichletově funkci není možné bodově dokonvergovat spojitými funkcemi. To uvidíme z následující teorie.

Předně uveďme několik dalších poznámek k borelovským množinám. Ty je možné popsat jako sjednocení másledujících tříd množin

$$\begin{array}{lllll} G, & G_\delta, & G_{\delta\sigma}, & G_{\delta\sigma\delta}, & \dots \\ F, & F_\sigma, & F_{\sigma\delta}, & F_{\sigma\delta\sigma}, & \dots. \end{array}$$

Používá se také značení

$$\begin{array}{lllll} G_0, & G_1, & G_2, & G_3, & \dots \\ F_0, & F_1, & F_2, & F_3, & \dots. \end{array}$$

Zde G_0 představuje systém otevřených množin, F_0 systém uzavřených množin,

$$G_\alpha = \begin{cases} \{\bigcap_{j=1}^\infty A_j \colon A_j \in \bigcup_{\beta=0}^{\alpha-1} G_\beta\} & \text{pro } \alpha \text{ liché} \\ \{\bigcup_{j=1}^\infty A_j \colon A_j \in \bigcup_{\beta=0}^{\alpha-1} G_\beta\} & \text{pro } \alpha \text{ sudé} \end{cases}$$

a

$$F_\alpha = \begin{cases} \{\bigcup_{j=1}^\infty A_j \colon A_j \in \bigcup_{\beta=0}^{\alpha-1} F_\beta\} & \text{pro } \alpha \text{ liché} \\ \{\bigcap_{j=1}^\infty A_j \colon A_j \in \bigcup_{\beta=0}^{\alpha-1} F_\beta\} & \text{pro } \alpha \text{ sudé.} \end{cases}$$

Právě popsané systémy množin mají následující vlastnosti.

Věta 15.6.3 (O vlastnostech borelovských množin)**.** *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{N}_0$ platí*
(i) $A \in F_\alpha \Leftrightarrow X \setminus A \in G_\alpha$
(ii) $A \in G_\alpha \cup F_\alpha \Rightarrow A \in G_{\alpha+1} \cap F_{\alpha+1}$
(iii) *definice F_α a G_α dá totéž, připustíme-li jen monotonní průniky a sjednocení*
(iv) *třídy F_α a G_α jsou uzavřené na konečné průniky a konečná sjednocení, G_α pro α sudé a F_α pro α liché jsou uzavřené na spočetná sjednocení, G_α pro α liché a F_α pro α sudé jsou uzavřené na spočetné průniky.*

Poslední část předchozí věty nás motivuje k zavedení ještě jednoho značení. Pro $\alpha \in \mathbb{N}_0$ definujeme A_α jako α-tou aditivní třídu množin (uzavřenou na spočetná sjednocení; $A_0 = G_0$, $A_1 = F_1$, atd.) a M_α jako α-tou multiplikativní třídu množin (uzavřenou na spočetné průniky; $M_0 = F_0$, $M_1 = G_1$, atd.).

Nyní můžeme zavést jemnější přístup k borelovským funkcím.

Definice 15.6.4 (Borelovské třídy)**.** Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $\alpha \in \mathbb{N}_0$ a $f\colon X \to \mathbb{R}$ je definovaná na X. Řekneme, že f je *borelovská třídy* α a píšeme $f \in B_\alpha$ (nebo podrobněji $f \in B_\alpha(X)$), jestliže $\{f > c\}$ je třídy A_α pro všechna $c \in \mathbb{R}$.

Poznámka 15.6.5. (i) B_0 je třída spojitých funkcí.
(ii) Podmínka z definice je ekvivalentní tomu, že $\{f \leq c\}$ je třídy M_α pro všechna $c \in \mathbb{R}$.
(iii) Ekvivalentní je také podmínka, že vzor otevřené množiny je třídy A_α.
(iv) Dá se nahlédnout, že pro $A \subset X$ platí

$$\chi_A \in B_\alpha \iff A \in A_\alpha \cap M_\alpha.$$

(v) Zřejmě platí $B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \dots$.
(vi) Je-li prostor X dostatečně bohatý, ani $\bigcup_{\alpha=0}^{\infty} B_\alpha$ nepokryje všechny borelovské funkce (k tomu by bylo potřeba uvažovat i některá nekonečná α, na to bychom ale potřebovali hlubší úvod do teorie množin).

Věta 15.6.6 (O vlastnostech borelovských tříd)**.** *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $\alpha \in \mathbb{N}_0$, $\beta \in \mathbb{N}_0$, $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ a $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*
(i) *Jestliže $f \in B_\alpha$ a $A \in A_\alpha$, pak $f^{-1}(A) \in A_{\alpha+\beta}$.*
(ii) *Jestliže $f \in B_\alpha$ a $A \in M_\alpha$, pak $f^{-1}(A) \in M_{\alpha+\beta}$.*
(iii) *Jestliže $f \in B_\alpha$ a $h \in B_\beta$, pak $h \circ f \in B_{\alpha+\beta}$.*
(iv) *Jestliže $f, g \in B_\alpha$, pak $f \pm g, fg, \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in B_\alpha$. Pokud navíc $g \neq 0$ na X, pak $\frac{f}{g} \in B_\alpha$.*

Věta 15.6.7 (O borelovských třídách a limitním přechodu)**.** *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $\alpha \in \mathbb{N}_0$ a $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ je třídy B_α pro každé $n \in \mathbb{N}$.*
(i) *Jestliže $f_n \to f$ na X, pak $f \in B_{\alpha+1}$.*
(ii) *Jestliže $f_n \rightrightarrows f$ na X, pak $f \in B_\alpha$.*

Pomocí limitního přechodu je dokonce možné borelovské třídy charakterizovat.

Věta 15.6.8 (Lebesgue–Hausdorffova věta)**.** *Nechť* (X, ϱ) *je metrický prostor a* $\alpha \in \mathbb{N}$. *Pak*

$$B_\alpha = \Big\{ f \colon \exists \{f_n\} \in B_{\alpha-1} \quad f_n \to f \ \textit{na } X \Big\}.$$

Pro funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ navíc platí následující charakterizace B_1-funkcí.

Věta 15.6.9 (O charakterizaci B_1-funkcí na $\mathbb{R}$)**.** *Nechť* $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.*
(i) $f \in B_1$
(ii) *je-li* $\emptyset \neq F$ *uzavřená množina, pak* $f|_F$ *je spojitá alespoň v jednom bodě*
(iii) *je-li* $\emptyset \neq F$ *uzavřená množina a* $a < b$, *pak obě množiny*

$$\{x \in F \colon f(x) \leq a\} \quad a \quad \{x \in F \colon f(x) \geq b\}$$

nemohou být zároveň husté v F.

Příklad 15.6.10. Snadno se pomocí předchozí věty ověří, že Dirichletova funkce není třídy B_1. Je však třídy B_2. Skutečně, seřadíme-li všechna racionální čísla do posloupnosti $\{q_j\}_{j=1}^{\infty}$, pak

$$f_n := \chi_{\bigcup_{j=1}^{n} \{q_j\}} \to D$$

a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je snadné zkonstruovat posloupnost spojitých po částech afinních funkcí konvergujících bodově k f_n.

15.7 Integrál z nezáporné funkce

Při budování Lebesgueova integrálu budeme používat konvenci

$$0 \cdot (\pm\infty) = 0$$

ve smyslu, že integrál z nulové funkce přes množinu nekonečné míry bude vždy nulový a integrál z jakékoliv numerické funkce přes množinu nulové míry bude také nulový. Stále budeme předpokládat, že všechny funkce jsou definovány na celém prostoru X.

Definice 15.7.1 (Integrál z nezáporné funkce)**.** Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná a $s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$ je nezáporná měřitelná jednoduchá funkce. Pak definujeme

$$\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j \cap \Omega).$$

Pro $f \colon X \to [0, \infty]$ měřitelnou definujeme

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu := \sup \Big\{ \int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu \colon s \text{ je měřitelná jednoduchá funkce splňující } 0 \leq s \leq f \Big\}.$$

Číslo $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$ se nazývá *abstraktní Lebesgueův integrál* z funkce f podle míry μ přes množinu Ω.

Je přirozené se ptát, zda nejednoznačnost zápisu jednoduché funkce nemůže způsobit nejednoznačnost čísla $\int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu$ a zda přechod k supremu ve druhé části definice nemůže pro jednoduchou funkci změnit hodnotu integrálu, kterou jí dala část první. Na obě otázky je odpověď negativní (tedy definice integrálu je korektní), což plyne z následujícího lemmatu.

Lemma 15.7.2 (O monotonii integrálu pro jednoduché funkce)**.** *Nechť $(X,\mathcal{M},\mu)$ je měřitelný prostor, $m,n\in\mathbb{N}$, $A_1,\dots,A_m\subset X$ jsou po dvou disjunktní měřitelné množiny, $B_1,\dots,B_n\subset X$ jsou po dvou disjunktní měřitelné množiny a $a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_n\in[0,\infty)$. Jestliže $\sum_{j=1}^m a_j\chi_{A_j}\le\sum_{j=1}^n b_j\chi_{B_j}$, pak*

$$\sum_{j=1}^m a_j\mu(A_j)\le\sum_{j=1}^n b_j\mu(B_j).$$

Důkaz. Pro snazší značení dodefinujme $A_0:=X\setminus\bigcup_{i=1}^m A_i$, $B_0:=X\setminus\bigcup_{j=1}^n B_j$, $a_0:=0$ a $b_0:=0$. Pak máme $\bigcup_{i=0}^m A_i=X=\bigcup_{j=0}^n B_j$, a proto můžeme psát

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m a_i\mu(A_i)&=\sum_{i=0}^m a_i\mu(A_i)=\sum_{i=0}^m\sum_{j=0}^n a_i\mu(A_i\cap B_j)=\sum_{j=0}^n\sum_{i=0}^m a_i\mu(A_i\cap B_j)\\&\le\sum_{j=0}^n\sum_{i=0}^m b_j\mu(A_i\cap B_j)=\sum_{j=0}^n b_j\mu(B_j)=\sum_{j=1}^n b_j\mu(B_j).\end{aligned}$$

□

Základní vlastnosti integrálu nám dává následující tvrzení.

Tvrzení 15.7.3 (O základních vlastnostech integrálu)**.** *Nechť $(X,\mathcal{M},\mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega,A\subset X$ jsou měřitelné množiny a $f,g\colon X\to[0,\infty]$ jsou měřitelné funkce.*
(i) *Integrál $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$ je nezáporný.*
(ii) *Integrál $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$ nezávisí na chování funkce f mimo množinu Ω a na množinách nulové míry. Speciálně $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu=\int_X f\chi_\Omega\,\mathrm{d}\mu$.*
(iii) *Jestliže $A\subset\Omega$, pak $\int_A f\,\mathrm{d}\mu\le\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$.*
(iv) *Jestliže $f\le g$ na Ω, pak $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu\le\int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu$.*
(v) *Jestliže $c\in(0,\infty)$, pak $\int_\Omega cf\,\mathrm{d}\mu=c\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$.*
(vi) *Jestliže $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu<\infty$, pak $\mu(\{x\in\Omega\colon f(x)=\infty\})=0$.*

Důkaz. První tvrzení plyne z toho, že v definici integrálu uvažujeme jen nezáporné měřitelné jednoduché funkce. Při důkazu druhé vlastnosti si stačí uvědomit, že je-li s nezáporná měřitelná jednoduchá funkce, pak $\widetilde{s}:=s\chi_\Omega$ je také nezáporná měřitelná jednoduchá funkce a platí

$$\int_\Omega\widetilde{s}\,\mathrm{d}\mu=\int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu.$$

Díky tomu stačí v infimu z definice $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$ uvažovat jen nezáporná měřitelné jednoduché funkce, které jsou nulové vně Ω. Proto $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$ nezávisí na chování funkce f vně Ω. Podobnou úvahou se postaráme o množiny nulové míry a o třetí tvrzení.

Čtvrté tvrzení plyne z toho, že je-li s nezáporná měřitelná jednoduchá funkce splňující $s \leq g$ na Ω, pak také $s \leq f$ na Ω.

Při důkazu pátého tvrzení si povšimněme, že je-li s nezáporná měřitelná jednoduchá funkce splňující $s \leq f$ na Ω. Pak cs je nezáporná měřitelná jednoduchá funkce splňující $cs \leq cf$ na Ω a odtud

$$\int_\Omega cf \, \mathrm{d}\mu \leq c \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu.$$

Obrácenou nerovnost dostaneme analogickým způsobem díky identitě $f = \frac{1}{c}(cf)$.

Při důkazu šestého tvrzení si stačí uvědomit, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$n\chi_{\{f=\infty\}} \leq f \qquad \text{na } \Omega,$$

což implikuje

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \geq n\mu(\{x \in \Omega \colon f(x) = \infty\}).$$

□

Poznámka 15.7.4. Z monotonie integrálu okamžitě plyne *Čebyševova nerovnost*

$$\mu(\{x \in \Omega \colon |f(x)| \geq t\}) \leq \frac{1}{t} \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu$$

platná pro každá $t > 0$, měřitelnou množinu Ω a měřitelnou funkci f (pak je $|f|$ měřitelná a nezáporná). Tato nerovnost se často používá v teorii pravděpodobnosti a statistiky.

Poznámka 15.7.5. Z poslední části předchozí věty plyne, že $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \infty$, kdykoliv f je nezáporná měřitelná numerická funkce splňující $\mu(\{f = \infty\}) > 0$. Speciálně platí

$$\mu(\Omega) > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_\Omega \infty \, \mathrm{d}\mu = \infty.$$

Dokazování dalších vlastností integrálu nám usnadní následující výsledek o prohazování limity a integrálu.

Věta 15.7.6 (Lebesgueova věta o monotonní konvergenci)**.** *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných nezáporných numerických funkcí definovaných na X a platí $f_n \leq f_{n+1}$ na X pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Bodovou limitu této posloupnosti označme f. Pak*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Předně díky monotonii posloupnosti $\{f_n\}$ je numerická funkce f definovaná všude na X. Dále se díky Větě o měřitelnosti bodové limity měřitelných funkcí

(Věta 15.4.10) jedná o měřitelnou funkci. Díky monotonii Lebesgueova integrálu máme
$$\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \le \int_X f_{n+1} \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$
Limita $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$ proto existuje a díky odhadu $f_n \le f$ navíc platí
$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \le \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$
Zbývá dokázat obrácenou nerovnost. K tomu nám stačí zafixovat $\theta \in (0,1)$, dále zafixovat libovolnou měřitelnou jednoduchou funkci s splňující
$$0 \le s \le f \qquad \text{na } X$$
a ukázat, že
$$\theta \int_X s \,\mathrm{d}\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$
Funkci s si vyjádřeme ve tvaru $s = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}$, kde $\{A_j\}_{j=1}^m$ jsou měřitelné po dvou disjunktní množiny. Pro každé $j \in \{1,\dots,m\}$ a $n \in \mathbb{N}$ nyní definujme množinu
$$A_{j,n} := \{x \in A_j \colon f_n(x) \ge \theta s(x)\}.$$
Pro každé j pak díky monotonii posloupnosti $\{f_n\}$ máme $A_{j,1} \subset A_{j,2} \subset A_{j,3} \subset \dots$ a navíc platí $A_j = \bigcup_{n=1}^\infty A_{j,n}$ (skutečně, pokud pro $x \in A_j$ platí $f(x) = 0$, pak zřejmě $x \in \bigcup_{n=1}^\infty A_{j,n}$, jinak použijeme $f_n \to f$). Odtud díky Větě o základních vlastnostech míry (Věta 15.2.16) dostáváme $\mu(A_{j,n}) \to \mu(A_j)$. Proto monotonie integrálu dává
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}x &\ge \lim_{n\to\infty} \int_X \sum_{j=1}^m \theta a_j \chi_{A_{j,n}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^m \theta a_j \mu(A_{j,n}) = \sum_{j=1}^m \theta a_j \mu(A_j) \\ &= \theta \int_X s \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
□

Poznámka 15.7.7. (i) Předchozí větě se občas říká *Leviho věta.*
(ii) Ve větě stačí předpokládat, že monotonie je splněna pro s.v. $x \in X$, protože dle Tvrzení o základních vlastnostech integrálu (Tvrzení 15.7.3), bod (ii), nezávisí integrál na chování funkce na množině nulové míry.
(iii) Věta se často používá na řady funkcí. Potom požadujeme, aby částečné součty byly nezáporné a neklesající, což je splněno, má-li řada nezáporné členy.
(iv) Bez předpokladu o monotonii věta obecně neplatí. Nejen, že pak nemusí existovat bodová limita, ale i v případě její existence nemusí nastat rovnost z konce věty. Stačí uvážit posloupnost funkcí $\{f_n\} := \{n\chi_{(0,\frac{1}{n})}\}$ a pak máme $f_n \to 0 := f$,
$$\int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda_1 = 1 \qquad \text{a} \qquad \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda_1 = 0.$$

Příklad 15.7.8. Nechť $f_n = x^n$ na $\mathbb{R}$. Pak podle předchozí věty platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty f_n \, \mathrm{d}\lambda_1 = \int_1^\infty \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\lambda_1 = \int_1^\infty \infty \, \mathrm{d}\lambda_1 = \infty.$$

Následující výsledek nám říká, že v případě posloupnosti nezáporných měřitelných funkcí může při limitním přechodu hodnota integrálů jen klesnout.

Lemma 15.7.9 (Fatouovo)**.** *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných nezáporných numerických funkcí definovaných na X. Pak*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Definujme pomocné měřitelné funkce

$$g_n := \inf_{j\ge n} f_j \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Pak platí $g_n \le f_n$, a proto

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Na druhou stranu $\{g_n\}$ je neklesající posloupnost splňující $g_n \to \liminf_{n\to\infty} f_n$, a proto Lebesgueova věta o monotonní konvergenci (Věta 15.7.6) dává

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

□

Věta 15.7.10 (O aditivitě integrálu)**.** *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a f, g jsou měřitelné nezáporné numerické funkce definované na X. Pak*

$$\int_X (f+g) \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Podle Věty o měřitelnosti složené funkce (Věta 15.4.12) je funkce $f+g$ měřitená. Následně všechny tři integrály existují. Dokazovanou rovnost ukážeme nejprve pro dvojici jednoduchých funkcí. Jednoduché funkce f a g si popíšeme jako

$$f = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{D_j} \qquad \text{a} \qquad g = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{D_j},$$

kde D_j jsou po dvou disjunktní měřitelné množiny (použili jsme stejný postup jako v důkazu Lemmatu o monotonii integrálu pro jednoduché funkce, tedy Lemmatu 15.7.2) a pak už je dokazovaná rovnost zřejmá.

V obecném případě aproximujeme funkce f a g pomocí Věty o aproximaci měřitelných funkcí jednoduchými funkcemi (Věta 15.5.4) a dostaneme monotonní posloupnosti nezáporných měřitelných jednoduchých funkcí $\{s_n\}$ a $\{t_n\}$ splňující $s_n \to f$ a $t_n \to g$ na X. Následně použijeme Lebesgueovu větu o monotonní konvergenci (Věta 15.7.6) spolu s tím, že tvrzení již máme dokázáno pro $s_n + t_n$, a dostáváme

$$\int_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu \leftarrow \int_X (s_n+t_n)\,\mathrm{d}\mu = \int_X s_n\,\mathrm{d}\mu + \int_X t_n\,\mathrm{d}\mu \to \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

□

Poznámka 15.7.11. Minulá věta nám nedává jen aditivitu integrálu vůči integrandu, ale také aditivitu vůči integračnímu oboru, neboť můžeme psát (v dalším je f měřitelná funkce a A, B jsou měřitelné množiny)

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B} f\,\mathrm{d}\mu &= \int_X f\chi_{A\cup B}\,\mathrm{d}\mu = \int_X f(\chi_A+\chi_B)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_A\,\mathrm{d}\mu + \int_X f\chi_B\,\mathrm{d}\mu\\ &= \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_B f\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Lebesgueův integrál nám umožňuje konstruovat další míry.

Věta 15.7.12 (O míře s hustotou)**.** *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a f je měřitelná nezáporná numerická funkce definovaná na X. Pro každou měřitelnou množinu $A \subset X$ definujme*

$$\nu(A) := \int_A f\,\mathrm{d}\mu.$$

Pak ν je míra na $\mathcal{M}$ a pro každou nezápornou měřitelnou funkci g definovanou na X platí

$$\int_X g\,\mathrm{d}\nu = \int_X gf\,\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Nejprve ukážeme, ověřením σ-aditivity, že ν je míra. Nechť $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ je systém měřitelných po dvou disjunktních množin. Pak podle Lebesgueovy věty o monotonní konvergenci (Věta 15.7.6) máme

$$\nu\Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big) = \int_{\bigcup_{j=1}^\infty A_j} f\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\sum_{j=1}^\infty \chi_{A_j}\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^\infty \int_X f\chi_{A_j}\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^\infty \nu(A_j).$$

Zbývá dokázat poslední rovnost z věty. Podle definice míry μ máme pro libovolnou měřitelnou množinu A

$$\nu(A) := \int_A f\,\mathrm{d}\mu = \int_X \chi_A f\,\mathrm{d}\mu.$$

Dokazovaná rovnost proto platí pro charakteristické funkce. Následně díky Větě o aditivitě integrálu (Věta 15.7.10) a díky tomu, že před integrál můžeme vytýkat konstanty (šestá část Tvrzení o základních vlastnostech integrálu, tedy Tvrzení 15.7.3), dostáváme rovnost i pro g nezápornou měřitelnou jednoduchou. V obecném případě vezmeme monotonní posloupnost nezáporných měřitelných jednoduchých funkcí $\{s_n\}$ takových, že $s_n \to g$ na X. Pak máme $s_n f \to gf$, $s_n f \le s_{n+1} f$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a dvakrát aplikovaná Lebesgueova věta o monotonní konvergenci (Věta 15.7.6) nám dává

$$\int_X g \, \mathrm{d}\nu \leftarrow \int_X s_n \, \mathrm{d}\nu = \int_X s_n f \mathrm{d}\mu \to \int_X gf \, \mathrm{d}\mu.$$

□

Poznámka 15.7.13. (i) Funkce f z předešlé věty se nazývá *hustota* míry ν vzhledem k míře μ.
(ii) Pro každou míru získanou uvedenou konstrukcí zřejmě platí, že $\nu(A) = 0$ pro každou množinu splňující $\mu(A) = 0$. Odtud také vidíme, že uvedenou konstrukcí není možné třeba získat Diracovu míru pomocí Lebesgueovy míry.

15.8 Integrál z funkce měnící znaménko

Z důvodu jednoduchosti značení budeme v dalším pracovat s funkcemi definovanými na celém prostoru X.

Definice 15.8.1 (Integrál z obecné funkce)**.** Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a f je měřitelná numerická funkce. Pak definujeme (připomeňme $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := \max\{-f, 0\}$)

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu,$$

má-li pravá strana smysl v $\mathbb{R}^*$ (tedy je-li alespoň jeden z integrálů napravo konečný).

Prostor všech funkcí na X, pro které má $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ smysl, značíme $\mathcal{L}^*(\mu)$. Pokud je navíc integrál konečný, říkáme, že funkce f je *μ-integrovatelná* (v případě Lebesgueovy míry používáme termín *lebesgueovsky integrovatelná*) a píšeme $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Poznámka 15.8.2. Občas budeme také používat značení $\mathcal{L}^*(X, \mu)$ a $\mathcal{L}^1(X, \mu)$, bude-li potřeba upřesnit prostor X.

V případech, kdy nebude úplně jasné, podle které proměnné se integruje, budeme používat podrobné značení $\int_X f(x) \, \mathrm{d}\mu(x)$.

V jednodimenzionálním případě budeme pro dvojici reálných čísel $a < b$ používat značení $\int_a^b f \, \mathrm{d}\lambda_1 := \int_{(a,b)} f \, \mathrm{d}\lambda_1$.

Příklad 15.8.3. (i) Funkce sign nemá Lebesgueův integrál přes $\mathbb{R}$ opatřené Lebesgueovou mírou, neboť

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sign}^+ \, \mathrm{d}\lambda_1 = \infty \qquad \text{a} \qquad \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sign}^- \, \mathrm{d}\lambda_1 = \infty.$$

(ii) Analogicky funkce $\frac{\sin x}{x}$ nemá Lebesgueův integrál přes $(0, \infty)$ (podle Příkladu 7.6.13).

Poznámka 15.8.4. Druhá část předchozího příkladu je poněkud neuspokojivá. Celou dobu se snažíme vybudovat integrál, který bude schopen pracovat s větší třídou funkcí, než s jakou pracují Riemannův a Newtonův integrál, a nyní se nám snadno podařilo nalézt funkci, která je newtonovsky integrovatelná (pomocí Dirichletova kritéria), ale není integrovatelná lebesgueovsky. Konkrétně jsme se vzdali funkcí, pro něž Newtonův integrál nekonverguje absolutně. Vyloučení těchto funkcí nám ale později umožní získat řadu nástrojů pro prohazování pořadí integrálu a limitních procesů.

Poznámka 15.8.5. (i) Prostor $\mathcal{L}^1(\mu)$ je vektorový prostor. Prostor $\mathcal{L}^*(\mu)$ už vektorovým prostorem není, vzpomeňte si na

$$\operatorname{sign} = \operatorname{sign}^+ - \operatorname{sign}^- .$$

(ii) Jestliže $f \in \mathcal{L}^1(X_1, \mu)$ a $f \in \mathcal{L}^1(X_2, \mu)$, pak $f \in \mathcal{L}^1(X_1 \cup X_2, \mu)$. Toto neplatí pro $\mathcal{L}^*(\mu)$ (opět použijte signum).

Poznámka 15.8.6. Pokud $f = g$ skoro všude, máme $f^+ = g^+$ skoro všude a $f^- = g^-$ skoro všude, a proto se obě funkce z hlediska integrálu chovají zcela stejně.

Poznámka 15.8.7. V případě komplexních funkcí se zavádí integrál tak, že požadjeme, aby $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a pak definujeme

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X \operatorname{Re} f \,\mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int_X \operatorname{Im} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Věta 15.8.8 (O základních vlastnostech $\mathcal{L}^1(\mu)$)**.** *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor.*
(i) *Jestliže $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a*

$$\int_X (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \beta \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

(ii) *Je-li f měřitelná, pak*

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad\Longleftrightarrow\quad f^+, f^- \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad\Longleftrightarrow\quad |f| \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

(iii) *Jestliže $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak*

$$\Big| \int_X f \,\mathrm{d}\mu \Big| \le \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

(iv) *Jestliže $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak je konečná skoro všude.*
(v) *Jestliže $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathcal{L}^1(\mu)$.*
(vi) *Je-li $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a měřitelná funkce f splňuje $|f| \le g$ na X, pak $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.*

Důkaz. Dokažme první část. Předně pokud $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak snadno získáme (jistou opatrnost vyžaduje případ $\alpha < 0$), že $\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a

$$\int_X \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Dále máme

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$

Odtud máme ve všech bodech, kde jsou f a g konečné (ve skoro všech bodech),

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$$

a Věta o aditivitě integrálu (Věta 15.7.10) nám pak dává

$$\int_X (f+g)^+ \,\mathrm{d}\mu + \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu + \int_X g^- \,\mathrm{d}\mu = \int_X (f+g)^- \,\mathrm{d}\mu + \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int_X g^+ \,\mathrm{d}\mu.$$

Dále podle předpokladu $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ máme $\int_X f^- \,\mathrm{d}\mu < \infty$ a $\int_X g^- \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Protože $0 \le (f+g)^- \le f^- + g^-$, máme navíc i $\int_X (f+g)^- \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Díky tomu můžeme v předešlé rovnosti zmíněné tři integrály převést na druhou stranu a dostáváme

$$\int_X (f+g)^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X (f+g)^- \,\mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu + \int_X g^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X g^- \,\mathrm{d}\mu,$$

což jsme chtěli ukázat.

Dokažme druhou část. V první ekvivalenci plyne implikace „$\Leftarrow$“ z toho, že $f = f^+ - f^-$. Pokud naopak $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ podle definice integrálu platí alespoň jeden z výroků $f^+ \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $f^- \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Pokud by však platil právě jeden z těchto výroků, dostali bychom spor s linearitou integrálu. Druhá ekvivalence plyne z toho, že na jednu stranu máme $|f| = f^+ + f^-$ a na druhou stranu platí $0 \le f^+ \le |f|$ a $0 \le f^- \le |f|$.

Třetí tvrzení plyne z výpočtu

$$\begin{aligned}\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| &= \left|\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu\right| \le \left|\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu\right| + \left|\int_X f^- \,\mathrm{d}\mu\right| \\ &= \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Čtvrtou část dostaneme aplikací Tvrzení o základních vlastnostech integrálu (Tvrzení 15.7.3) na f^+ a f^-.

Pátou část dostaneme ze vztahů

$$\max\{f, g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2} \qquad \text{a} \qquad \min\{f, g\} = \frac{f+g-|f-g|}{2}.$$

Poslední část plyne z odhadů $0 \le f^+ \le g$ a $0 \le f^- \le g$. □

Poznámka 15.8.9. Analogický výsledek jako v bodě (i) v předešlé větě platí i pro případ, kdy f, $g \in \mathcal{L}^*(\mu)$. Jen je třeba předpokládat, že $\alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \beta \int_X g \,\mathrm{d}\mu$ má smysl v $\mathbb{R}^*$.

Příklad 15.8.10. Omezená měřitelná funkce na množině konečné míry je integrovatelná.

Věta 15.8.11 (O vztahu nulovosti integrálu a nulovosti funkce)**.** *Nechť* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
(i) *Je-li* f *nezáporná a* $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$*, pak* $f = 0$ *skoro všude.*
(ii) *Jestliže* $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = 0$ *pro každou měřitelnou množinu* $\Omega \subset X$*, pak* $f = 0$ *skoro všude.*

Důkaz. V prvním případě definujme pro každé $n \in \mathbb{N}$ množinu

$$A_n := \{x \in X : f(x) \geq \tfrac{1}{n}\}.$$

Pak

$$0 = \int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{A_n} f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{A_n} \frac{1}{n} \,\mathrm{d}\mu = \frac{\mu(A_n)}{n}.$$

Odtud

$$\mu(\{f > 0\}) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = 0.$$

Ve druhém případě nejprve položme $\Omega := \{f^+ > 0\}$. Pak díky předpokladu máme

$$\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu = 0$$

a podle první části věty dostáváme, že $f^+ = 0$ skoro všude. Analogicky dostaneme, že $f^- = 0$ skoro všude. □

Důsledek 15.8.12. *Nechť* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$*. Jestliže*

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu$$

pro každou měřitelnou množinu $\Omega \subset X$*, pak* $f \leq g$ *skoro všude.*

Důkaz. Stačí aplikovat druhou část předchozí věty na funkci $(f - g)^+$. □

Lebesgueův integrál navíc vykazuje následující typ spojitosti.

Věta 15.8.13 (O absolutní spojitosti Lebesgueova integrálu)**.** *Nechť* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$*. Pak pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *takové, že*

$$\mu(E) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \int_E |f| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Důkaz. Víme, že $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Zafixujme jednoduchou funkci s splňující $0 \leq s \leq |f|$ a

$$\int_X s \,\mathrm{d}\mu > \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $M := \max_X s$. Pak pro každou množinu $E \subset X$ splňující $\mu(E) < \frac{\varepsilon}{2M}$ máme

$$\begin{aligned}\int_E |f| \,\mathrm{d}\mu &= \int_E (|f| - s) \,\mathrm{d}\mu + \int_E s \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X (|f| - s) \,\mathrm{d}\mu + \int_E s \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2}\mu(E) < \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Poznámka 15.8.14. V teorii reálných funkcí se používá pojem absolutně spojité funkce na intervalu I. Tato vlastnost je definována podmínkou, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každou konečnou posloupnost po dvou disjunktních intervalů $(a_j, b_j) \subset I$ platí

$$\sum_j (b_j - a_j) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_j |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

Není těžké si rozmyslet, že tento pojem je silnější než stejnoměrná spojitost a slabší než lipschitzovskost.

Věnujme se ještě prohazování limity a integrálu. Nejprve si lehce zesílíme Lebesgueovu větu o monotonní konvergenci (Věta 15.7.6).

Věta 15.8.15 (Lebesgueova věta o monotonní konvergenci (zesílená verze))**.** *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných numerických funkcí definovaných na X, platí $f_n \leq f_{n+1}$ skoro všude na X pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu > -\infty$. Bodovou limitu této posloupnosti označme f (je definovaná skoro všude). Pak*

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Nejprve funkce $\{f_n\}$ předefinujeme na množině nulové míry tak, aby $f_n \leq f_{n+1}$ a $f_n \to f$ platilo všude. Důkaz pak získáme aplikací Lebesgueovy věty o monotonní konvergenci (Věta 15.7.6) na posloupnost $\{f_n + f_1^-\}$. $\square$

Poznámka 15.8.16. (i) Podmínku $\int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu > -\infty$ není možné vynechat, jak ukazuje příklad

$$\int_{\mathbb{R}} -\frac{1}{n} \,\mathrm{d}\lambda_1 = -\infty \qquad \text{zatímco} \qquad \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \,\mathrm{d}\lambda_1 = 0.$$

(ii) Přechodem od f k $-f$ můžeme dokázat, že pokud $f_n \geq f_{n+1}$ s.v. v X a $\int_X f_1 \mathrm{d}\lambda_1 < \infty$, pak

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Věta 15.8.17 (Lebesgueova věta o majorizované konvergenci)**.** *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných numerických funkcí definovaných na X, platí $f_n \to f$ skoro všude na X a existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|f_n| \leq g$ skoro všude na X pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak*

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Nejprve funkce $\{f_n\}$ předefinujeme na množině nulové míry tak, aby všechny předpoklady platily všude na X.

Definujme pomocné funkce $g_n := 2g - |f_n - f|$. Snadno dostaneme, že $g_n \geq 0$ a $g_n \to 2g$. Můžeme proto aplikovat Fatouovo lemma (Lemma 15.7.9) a dostáváme

$$\begin{aligned}\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu &= \int_X \lim_{n\to\infty} g_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f_n - f|) \, \mathrm{d}\mu = \int_X 2g \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Dostali jsme $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0$ a z toho okamžitě plyne dokazovaný výsledek (pomocí třetí části Věty o základních vlastnostech $\mathcal{L}^1(\mu)$, tedy Věty 15.8.8). □

Poznámka 15.8.18. Funkci g z předchozí věty se říká *integrovatelná majoranta* (pro funkce $\{f_n\}$).

Poznámka 15.8.19. V případě potřeby aplikovat Lebesgueovu větu o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17) na řady se obvykle používá majorizování částečných součtů pomocí $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, neboli

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} f_j\Big| \leq g \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N},$$

nebo přísnější podmínka

$$|f_j| \leq g_j \quad \text{skoro všude} \qquad \text{a} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} g_j \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Příklad 15.8.20. Spočítejme $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}} \, \mathrm{d}\lambda_1(x)$. Označme $f_n := \frac{x^n}{1+x^{2n}}$. Pak $f_n \to f$ na $(0, \infty)$, kde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (0,1) \cup (1,\infty) \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 1. \end{cases}$$

Položme

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in (0,1] \\ \frac{1}{x^2} & \text{pro } x \in (1,\infty). \end{cases}$$

Snadno se ověří, že $g \in \mathcal{L}^1((0,\infty), \lambda_1)$. Funkce g je integrovatelnou majorantou pro funkce $f_2, f_3, \ldots$ (neplatí $f_1 \leq g$, navíc integrovatelná majoranta splňující takovou nerovnost ani existovat nemůže, neboť $f_1 \notin \mathcal{L}^1((0,\infty))$. Lebesgueovu větu o majorizované konvergenci pak můžeme aplikovat třeba na modifikovanou posloupnost $\{\widetilde{f}_1, f_2, f_3, \ldots\}$, kde $\widetilde{f}_1 \equiv 0$ a dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}} \, \mathrm{d}\lambda_1(x) = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \, \mathrm{d}\lambda_1(x) = \int_0^\infty f(x) \, \mathrm{d}\lambda_1(x) = 0.$$

15.9 Vztah k Riemannovu a Newtonovu integrálu

Nyní se budeme zabývat vztahem Lebesgueova integrálu k integrálům, které jsme zavedli dříve. Integrovat zde budeme vždy jen vzhledem k jednorozměrné Lebesgueově míře λ_1. Cenný bude zejména vztah k Newtonovu integrálu, který nám umožní počítat Lebesgueovy integrály pomocí primitivní funkce. Právě tyto výsledky pro nás budou odrazovým můstkem pro pozdější aplikace pokročilejších metod počítání Lebesgueova integrálu.

Věta 15.9.1 (O vztahu Riemannova a Lebesgueova integrálu)**.** *Nechť* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *a* f *je riemannovsky integrovatelná na* $[a,b]$. *Pak je i lebesgeovsky integrovatelná a oba integrály se rovnají.*

Důkaz. Nechť $\{D_n\}$ je posloupnost postupně se zjemňujících dělení, jejichž norma jde k nule. Z teorie Riemannova integrálu víme, že pro odpovídající dolní a horní součty platí

$$s(f,D_1) \leq s(f,D_2) \leq \cdots \leq (\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x \leq \ldots S(f,D_2) \leq S(f,D_1)$$

a

$$s(f,D_n) \to (\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x \leftarrow S(f,D_n).$$

V dalším bude $\{g_n\}$ monotonní posloupnost po částech konstantních funkcí odpovídající součtům $\{s(f,D_n)\}$ zkonstruovaná tak, že na vnitřku intervalu mezi sousedními dělícími body x_j^n, x_{j+1}^n definujeme g_n jako $\inf_{[x_j^n, x_{j+1}^n]} f$ a v dělících bodech použijeme stejnou hodnotu, jakou v nich má funkce f. Analogicky bude $\{h_n\}$ monotonní posloupnost po částech konstantních funkcí odpovídající součtům $\{S(f,D_n)\}$.

Máme tedy

$$g_1 \leq g_2 \leq \cdots \leq f \leq \ldots h_2 \leq h_1,$$

$$s(f,D_n) = \int_a^b g_n\,\mathrm{d}\lambda_1 \qquad \text{a} \qquad S(f,D_n) = \int_a^b h_n\,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Díky monotonii posloupností $\{g_n\}$ a $\{h_n\}$ můžeme definovat $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ a $h = \lim_{n\to\infty} g_n$. Pak máme $g \leq f \leq h$ a díky Lebesgueově větě o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17) s integrovatelnou majorantou konstantně rovnou číslu $\sup_{[a,b]} |f|$ dostáváme

$$\int_a^b g_n\,\mathrm{d}\lambda_1 \to \int_a^b g\,\mathrm{d}\lambda_1 \qquad \text{a} \qquad \int_a^b h_n\,\mathrm{d}\lambda_1 \to \int_a^b h\,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Proto

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_a^b (h-g)\,\mathrm{d}\lambda_1 &= \lim_{n\to\infty} S(f,D_n) - \lim_{n\to\infty} s(f,D_n) \\ &= (\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x - (\mathcal{R})\int_a^b f\,\mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

Následně $g = h$ skoro všude (podle Věty o vztahu nulovosti integrálu a nulovosti funkce, tedy Věty 15.8.11). Celkově $g = f = h$ skoro všude na $[a, b]$ a máme

$$\int_a^b f \, d\lambda_1 = \int_a^b g \, d\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n \, d\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = (\mathcal{R}) \int_a^b f \, dx.$$

□

Poznámka 15.9.2. Platí dokonce následující zesílení Věty o riemannovské integrovatelnosti funkce spojité až na konečně bodů (Věta 7.3.6). To říká, že je-li funkce f omezená na omezeném intervalu v $\mathbb{R}$, potom je na tomto intervalu riemannovsky integrovatelná právě tehdy když je na tomto intervalu spojitá s.v. Důkaz lze nalézt například v [Ap MA].

Vztah mezi Lebesgueovým a Newtonovým integrálem je o něco složitější, neboť první jmenovaný integrál je absolutně konvergentní, zatímco druhý nikoliv (vzpomeňte si na funkci $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$).

Věta 15.9.3 (O vztahu Newtonova a Lebesgueova integrálu)**.** *Nechť* $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $f \in C((a, b))$, $f \in \mathcal{L}^*(\lambda_1)$ *a* F *značí primitivní funkci k* f *na* (a, b)*. Pak*

$$\int_a^b f \, d\lambda_1 = F(b-) - F(a+).$$

Důkaz. Protože funkce f^+ a f^- jsou spojité na (a, b), mají zde primitivní funkce. Označme je F_1 a F_2. Můžeme předpokládat, že $F = F_1 - F_2$, jinak přičteme odpovídající konstantu k F_2.

Zafixujme $c \in (a, b)$ a zvolme posloupnost $\{b_n\}$ tak, aby $c < b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b$ a $b_n \to b$. Pak díky předchozí větě, monotonii F_1 a Lebesgueově větě o monotonní konvergenci (Věta 15.7.6) máme

$$\int_c^b f^+ \, d\lambda_1 \leftarrow \int_c^{b_n} f^+ \, d\lambda_1 = (\mathcal{R}) \int_c^{b_n} f^+ \, dx = F_1(b_n) - F_1(c) \to F_1(b-) - F_1(c).$$

Podobnou operaci provedeme na intervalu (a, c) a dostáváme

$$\int_a^c f^+ \, d\lambda_1 = F_1(c) - F_1(a+),$$

což po sečtení s předchozím výsledkem dává

$$\int_a^b f^+ \, d\lambda_1 = F_1(b-) - F_1(a+).$$

Analogicky pracujeme s f^- a dostaneme

$$\int_a^b f^- \, d\lambda_1 = F_2(b-) - F_2(a+).$$

Dále víme, že $f \in \mathcal{L}^*(\lambda_1)$. Proto je alespoň jeden z integrálů $\int_a^b f^+ \,\mathrm{d}\lambda_1$ a $\int_a^b f^- \,\mathrm{d}\lambda_1$ konečný, tedy alespoň jeden z výrazů $F_1(b-)-F_1(a+)$ a $F_2(b-)-F_2(a+)$ obsahuje dvojici konečných čísel, a proto lze psát

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\lambda_1 = \big(F_1(b-) - F_1(a+)\big) - \big(F_2(b-) - F_2(a+)\big) = F(b-) - F(a+).$$

□

Příklad 15.9.4. Spočítejme integrál

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x^2} \,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Integrand je nezáporná spojitá funkce, máme proto splněny všechny předpoklady předchozí věty. Protože

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{\mathrm{e}^x-1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = 1,$$

podle Srovnávacího kriteria pro existenci Newtonova integrálu nekonverguje integrál (Věta 7.6.5) $(\mathcal{N}) \int_a^b \frac{\mathrm{e}^x-1}{x^2} \,\mathrm{d}x$, a proto dostáváme

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x^2} \,\mathrm{d}\lambda_1 = F(1_-) - F(0_+) = \infty.$$

15.10 Integrály závislé na parametru

V dalším se budeme zabývat studiem chování funkcí typu

$$\varphi\colon \alpha \mapsto \int_X f(x,\alpha) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

Parametr α budeme brát ze zadaného intervalu v $\mathbb{R}$. Získané výsledky, zejména formule pro $\varphi'(\alpha)$, budou zdrojem nových metod pro výpočet integrálů.

Věta 15.10.1 (O spojitosti integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $A \subset \mathbb{R}$ a $\alpha_0 \in A$ je vnitřní bod množiny A. Nechť funkce $f\colon X \times A \to \mathbb{R}$ splňuje*
(i) *$x \mapsto f(x,\alpha)$ je měřitelná pro všechna $\alpha \in A$*
(ii) *pro skoro všechna $x \in X$ je funkce $\alpha \mapsto f(x,\alpha)$ spojitá v bodě α_0*
(iii) *existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že*

$$|f(x,\alpha)| \le g(x) \qquad \text{pro skoro všechna } x \in X \text{ a všechna } \alpha \in A.$$

Pak funkce $x \mapsto f(x,\alpha)$ leží v $\mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $\alpha \in A$ a funkce

$$\alpha \mapsto \int_X f(x,\alpha) \,\mathrm{d}\mu(x)$$

je spojitá v α_0.

Důkaz. Zvolme posloupnost $\{\alpha_n\} \subset A \setminus \{\alpha_0\}$ splňující $\alpha_n \to \alpha_0$. Pak je funkce $f(x, \alpha_0)$ bodovou limitou funkcí $x \mapsto f(x, \alpha_n)$. Podle Lebesgueovy věty o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17) platí

$$\int_X f(x, \alpha_n)\,\mathrm{d}\mu(x) \to \int_X f(x, \alpha_0)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Vzhledem k podmínkám kladeným na posloupnost $\{\alpha_n\}$ můžeme použít Heineho větu (Věta 5.4.1) a dostáváme dokazované tvrzení. □

Drobná modifikace právě uvedeného důkazu nám dává následující verzi předchozí věty.

Věta 15.10.2 (O limitě integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $A \subset \mathbb{R}$ a $\alpha_0 \in A$ je vnitřní bod množiny A. Nechť funkce $f\colon X \times (A \setminus \{\alpha_0\}) \to \mathbb{R}$ splňuje*
(i) *$x \mapsto f(x, \alpha)$ je měřitelná pro všechna $\alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$*
(ii) *pro skoro všechna $x \in X$ existují vlastní limity $F(x) := \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x, \alpha)$*
(iii) *existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že*

$$|f(x, \alpha)| \le g(x) \qquad \textit{pro skoro všechna } x \in X \textit{ a všechna } \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}.$$

Pak funkce $x \mapsto f(x, \alpha)$ leží v $\mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $\alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$, $F \in \mathcal{L}^1(\mu)$, existuje limita $\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_X f(x, \alpha)\mathrm{d}\mu(x)$ a platí pro ni

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_X f(x, \alpha)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X F(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Důkaz. Zvolme posloupnost $\{\alpha_n\} \subset A \setminus \{\alpha_0\}$ splňující $\alpha_n \to \alpha_0$. Pak je funkce F bodovou limitou funkcí $x \mapsto f(x, \alpha_n)$. Je tudíž měřitelná a podle Lebesgueovy věty o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17) platí

$$\int_X f(x, \alpha_n)\,\mathrm{d}\mu(x) \to \int_X F(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Vzhledem k podmínkám kladeným na posloupnost $\{\alpha_n\}$ můžeme použít Heineho větu (Věta 5.4.1) a dostáváme tvrzení o limitním přechodu. Dále díky předpokladu $|f(x, \alpha_n)| \le g(x)$ máme

$$\int_X |f(x, \alpha_n)|\,\mathrm{d}\mu(x) \le \int_X g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \in \mathbb{R}$$

a totéž musí platit pro limitní funkci. Díky tomu nám všechny dokazované vlastnosti dává Věta o základních vlastnostech $\mathcal{L}^1(\mu)$ (Věta 15.8.8). □

Věta 15.10.3 (O derivaci integrálu podle parametru)**.** *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a $A \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Nechť funkce $f\colon X \times A \to \mathbb{R}$ splňuje*
(i) *$x \mapsto f(x, \alpha)$ je měřitelná pro všechna $\alpha \in A$*

(ii) *pro skoro všechna $x \in X$ a všechna $\alpha \in A$ existují (vlastní) $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$*
(iii) *existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\right| \leq g(x) \qquad \textit{pro skoro všechna } x \in X \textit{ a všechna } \alpha \in A$$

(iv) *existuje $\alpha_0 \in A$ takové, že funkce $x \mapsto f(x, \alpha_0)$ leží v $\mathcal{L}^1(\mu)$.*

Pak funkce $x \mapsto f(x, \alpha)$ leží v $\mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $\alpha \in A$, funkce $\varphi\colon \alpha \mapsto \int_X f(x, \alpha)\,\mathrm{d}\mu(x)$ má na A vlastní derivaci a platí pro ni

$$\varphi'(\alpha) = \int_X \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Důkaz. Díky předpokladům a Lagrangeově větě o přírůstku funkce (Věta 6.3.3) pro skoro každé $x \in X$ a každé $\alpha \in A$ existuje $\theta_{x,\alpha} \in (0, 1)$ takové, že platí

$$\begin{aligned} |f(x, \alpha)| &= \left|f(x, \alpha_0) + \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha_0 + \theta_{x,\alpha}(\alpha - \alpha_0))(\alpha - \alpha_0)\right| \\ &\leq |f(x, \alpha_0)| + |\alpha - \alpha_0|\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha_0 + \theta_{x,\alpha}(\alpha - \alpha_0))\right| \\ &\leq |f(x, \alpha_0)| + |\alpha - \alpha_0| g(x). \end{aligned}$$

Odtud snadno dostáváme, že $x \mapsto f(x, \alpha)$ leží v $\mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $\alpha \in A$.

Při důkazu tvrzení o $\varphi'(\alpha)$ zafixujme $\alpha_0 \in A$. S ohledem na Heineho větu (Věta 5.4.1) stačí pro libovolnou posloupnost $\{\alpha_n\} \subset A \setminus \{\alpha_0\}$ splňující $\alpha_n \to \alpha_0$ dokázat, že

$$\int_X \frac{f(x, \alpha_n) - f(x, \alpha_0)}{\alpha_n - \alpha_0}\,\mathrm{d}\mu(x) \overset{n\to\infty}{\to} \int_X \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha_0)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

To však plyne z Lebesgueovy věty o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17), neboť máme

$$\frac{f(x, \alpha_n) - f(x, \alpha_0)}{\alpha_n - \alpha_0} \to \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha_0) \qquad \text{pro skoro všechna } x \in X$$

a podle Lagrangeovy věty o přírůstku funkce platí odhad

$$\left|\frac{f(x, \alpha_n) - f(x, \alpha_0)}{\alpha_n - \alpha_0}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha_0 + \theta_{x,n}(\alpha_n - \alpha_0))\right| \leq g(x).$$

□

Poznámka 15.10.4. V obou výsledcích pro integrály závislé na parametru bylo také možné brát více parametrů. Pokud nás zajímají jednostranné limity, jednostranná spojitost či jednostranné derivace, postačí, když množina A obsahuje nějaké odpovídající jednostranné okolí bodu α_0.

Příklad 15.10.5. Pro $\alpha > 0, \beta > 0$ spočítejme $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \, d\lambda_1(x)$. Nejprve si povšimněme, že

$$\frac{\partial \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}}{\partial \alpha} = -e^{-\alpha x}$$

je funkce, pro kterou umíme najít primitivní funkci. Toho nyní využijeme. Zafixujme $\beta > 0$ a $\delta \in (0, \beta)$ (využití bude jasné při hledání integrovatelné majoranty g) a položme

$$f(x, \alpha) := \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \qquad \text{pro } x \in X := \mathbb{R} \text{ a } \alpha \in A := (\delta, \infty).$$

Použijeme nyní Větu o derivaci integrálu podle parametru (Věta 15.10.3). Předpoklady (i) a (ii) jsou zřejmě splněny. Dále pro předpoklad (iv) stačí vzít $\alpha_0 := \beta$ a máme $f(x, \alpha_0) \equiv 0$, což je integrovatelná funkce. Zbývá pro parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -e^{-\alpha x}$ najít integrovatelnou majorantu nezávislou na $\alpha \in (\delta, \infty)$. K tomu stačí položit

$$g(x) := \sup_{\alpha \in (\delta, \infty)} |-e^{-\alpha x}| = e^{-\delta x}.$$

Věta o derivaci integrálu podle parametru (Věta 15.10.3) proto dává

$$\varphi'(\alpha) = \int_0^\infty -e^{-\alpha x} \, d\lambda_1(x) = -\frac{1}{\alpha}.$$

Odtud na (δ, ∞) dostáváme (připomeňme $\varphi(\beta) = 0$)

$$\varphi(\alpha) = -\log \alpha + C \overset{\varphi(\beta)=0}{=} \log \beta - \log \alpha = \log \frac{\beta}{\alpha}.$$

Protože $\delta > 0$ bylo libovolné, výsledek platí pro všechna $\alpha > 0, \beta > 0$.

Minulý příklad byl zajímavý tím, že nebylo možné zkonstruovat jedinou integrovatelnou majorantu pro celý interval $(0, \infty)$. Pro výpočet integrálu nám však postačilo vyrobit dostatečně bohatý systém integrovatelných majorant.

Máme-li při počítání integrálu za pomocí Věty o derivaci inegrálu podle parametru o něco méně štěstí, nezískáme předpis pro $\varphi'(\alpha)$, ale pouze diferenciální rovnici, kterou musíme ještě vyřešit.

Příklad 15.10.6. S využitím informace, že $\int_0^\infty e^{-x^2} \, d\lambda_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (tento výsledek získáme v jednom z následujících příkladů), spočítejme

$$\varphi(\alpha) := \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(\alpha x) \, d\lambda_1(x).$$

Tentokrát máme $\varphi(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, čímž jsme zaručili podmínku (iv) z Věty o derivaci integrálu podle parametru (Věta 15.10.3), a

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -x e^{-x^2} \sin(\alpha x).$$

Integrovatelnou majorantou je zde $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x^2}$ na $(0,\infty)$. Dostáváme (ve druhé rovnosti využíváme Lebesgueovu větu o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17) a ve třetí per partes pro Riemannův integrál)

$$\begin{aligned}\varphi'(\alpha) &= -\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x^2}\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = \lim_{R\to\infty} -\int_0^R x\mathrm{e}^{-x^2}\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\\ &= \lim_{R\to\infty}(\mathcal{R})\int_0^R(-x\mathrm{e}^{-x^2})\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\\ &= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\Big([\mathrm{e}^{-x^2}\sin(\alpha x)]_0^R - \alpha\int_0^R \mathrm{e}^{-x^2}\cos(\alpha x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\Big)\\ &= -\frac{\alpha}{2}\varphi(\alpha).\end{aligned}$$

Dostali jsme diferenciální rovnici

$$\varphi'(\alpha) + \frac{\alpha}{2}\varphi(\alpha) = 0, \quad \varphi(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Řešením je $\varphi(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{4}}$.

V aplikacích se často stává, že máme spočítat nějaký integrál a my sami si uměle přidáme parametr.

Příklad 15.10.7. Spočítejme integrál $\int_0^1 \frac{\log(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$. Položme

$$\varphi(\alpha) := \int_0^1 \frac{\log(1-\alpha x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\lambda_1 \quad \text{pro } \alpha\in[0,1].$$

Pak máme $\varphi(0) = 0$ a hledaný integrál je $\varphi(1)$. Pokusme se spočítat derivaci funkce φ. Máme

$$\frac{\partial\frac{\log(1-\alpha x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}}{\partial\alpha} = -\frac{1}{(1-\alpha x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Z předpokladů Věty o derivaci integrálu podle parametru (Věta 15.10.3) máme snadno splněno vše až na existenci integrovatelné majoranty. Zde narážíme na problém, že se nabízí funkce $x \mapsto \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$, která však není integrovatelná. Omezme se tedy jen na $\alpha \in [0, 1-\delta]$, kde je $\delta \in (0,1)$. Zde můžeme vzít teď už integrovatelnou majorantu $x \mapsto \frac{1}{(1-(1-\delta)x^2)\sqrt{1-x^2}}$. Následně máme (po přechodu k Newtonově integrálu provedeme substituci $x = \cos y$ a pak ještě $t = \tan y$)

$$\begin{aligned}\varphi'(\alpha) &= -(\mathcal{N})\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1-\alpha x^2)\sqrt{1-x^2}} = -(\mathcal{N})\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y\,\mathrm{d}y}{(1-\alpha\cos^2 y)\sqrt{1-\cos^2 y}}\\ &= -(\mathcal{N})\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}y}{1-\alpha\cos^2 y} = -(\mathcal{N})\int_0^\infty \frac{\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{1-\frac{\alpha}{1+t^2}} = -(\mathcal{N})\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}t}{1-\alpha+t^2}\\ &= -\Big[\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\arctan\Big(\frac{t}{\sqrt{1-\alpha}}\Big)\Big]_0^\infty = -\frac{\pi}{2\sqrt{1-\alpha}}.\end{aligned}$$

Odtud, z vlastnosti $\varphi(0) = 0$ a z toho, že $\delta \in (0,1)$ bylo libovolné, dostáváme

$$\varphi(\alpha) = \pi\sqrt{1-\alpha} - \pi \qquad \text{pro všechna } \alpha \in [0,1).$$

Hodnotu $\varphi(1)$ se pokusíme zjistit pomocí levostranné verze Věty o limitě integrálu závislého na parametru (Věta 15.10.2). V tomto případě volíme majorantu $x \mapsto -\frac{\log(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}$, ta je použitelná pro $\alpha \in [0,1]$, a proto dostáváme $\varphi(1) = -\pi$.

Příklad 15.10.8. Ukažme si, že $I := \int_0^\infty e^{-x^2}\, d\lambda_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Definujme si dvě pomocné funkce

$$g(s) := \int_0^s e^{-x^2}\, d\lambda_1(x) \qquad \text{pro } s > 0$$

a

$$f(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\, d\lambda_1(t) \qquad \text{pro } x \geq 0.$$

Dokazovaný výsledek získáme aplikací Newtonovy formule na funkci f na intervalu $(0,\infty)$. Za tím účelem potřebujeme vyjádřit $\lim_{x\to 0_+} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ a vzorec pro f' na $(0,\infty)$. Předně máme

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = f(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Druhá rovnost je zřejmá, zatímco první rovnost je zaručena Větou o spojitosti integrálu podle parametru (Věta 15.10.1), při jejíž aplikaci lze jako integrovatelnou majorantu použít třeba konstantní jedničku. Kombinací Heineho věty (Věta 5.4.1) a Lebesgueovy věty o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17) (to je vlastně princip důkazu Věty o spojitosti integrálu závislého na parametru, tedy Věty 15.10.1) se stejnou integrovatelnou majorantou jako výše dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \int_0^1 0\, d\lambda_1(t) = 0.$$

Derivaci spočteme pomocí Věty o derivaci integrálu závislého na parametru (Věta 15.10.3). Předpoklady se ověří snadno a ve výpočtu použijeme přechod k Newtonovu integrálu a substituci $u = \sqrt{x}t$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\, d\lambda_1(t) = -(\mathcal{N})\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\, dt = -e^{-x}(\mathcal{N})\int_0^1 e^{-xt^2}\, dt \\ &= -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}(\mathcal{N})\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\, du = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} g(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Nyní již stačí jen použít zmíněnou Newtonovu formuli spolu se substitucí $s = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{4} &= \lim_{x\to\infty} f(x) - \lim_{x\to 0_+} f(x) = (\mathcal{N})\int_0^\infty f'(x)\, dx = -(\mathcal{N})\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} g(\sqrt{x})\, dx \\ &= -(\mathcal{N})\int_0^\infty 2e^{-s^2} g(s)\, ds = -(\mathcal{N})\int_0^\infty 2g'(s)g(s)\, ds = -(\mathcal{N})\int_0^\infty {g'}^2(s)\, ds \\ &= \lim_{s\to 0_+} g^2(s) - \lim_{s\to\infty} g^2(s) = -I^2, \end{aligned}$$

z čehož již plyne dokazovaný výsledek.

15.10.1 Γ-funkce a B-funkce

Nyní si jako aplikaci teorie integrálů závislých na parametru představíme dvě speciální funkce. Zajímavá pro nás bude zejména první z nich, funkce Γ, která zobecňuje pojem faktoriálu. Dají se na ni převést některé integrály a, jak brzy uvidíme, souvisí s objemem jednotkové koule v $\mathbb{R}^N$.

Definice 15.10.9 (Γ-funkce a B-funkce)**.** Eulerova Γ-funkce je definována předpisem

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\lambda_1(x) \qquad \text{pro } s > 0.$$

Eulerova B-funkce je definována předpisem

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}\lambda_1(x) \qquad \text{pro } p,q > 0.$$

Snadno se ověří, že na uvedených oborech jsou obě funkce dobře definovány a jsou zde kladné. Jejich vzájemný vztah je dán vzorcem platným pro všechna $p,q>0$

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Tento vzorec si dokážeme v oddíle o vícerozměrné substituci.

Základní vlastnosti Γ-funkce nám dává následující věta opírající se o výsledky z naší teorie pro integrály závisející na parametru.

Tvrzení 15.10.10 (Základní vlastnosti Γ-funkce)**.** (i) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ *kdykoliv* $s>0$
(ii) $\Gamma(1) = 1$ *a* $\Gamma(n) = (n-1)!$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$
(iii) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ *a* $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{4^n n!}$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$
(iv) $\Gamma \in C^\infty((0,\infty))$
(v) Γ-*funkce je ryze konvexní na* $(0,\infty)$
(vi) $\lim_{s\to 0_+}\Gamma(s) = \lim_{s\to\infty}\Gamma(s) = \infty$
(vii) $\lim_{s\to 0_+} s\Gamma(s) = 1$.

Důkaz. Pomocí integrace per partes (na okamžik přecházíme k Newtonovu integrálu) dostáváme

$$\Gamma(s+1) = (\mathcal{N})\int_0^\infty x^s\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = [-x^s\mathrm{e}^{-x}]_0^\infty + (\mathcal{N})\int_0^\infty sx^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = s\Gamma(s).$$

Dále máme

$$\Gamma(1) = (\mathcal{N})\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-x}]_0^\infty = 1.$$

Z posledních dvou výsledků dostáváme okamžitě rovnost $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Třetí část dokážeme pomocí substituce $x = y^2$ a vzorce $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}\lambda_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = (\mathcal{N})\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = (\mathcal{N})\int_0^\infty y^{-1}\mathrm{e}^{-y^2}2y\,\mathrm{d}y = 2(\mathcal{N})\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{\pi}.$$

Následně máme

$$\begin{aligned}\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) &= (n-\tfrac{1}{2})\Gamma(n-\tfrac{1}{2}) = \dots = (n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})\dots\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

V dalším budeme počítat derivace Γ-funkce. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ máme

$$\frac{\partial^k x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}}{\partial s^k} = \log^k(x) x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}.$$

Konvergence integrálu z derivace řádu $(k-1)$ (tedy podmínka (iv) ve větě o derivaci integrálu podle parametru) se ověří snadno a integrovatelnou majorantu pro $s \in (\delta, \frac{1}{\delta})$ zkonstruujeme jako

$$g(x) := \begin{cases} |\log^k(x)| x^{\delta-1}\mathrm{e}^{-x} & \text{pro } x \in [0,1] \\ \log^k(x) x^{\frac{1}{\delta}-1}\mathrm{e}^{-x} & \text{pro } x \in (1,\infty). \end{cases}$$

Speciálně pro $k=2$ máme

$$\Gamma''(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\log^2(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\lambda_1(x) > 0,$$

což dává konvexitu. Vlastnost $\lim_{s\to\infty}\Gamma(s) = \infty$ plyne z konvexity a $\Gamma(n) = (n-1)!$. Dále máme

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= (\mathcal{N})\int_0^\infty x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \geq (\mathcal{N})\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \geq \mathrm{e}^{-1}(\mathcal{N})\int_0^1 x^{s-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{-1}\frac{1}{s} \overset{s\to 0_+}{\to} \infty.\end{aligned}$$

Konečně, pro $s > 0$ díky bodu (i) máme $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$, proto použitím spojitosti Γ-funkce máme

$$\lim_{s\to 0_+} s\Gamma(s) = \lim_{s\to 0_+}\Gamma(s+1) = \Gamma(1) = 1.$$

□

15.11 Fubiniho věta

V dalším se budeme zabývat otázkou přepisu vícerozměrných integrálů do integrálů jednorozměrných a prohazování pořadí integrace. Ke druhé otázce jsme se vlastně již dostali ve Větě o derivaci integrálu podle parametru (Věta 15.10.3), neboť při splnění všech předpokladů výsledný vzorec dává

$$\begin{aligned}\int_X \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,\mathrm{d}\lambda_1(\alpha)\,\mathrm{d}\mu(x) &= \int_X \big(f(x,\alpha_2) - f(x,\alpha_1)\big)\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_1) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi'(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_X \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(\alpha).\end{aligned}$$

Zde se budeme zabývat prohozením i vícedimenzionálních integrálů. Omezíme se pouze na práci s Lebesgueovou mírou, třebaže v literatuře se běžně vyskytuje výsledek pracující s obecnými mírami, který však vyžaduje hlubší teorii okolo měr na kartézských součinech měřitelných prostorů.

Definice 15.11.1 (Řezy množinami)**.** Nechť $p, q \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$. Pro každé $x \in \mathbb{R}^p$ definujeme množinu

$$M^x := \{y \in \mathbb{R}^q : (x, y) \in M\}$$

a nazýváme ji *(svislý) řez množinou M v bodě x*. Analogicky pro každé $y \in \mathbb{R}^q$ definujeme *(vodorovný) řez množinou M v bodě y* jako

$$M_y := \{x \in \mathbb{R}^p : (x, y) \in M\}.$$

Věta 15.11.2 (Fubiniho věta)**.** *Nechť $p, q \in \mathbb{N}$, $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$ je lebesgueovsky měřitelná množina a $f \in \mathcal{L}^*(M)$. Pak pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^p$ existuje*

$$\int_{M^x} f(x, y) \, \mathrm{d}\lambda_q(y),$$

pro skoro všechna $y \in \mathbb{R}^q$ existuje

$$\int_{M_y} f(x, y) \, \mathrm{d}\lambda_p(x)$$

a platí

$$\int_M f \, \mathrm{d}\lambda_{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \int_{M^x} f(x, y) \, \mathrm{d}\lambda_q(y) \, \mathrm{d}\lambda_p(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \int_{M_y} f(x, y) \, \mathrm{d}\lambda_p(x) \, \mathrm{d}\lambda_q(y).$$

Než přistoupíme k důkazu Fubiniho věty, který je poměrně zdlouhavý, ukažme si několik příkladů její aplikace.

Příklad 15.11.3. Spočtěme $I := \int_M xy \, \mathrm{d}\lambda_2$ pro $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$. Podle Fubiniho věty (Věta 15.11.2) máme

$$I = \int_0^1 \int_0^x xy \, \mathrm{d}\lambda_1(y) \, \mathrm{d}\lambda_1(x) = \int_0^1 \frac{1}{2} x^3 \, \mathrm{d}\lambda_1(x) = \frac{1}{8}.$$

Podmínka $f \in \mathcal{L}^*(M)$ je pro platnost Fubiniovy věty zásadní, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 15.11.4. Položme $g(x, y) := \arctan \frac{y}{x}$. Dostáváme funkci, která je nekonečněkrát diferencovatelná na $(0, 1)^2$ a platí

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} =: f(x, y).$$

Funkce f je kladná na množině $M_1 := (0,1)^2 \cap \{y > x\}$ a záporná na množině $M_2 := (0,1)^2 \cap \{y < x\}$. Na těchto množinách můžeme jednotlivě použít Fubiniovu větu a dostáváme

$$\begin{aligned}\int_{M_1} f \,\mathrm{d}\lambda_2 &= \int_0^1 \int_x^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) \\ &= \int_0^1 \Big[-\frac{y}{x^2+y^2}\Big]_{y=x}^1 \,\mathrm{d}\lambda_1(x) = \int_0^1 \Big(\frac{1}{2x} - \frac{1}{1+x^2}\Big)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = \infty\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\int_{M_2} f \,\mathrm{d}\lambda_2 &= \int_0^1 \int_0^x \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) \\ &= \int_0^1 \Big[-\frac{y}{x^2+y^2}\Big]_{y=0}^x \,\mathrm{d}\lambda_1(x) = \int_0^1 -\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = -\infty.\end{aligned}$$

Následně $f \notin \mathcal{L}^*((0,1)^2)$, a proto nepřekvapí, že postupná integrace dává při různém pořadí jednorozměrných integrálů různé výsledky

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) &= \int_0^1 \Big[-\frac{y}{x^2+y^2}\Big]_{y=0}^1 \,\mathrm{d}\lambda_1(x) \\ &= \int_0^1 -\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = \Big[-\arctan x\Big]_0^1 = -\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y) &= \int_0^1 \Big[\frac{x}{x^2+y^2}\Big]_{x=0}^1 \,\mathrm{d}\lambda_1(y) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(y) = \Big[\arctan y\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Fubiniho věta nám nabízí dvě možnosti, jak počítat integrály přes dvojrozměrné množiny. Někdy bývá jedna z možností podstatně výhodnější.

Příklad 15.11.5. Uvažme množinu $M := (0,1) \times (a,b)$, kde $0 < a < b$, a spojitou funkci $f(x,y) = x^y = \mathrm{e}^{y \log x}$. Pak

$$\begin{aligned}\int_M f\,\mathrm{d}\lambda_2 &= \int_a^b \int_0^1 x^y \,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y) = \int_a^b \Big[\frac{x^{y+1}}{y+1}\Big]_0^1 \,\mathrm{d}\lambda_1(y) = \int_a^b \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}\lambda_1(y) \\ &= \log\frac{b+1}{a+1}.\end{aligned}$$

Pokud bychom změnili pořadí integrace, dostali bychom

$$\int_M f\,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_0^1 \int_a^b x^y \,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = \int_0^1 \Big[\frac{x^y}{\log x}\Big]_a^b \,\mathrm{d}\lambda_1(x) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{d}\lambda_1(x),$$

čímž jsme dostali integrál, který neumíme spočítat metodami prvního semestru (nicméně právě jsme si ukázali, že jej umíme spočítat pomocí Fubiniho věty).

Prohazování pořadí integrace je někdy výhodné u vícenásobných integrálů, které s Fubiniho větou přímo nesouvisí (s vícenásobnými integrály jsme se setkali třeba při řešení diferenciální rovnice typu $y^{(n)} = f(x)$).

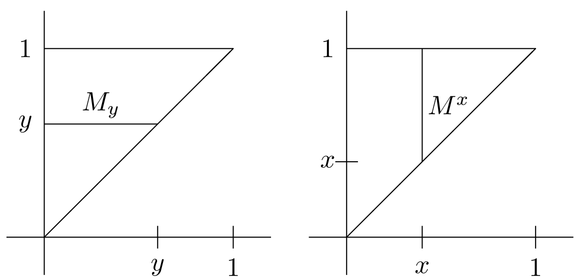
Příklad 15.11.6. Nechť $f \in C([0,1])$. Zjednodušme $\int_0^1 \int_0^y f(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)$. Označme $g(x,y) := f(x)$ a

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \in [0,1], x \in [0,y]\}.$$

Pak máme

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^y f(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y) &= \int_M g\,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_0^1 \int_x^1 f(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\\ &= \int_0^1 (1-x)f(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x),\end{aligned}$$

čímž jsme integrál zjednodušili. Přepis do druhého dvojného integrálu nám ilustruje obrázek. Tento krok nebývá vždy jednoduchý a vyžaduje jistou zručnost.



Obrázek 15.3: Řezy množinou $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \in [0,1], x \in [0,y]\}$.

Fubiniho větu je možné použít i opakovaně.

Příklad 15.11.7. Spočítejme objem množiny

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \in [-1,1], y \in [0, \min\{1, 1+x\}], z \in [0,y]\}.$$

Pak

$$\begin{aligned}\lambda_3(M) &= \int_{-1}^0 \int_0^{1+x} \int_0^y 1\,\mathrm{d}\lambda_1(z)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\\ &\qquad + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^y 1\,\mathrm{d}\lambda_1(z)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\\ &= \int_{-1}^0 \int_0^{1+x} y\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) + \int_0^1 \int_0^1 y\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\\ &= \int_{-1}^0 \frac{(1+x)^2}{2}\,\mathrm{d}\lambda_1(x) + \int_0^1 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = \Big[\frac{(1+x)^3}{6}\Big]_{-1}^0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Příklad 15.11.8. Spočítejme objem jednotkové koule $B_1(0)$ v $\mathbb{R}^N$. Použijeme výše získaný výsledek $I := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}\lambda_1 = \sqrt{\pi}$, který vhodnou aplikací Fubiniho věty vyjádříme pomocí $\lambda_N(B_1(0))$ a $\Gamma(\frac{N}{2}+1)$. V dalším $|x|$ značí eukleidovskou normu prvku $x \in \mathbb{R}^N$. Díky Fubiniho větě máme (podrobnosti vysvětlíme pod výpočtem)

$$\begin{aligned}
I^N &= \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(t)\Big)^N = \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-|x|^2}\,\mathrm{d}\lambda_N(x)\\
&= \lambda_{N+1}\Big(\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{N+1} \colon x \in \mathbb{R}^N, 0 < y < \mathrm{e}^{-|x|^2}\Big\}\Big)\\
&= \lambda_{N+1}\Big(\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{N+1} \colon y \in (0,1), 0 < |x| < \sqrt{\log\frac{1}{y}}\Big\}\Big)\\
&= \int_0^1 \lambda_N\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^N \colon 0 < |x| < \sqrt{\log\frac{1}{y}}\Big\}\Big)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\\
&= \int_0^1 \lambda_N(B_1(0))\Big(\log\frac{1}{y}\Big)^{\frac{N}{2}}\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\\
&= \lambda_N(B_1(0))(\mathcal{N})\int_0^\infty s^{\frac{N}{2}}\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = \lambda_N(B_1(0))\Gamma\Big(\frac{N}{2}+1\Big).
\end{aligned}$$

Při přechodu ze druhého na třetí řádek jsme využili toho, že

$$0 < y < \mathrm{e}^{-|x|^2} \quad\Longleftrightarrow\quad \log y < -|x|^2 \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{\log\frac{1}{y}} > |x|.$$

Při přechodu ze čtvrtého na pátý řádek jsme použili Větu o Lebesgueově míře roztažené množiny (Věta 15.3.14) a při přechodu na poslední řádek jsme použili substituci $y = \mathrm{e}^{-s}$. Celkově jsme dostali

$$\pi^{\frac{N}{2}} = I^N = \lambda_N(B_1(0))\Gamma\Big(\frac{N}{2}+1\Big).$$

Odtud díky vlastnostem Γ-funkce dostáváme

$$\lambda_N(B_1(0)) = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)} = \begin{cases} \frac{2^{\frac{N+1}{2}}\pi^{\frac{N-1}{2}}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots N} & \text{pro } N \text{ liché}\\ \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{(\frac{N}{2})!} & \text{pro } N \text{ sudé.}\end{cases}$$

Cvičení 15.11.9. Nechť $A \subset (0,1)$ není lebesgueovsky měřitelná množina. Pomocí Fubiniho věty ukažte, že $A \times (0,1)^N$ není lebesgueovsky měřitelná množina v $\mathbb{R}^{N+1}$.

15.11.1 Dodatek: důkaz Fubiniho věty

Důkaz Fubiniho věty (Věta 15.11.2) vyžaduje důkladnou přípravu. Potrápí nás zejména otázka, jaké má vlastnosti řez M^x příslušející lebesgueovsky měřitelné množině $M \in \mathbb{R}^{p+q}$ a bodu $x \in \mathbb{R}^p$. Tuto problematiku si trochu přibližme. Pokud je množina M otevřená, snadno se nahlédne, že M^x je otevřená v $\mathbb{R}^q$ pro každé

$x \in \mathbb{R}^p$. Analogický výsledek platí pro uzavřenou množinu. Níže si ukážeme, že borelovská množina má borelovské řezy. Nás však v souvislosti s Fubiniho větou zajímá širší třída lebesgueovsky měřitelných množin, pro kterou podobná analogie neplatí. Skutečně, pokud uvážíme $M = \{0\} \times A \in \mathbb{R}^2$, kde $A \subset \mathbb{R}$ není lebesgueovsky měřitelná, pak řez odpovídající $x = 0$ není lebesgueovsky měřitelná množina, třebaže M lebesgueovsky měřitelná je (je podmnožinou y-ové osy, což je množina s nulovou dvojrozměrnou Lebesgueovou mírou).

Pro účely důkazu si zaveďme další značení. Funkci $y \mapsto f(x, y)$ se zadaným $x \in \mathbb{R}^p$ budeme značit f^x. Analogicky používáme f_y.

Dále bude $\mathcal{B}^N$ značit borelovské množiny na $\mathbb{R}^N$ a $\mathcal{B}_0^N$ budou množiny lebesgueovsky měřitelné (v roli N budou vystupovat p, q a $p + q$).

Lemma 15.11.10 (O řezech borelovských množin)**.** *Nechť $p, q \in \mathbb{N}$, $E \in \mathcal{B}^{p+q}$, $x \in \mathbb{R}^p$ a $y \in \mathbb{R}^q$. Pak $E^x \in \mathcal{B}^q$ a $E_y \in \mathcal{B}^p$.*

Důkaz. Při důkazu první vlastnosti položme

$$\mathcal{A} := \{E \in \mathcal{B}^{p+q} \colon E^x \in \mathcal{B}^q\}.$$

Ukážeme, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra obsahující omezené otevřené intervaly. Nejprve nechť E je interval uvedených vlastností. Pak $E = A \times B$, kde $A \subset \mathbb{R}^p$ a $B \subset \mathbb{R}^q$ jsou omezené otevřené intervaly. Následně máme buď $E^x = B \in \mathcal{B}^q$ a nebo $E^x = \emptyset \in \mathcal{B}^q$.

Dále pokud pro nějakou množinu $E \subset \mathbb{R}^{p+q}$ platí $E \in \mathcal{A}$, znamená to, že $E^x \in \mathcal{B}^q$. Proto

$$(\mathbb{R}^{p+q} \setminus E)^x = \mathbb{R}^q \setminus E^x \in \mathcal{B}^q$$

a odtud $\mathbb{R}^{p+q} \setminus E \in \mathcal{A}$.

Konečně, pokud $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ je spočetný systém množin, pak $(E_n)^x \in \mathcal{B}^q$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Proto

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big)^x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)^x \in \mathcal{B}^q,$$

což dává $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$. Celkově máme $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}^{p+q}$, což jsme chtěli ukázat.

Analogicky dosteme $E_y \in \mathcal{B}^p$. □

Připomeňme, že pojem σ-algebry byl definován tak, že celý prostor leží v uvedené σ-algebře a dále je σ-algebra uzavřená na doplněk a spočetná sjednocení. Někdy je v praxi obtížné ověřovat uzavřenost na obecná spočetná sjednocení, ale dá se pracovat se spočetnými sjednoceními po dvou disjunktních množin. Pak je výhodné použít jemnější přístup využívající následující pojem.

Definice 15.11.11 (Dynkinův systém, σ-obal, δ-obal)**.** Nechť X je množina a $\mathcal{D}$ je systém jejích podmnožin. Řekneme, že $\mathcal{D}$ je *Dynkinův systém*, jestliže
(i) $X \in \mathcal{D}$
(ii) jestliže $A \in \mathcal{D}$, pak $X \setminus A \in \mathcal{D}$
(iii) jestliže $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ jsou po dvou disjunktní množiny, pak $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{D}$.

Nechť dále $\mathcal{S}$ je systém podmnožin X. Definujeme $\sigma(\mathcal{S})$ jako nejmenší σ-algebru obsahující $\mathcal{S}$ a $\delta(\mathcal{S})$ jako nejmenší Dynkinův systém obsahující $\mathcal{S}$.

Poznámka 15.11.12. (i) Každá σ-algebra je Dynkinovým systémem.
(ii) Dynkinův systém vždy obsahuje prázdnou množinu.
(iii) Pokud $A, B \in \mathcal{D}$ a $B \subset A$, pak $A \setminus B = X \setminus ((X \setminus A) \cup B) \in \mathcal{D}$.
(iv) Definice σ-obalu a δ-obalu je korektní. Skutečně, tyto systémy vždy existují, neboť stačí vzít průnik všech σ-algeber, respektive Dynkinových systémů, obsahujících $\mathcal{S}$.
(v) Vždy platí, že $\delta(\mathcal{S}) \subset \sigma(\mathcal{S})$ (zdůvodní se jako (iv)).
(vi) Je-li Dynkinův systém uzavřený vzhledem k průniku dvojice množin, pak už se jedná o σ-algebru, neboť pak pro $A, B \in \mathcal{D}$ máme $A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{D}$, a proto lze psát

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) \cup \cdots \in \mathcal{D}.$$

Příklad 15.11.13. Nechť $X = \{1, 2, 3, 4\}$ a $\mathcal{S}$ je systém obsahující množiny $\{1, 2\}$ a $\{1, 3\}$. Pak

$$\delta(\mathcal{S}) = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

Náš systém $\delta(\mathcal{S})$ není σ-algebra, protože neobsahuje například množinu $\{1, 2, 3\} = \{1, 2\} \cup \{1, 3\}$.

Hlavní přínos práce s Dynkinovými systémy nám dává následující lemma, podle něhož není nutné provádět ověření uzavřenosti vzhledem k průniku dvou množin napříč celým Dynkinovým systémem.

Lemma 15.11.14 (O rovnosti obalů)**.** *Nechť X je množina a $\mathcal{S}$ je systém jejích podmnožin uzavřený vzhledem k průniku dvou množin. Pak $\delta(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{S})$.*

Důkaz. Vzhledem k posledním dvěma částem předchozí poznámky stačí ukázat, že $\delta(\mathcal{S})$ je uzavřený vzhledem k průniku dvojice množin. Zvolme $E \in \delta(\mathcal{S})$ a zkonstruujme pomocný systém

$$\mathcal{D}_E := \{A \subset X : A \cap E \in \delta(\mathcal{S})\}.$$

Ukážeme, že $\mathcal{D}_E$ je Dynkinův systém. Zřejmě $X \in \mathcal{D}_E$, neboť $X \cap E = E$. Dále jestliže $A \in \mathcal{D}_E$, pak $(X \setminus A) \cap E = E \setminus (E \cap A) \in \mathcal{D}_E$ (používáme třetí část poznámky). Konečně, pokud $\{A_j\} \subset \mathcal{D}_E$ jsou po dvou disjunktní, pak množiny $A_j \cap E$ jednak padnou do $\delta(\mathcal{S})$ podle definice $\mathcal{D}_E$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a jednak jsou po dvou disjunktní, takže třetí vlastnost z definice Dynkinova systému dává $\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j \cap E) \in \delta(\mathcal{S})$. Následně $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{D}_E$ a tím jsme završili důkaz, že $\mathcal{D}_E$ je Dynkinův systém.

Nyní ve speciálním případě, kdy $E \in \mathcal{S}$, podle předpokladu lemmatu máme $\mathcal{S} \in \mathcal{D}_E$ a odtud $\mathcal{D}_E \supset \delta(\mathcal{S})$. To znamená, že $E_1 \cap E_2 \in \delta(\mathcal{S})$ kdykoliv $E_1 \in \mathcal{S}$ a $E_2 \in \delta(\mathcal{S})$. Odtud dostáváme, že dokonce i v obecném případě, kdy $E \in \delta(\mathcal{S})$, máme $\mathcal{S} \in \mathcal{D}_E$. Proto i tentokrát platí $\mathcal{D}_E \supset \delta(\mathcal{S})$, což jsme chtěli ukázat. $\square$

Lemma 15.11.15 (O měřitelnosti přiřazení míry řezu)**.** *Nechť $p, q \in \mathbb{N}$, $E \in \mathcal{B}^{p+q}$. Pak $x \mapsto \lambda_q(E^x)$ je borelovská funkce na $\mathbb{R}^p$ a $y \mapsto \lambda_p(E_y)$ je borelovská funkce na $\mathbb{R}^q$.*

Důkaz. Zkoumejme borelovskost funkce $x \mapsto \lambda_q(E^x)$. Pro přehlednost tuto funkci označme s_E. Tato funkce je dobře definovaná pro každou množinu $E \in \mathcal{B}^{p+q}$ podle Lemmatu o řezech borelovských množin (Lemma 15.11.10). Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a definujme pomocný systém

$$\mathcal{A}_n := \{E \in \mathcal{B}^{p+q} \colon s_{E\cap(-n,n)^{p+q}} \text{ je borelovská funkce}\}.$$

Využitím toho, že $\mathcal{B}^{p+q}$ je nejmenší σ-algebra obsahující omezené otevřené intervaly, ukažme, že $\mathcal{A}_n \supset \mathcal{B}^{p+q}$. Předně nechť E je interval uvedených vlastností. Pak $E \cap (-n,n)^{p+q} = A \times B$, kde $A \subset \mathbb{R}^p$ a $B \subset \mathbb{R}^q$ jsou omezené otevřené intervaly. Následně máme

$$s_{E\cap(-n,n)^{p+q}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R}^p \setminus A \\ \lambda_q(B) & \text{pro } x \in A. \end{cases}$$

Proto

$$\{x \in \mathbb{R}^p \colon s_{E\cap(-n,n)^{p+q}} > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{B}^p & \text{pro } \alpha \geq \lambda_q(B) \\ A \in \mathcal{B}^p & \text{pro } \alpha \in [0, \lambda_q(B)) \\ \mathbb{R}^p \in \mathcal{B}^p & \text{pro } \alpha < 0, \end{cases}$$

z čehož plyne borelovskost funkce s_E. V dalším přenecháme podrobné zkoumání úrovňových množin čtenáři a budeme postupovat o malinko rychleji.

Pokud $E = \mathbb{R}^{p+q}$, pak $s_{E\cap(-n,n)^{p+q}} = (2n)^q \chi_{(-n,n)^p}$ je opět borelovská funkce.

Nechť $E \in \mathcal{A}_n$, neboli $s_{E\cap(-n,n)^{p+q}}$ je borelovská funkce. Zřejmě je pak borelovská také funkce $s_{(-n,n)^{p+q}\setminus E}$, a proto $\mathbb{R}^N \setminus E \in \mathcal{A}_n$.

Nyní přistupme k situaci, kdy $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, kde $E_j \in \mathcal{A}_n$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. V případě, že E_j jsou po dvou disjunktní, máme

$$\begin{aligned} s_{E\cap(-n,n)^{p+q}}(x) &= \lambda_q((E \cap (-n,n)^{p+q})^x) = \lambda_q\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \cap (-n,n)^{p+q}\Big)^x \\ &= \lambda_q\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j \cap (-n,n)^{p+q})^x\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_q(E_j \cap (-n,n)^{p+q})^x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} s_{E_j\cap(-n,n)^{p+q}}(x). \end{aligned}$$

Následně borelovskost funkcí na pravé straně implikuje borelovskost funkce na straně levé.

Celkově jsme ukázali, že $\mathcal{A}_n$ je Dynkinův systém obsahující omezené otevřené intervaly. Protože průnik dvou intervalů takovéhoto typu je opět intervalem téhož typu, podle předchozího lemmatu je δ-obal roven σ-obalu, což jsou borelovské množiny.

Teď už si stačí jen uvědomit, že pro každou borelovskou množinu $E \subset \mathbb{R}^{p+q}$ platí $s_E = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_{E\cap(-n,n)^{p+q}}$ a vzpomenout si, že supremum borelovských funkcí je borelovská funkce. Tím je důkaz dokončen. $\square$

Lemma 15.11.16 (O integraci napříč řezy)**.** *Nechť* $p, q \in \mathbb{N}$, $E \in \mathcal{B}^{p+q}$. *Pak*

$$\lambda_{p+q}(E) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(E^x) \,\mathrm{d}\lambda_p(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \lambda_p(E_y) \,\mathrm{d}\lambda_q(y).$$

Důkaz. Předně poznamenejme, že podle předchozího lemmatu jsou integrandy lebesgueovsky měřitelné. Proto mají integrály dobrý smysl. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme pomocný systém

$$\mathcal{A}_n := \{E \subset \mathbb{R}^{p+q} \colon \text{pro } E \cap (-n,n)^{p+q} \text{ platí první identita ze znění lemmatu}\}.$$

Ukažme, že $\mathcal{A}_n$ obsahuje všechny borelovské množiny. Protože dokazovaná rovnost zřejmě platí pro omezené otevřené intervaly a ty jsou uzavřené vůči průniku, stačí dokázat, že $\mathcal{A}_n$ je Dynkinův systém. Snadno nahlédneme, že $\mathbb{R}^{p+q} \in \mathcal{A}$. Pokud $A \in \mathcal{A}_n$, pak máme

$$\begin{aligned}
\lambda_{p+q}((\mathbb{R}^{p+q} \setminus A) \cap (-n,n)^{p+q}) &= \lambda_{p+q}((-n,n)^{p+q}) - \lambda_{p+q}((-n,n)^{p+q} \cap A) \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(((-n,n)^{p+q})^x) \,\mathrm{d}\lambda_p(x) - \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(((-n,n)^{p+q} \cap A)^x) \,\mathrm{d}\lambda_p(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(((-n,n)^{p+q} \setminus A)^x) \,\mathrm{d}\lambda_p(x).
\end{aligned}$$

Podobně vyřešíme případ spočetného systému po dvou disjunktních množin. Celkově dostáváme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každou množinu $E \in \mathcal{B}^{p+q}$ platí

$$\lambda_{p+q}(E \cap (-n,n)^{p+q}) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(E^x \cap (-n,n)^q) \chi_{(-n,n)^p}(x) \,\mathrm{d}\lambda_p(x).$$

Nyní již stačí použít Lebesgueovu větu o monotonní konvergenci (Věta 15.7.6) a máme dokázánu první identitu. Druhá identita se dokáže analogicky. □

Další dvě lemmata nám umožní používat dosažené výsledky o borelovských množinách při práci s lebesgueovsky měřitelnými funkcemi.

Lemma 15.11.17 (O aproximaci lebesgueovsky měřitelné funkce)**.** *Nechť g je lebesgueovsky měřitelná funkce na $\mathbb{R}^N$. Pak existuje borelovská funkce g_0 na $\mathbb{R}^N$ taková, že $g = g_0$ skoro všude na $\mathbb{R}^N$.*

Důkaz. Tvrzení zřejmě platí pro charakteristické funkce lebesgueovsky měřitelných množin díky tomu, že ke každé lebesgueovsky měřitelné množině existuje borelovská množina lišící se jen o množinu nulové míry. Odtud dostáváme platnost pro jednoduché lebesgueovsky měřitelné funkce. Obecný výsledek nyní získáme tak, že k lebesgueovsky měřitelné funkci se dá dokonvergovat jednoduchými lebesgueovsky měřitelnými funkcemi f_n, ty se dají aproximovat borelovskými jednoduchými funkcemi g_n. Díky naší konstrukci existuje lebesgueovsky měřitelná množina E taková, že $\lambda_N(E) = 0$,

$$f_n = g_n \quad \text{na } \mathbb{R}^N \setminus E \qquad \text{a} \qquad g_n \to g \quad \text{na } \mathbb{R}^N \setminus E.$$

Pokud nyní vezmeme borelovskou množinu $E_0 \supset E$ splňující $\lambda_N(E_0) = 0$, jsou funkce $g_n \chi_{E_0}$ stále jednoduché borelovské, ale navíc již konvergují bodově všude, a proto mají borelovskou limitu. □

Lemma 15.11.18 (O skoro všude nulové funkci)**.** *Nechť f je lebesgueovsky měřitelná funkce na $\mathbb{R}^{p+q}$ a $f = 0$ skoro všude. Pak pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^p$ je funkce f^x nulová skoro všude na $\mathbb{R}^q$ a pro skoro všechna $y \in \mathbb{R}^q$ je funkce f_y nulová skoro všude na $\mathbb{R}^p$.*

Důkaz. Označme

$$N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{p+q} \colon f(x, y) \neq 0\}.$$

Pak N je lebesgueovsky měřitelná množina. Vezměme nyní $H \supset N$ takovou, že $\lambda_{p+q}(H \setminus N) = 0$ a H je typu G_δ. Pak podle Lemmatu o integraci napříč řezy (Lemma 15.11.16) platí

$$0 = \lambda_{p+q}(H) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(H^x)\,\mathrm{d}\lambda_p(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \lambda_p(H_y)\,\mathrm{d}\lambda_q(y).$$

Protože integrandy jsou nezáporné, musí být nulové skoro všude a z toho již plynou dokazované výsledky. □

Důkaz Fubiniho věty (Věty 15.11.2). Věta podle předchozích lemmat zřejmě platí pro charakteristické funkce borelovských množin. Snadno odtud dostáváme platnost pro jednoduché borelovské funkce. V dalším budeme dokazovat jen tvrzení z Fubiniho věty obsahující množinu M^x (tvrzení týkající se M_y se dokáží analogicky).

Nechť dále f je nezáporná borelovská funkce. Podle Věty o aproximaci měřitelných funkcí jednoduchými funkcemi (Věta 15.5.4) existuje monotonní posloupnost nezáporných jednoduchých funkcí $\{s_n\}$ taková, že $s_n \to f$. Pokud se navíc přidržíme konstrukce z důkazu uvedené věty, funkce s_n jsou dokonce borelovské. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ podle úvodu našeho důkazu pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^p$ existuje

$$\int_{M^x} s_n(x, y)\,\mathrm{d}\lambda_q(y)$$

(neboli funkce $y \mapsto s_n(x, y)$ je lebesguovsky měřitelná, což je pro nezápornou funkci ekvivalentní existenci integrálu) a

$$\int_M s_n\,\mathrm{d}\lambda_{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \int_{M^x} s_n(x, y)\,\mathrm{d}\lambda_q(y)\,\mathrm{d}\lambda_p(x).$$

Protože spočetné sjednocení množin nulové Lebesgueovy míry má nulovou Lebesgueovu míru, existuje množina $N \in \mathbb{R}^p$ taková, že $\lambda_p(N) = 0$ a pro všechna $x \in \mathbb{R}^p \setminus N$ platí

$$\int_{M^x} s_n(x, y)\,\mathrm{d}\lambda_q(y) \qquad \text{existuje pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Následně i limitní funkce $y \mapsto f(x, y)$ je lebesguovsky měřitelná pro všechna $x \in \mathbb{R}^p \setminus N$ a existuje

$$\int_{M^x} f(x, y)\,\mathrm{d}\lambda_q(y).$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}^p \setminus N$ dále díky Lebesgueově větě o monotonní konvergenci (Věta 15.7.6) máme

$$\int_{M^x} s_n(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_q(y) \to \int_{M^x} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_q(y).$$

Dále si povšimněme, že funkce $x \mapsto \int_{M^x} s_n(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_q(y)$ tvoří monotonní posloupnost na $x \in \mathbb{R}^p \setminus N$. Díky tomu Lebesgueova věta o monotonní konvergenci (Věta 15.7.6) spolu s posledním mezivýsledkem dávají

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \int_{M^x} s_n(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_q(y)\,\mathrm{d}\lambda_p(x) &= \int_{\mathbb{R}^p} \lim_{n\to\infty} \int_{M^x} s_n(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_q(y)\,\mathrm{d}\lambda_p(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \int_{M^x} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_q(y)\,\mathrm{d}\lambda_p(x).\end{aligned}$$

Na druhou stranu přímou aplikací Lebesgueovy věty o monotonní konvergenci (Věta 15.7.6) získáváme

$$\int_M s_n\,\mathrm{d}\lambda_{p+q} \to \int_M f\,\mathrm{d}\lambda_{p+q}.$$

Celkově jsme dostali

$$\begin{aligned}\int_M f\,\mathrm{d}\lambda_{p+q} \leftarrow \int_M s_n\,\mathrm{d}\lambda_{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \int_{M^x} & s_n(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_q(y)\,\mathrm{d}\lambda_p(x) \\ \to \int_{\mathbb{R}^p} \int_{M^x} & f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_q(y)\,\mathrm{d}\lambda_p(x).\end{aligned}$$

Tím jsme završili důkaz v případě nezáporné borelovské funkce.

V případě lebesgueovsky měřitelné funkce f pracujeme tak, že nejprve podle předposledního lemmatu použijeme rozklad na $f = f_0 + (f - f_0)$, kde f_0 je borelovská a $f - f_0 = 0$ skoro všude na $\mathbb{R}^{p+q}$. Na funkci $f - f_0$ aplikujeme Lemma 15.11.18. Dostáváme, že pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^p$ máme

$$\int_{M^x} (f(x,y) - f_0(x,y))\,\mathrm{d}\lambda_q(y) = 0.$$

Díky tomu jednak uvedený integrál existuje a navíc platí

$$\int_M (f - f_0)\,\mathrm{d}\lambda_{p+q} = 0 = \int_{\mathbb{R}^p} 0\,\mathrm{d}\lambda_p(x) = \int_{\mathbb{R}^p} \int_{M^x} (f(x,y) - f_0(x,y))\,\mathrm{d}\lambda_q(y)\,\mathrm{d}\lambda_p(x).$$

Dále funkci f_0 rozložíme na kladnou a zápornou část, na které následně aplikujeme výše získané výsledky. Protože $f \in \mathcal{L}^*(M)$, zřejmě máme $f_0 \in \mathcal{L}^*(M)$ a díky tomu můžeme výsledky (alespoň jedna z následujících rovností obsahuje konečná čísla)

$$\int_M f_0^+\,\mathrm{d}\lambda_{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \int_{M^x} f_0^+(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_q(y)\,\mathrm{d}\lambda_p(x)$$

a

$$\int_M f_0^-\,\mathrm{d}\lambda_{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \int_{M^x} f_0^-(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_q(y)\,\mathrm{d}\lambda_p(x)$$

od sebe odečíst a dostáváme

$$\int_M f_0 \,\mathrm{d}\lambda_{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \int_{M^x} f_0(x,y) \,\mathrm{d}\lambda_q(y) \,\mathrm{d}\lambda_p(x).$$

Navíc je-li kupříkladu konečné číslo $\int_{\mathbb{R}^p} \int_{M^x} f_0^+(x,y) \,\mathrm{d}\lambda_q(y) \,\mathrm{d}\lambda_p(x)$, pak máme pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^q$ konečný integrál $\int_{M^x} f_0^+(x,y) \,\mathrm{d}\lambda_q(y)$ a pro taková x má pak smysl

$$\int_{M^x} f_0^+(x,y) \,\mathrm{d}\lambda_q(y) - \int_{M^x} f_0^-(x,y) \,\mathrm{d}\lambda_q(y) = \int_{M^x} f_0(x,y) \,\mathrm{d}\lambda_q(y).$$

Ze získaných výsledků pro $f - f_0$ a f_0 již snadno získáme vše požadované pro $f = (f - f_0) + f_0$. □

15.12 Věta o substituci

Dalším nástrojem, který si představíme, je (vícerozměrná) Věta o substituci.

Věta 15.12.1 (Věta o substituci)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\boldsymbol{\varphi} \in C^1(G;\mathbb{R}^N)$ je prosté zobrazení. Pak pro libovolnou lebesgueovsky měřitelnou funkci $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definovanou na $\boldsymbol{\varphi}(G)$ platí*

$$\int_{\varphi(G)} f(y) \,\mathrm{d}\lambda_N(y) = \int_G f(\boldsymbol{\varphi}(x)) |\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(x)| \,\mathrm{d}\lambda_N(x),$$

má-li alespoň jeden z integrálů smysl.

Důkaz Věty o substituci je velmi obsáhlý. Na chvíli jej odložíme a budeme se věnovat příkladům.

Příklad 15.12.2. Nechť $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ a $\varphi \in C^1([\alpha,\beta])$ má nenulovou derivaci na $[\alpha,\beta]$. Označme $[a,b] := \varphi([\alpha,\beta])$. Nechť $f \in C([a,b])$. V této situaci můžeme používat substituci pro všechny tři nám známé integrály. V případě Riemannova či Newtonova integrálu a rostoucí funkce φ máme

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}y = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f \,\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x) \,\mathrm{d}x.$$

Pokud je φ klesající, máme

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}y = \int_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\alpha)} f \,\mathrm{d}y = -\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f \,\mathrm{d}y = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x) \,\mathrm{d}x.$$

Pokud použijeme naši novou Větu o substituci (Věta 15.12.1), pro rostoucí φ máme

$$\begin{aligned}\int_a^b f(y) \,\mathrm{d}\lambda_1(y) = \int_{(a,b)} f(y) \,\mathrm{d}\lambda_1(y) &= \int_{(\alpha,\beta)} f(\varphi(x))|\varphi'(x)| \,\mathrm{d}\lambda_1(x) \\ &= \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x) \,\mathrm{d}\lambda_1(x)\end{aligned}$$

a pro φ klesající dostáváme

$$\begin{aligned}\int_a^b f \,\mathrm{d}\lambda_1 &= \int_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\alpha)} f(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(y) = \int_{(\varphi(\beta),\varphi(\alpha))} f(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\\ &= \int_{(\alpha,\beta)} f(\varphi(x))|\varphi'(x)|\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x).\end{aligned}$$

Povšimněte si, že v případě klesající funkce φ má naše nová substituční metoda odlišné znaménko u činitele $\varphi'(x)$, to se ale kompenzuje tím, že neprohazujeme meze integrálu.

Nyní jsme již také připraveni na jednodušší získání výsledku

$$I := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}\lambda_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Příklad 15.12.3. Na $\mathbb{R}^2$ použijeme polární souřadnice definované předpisem $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$. Toto přiřazení definuje zobrazení $\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jehož jacobián je roven

$$\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}} = \det\begin{pmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix} = r.$$

Definiční obor φ potřebujeme zvolit tak, aby se jednalo o prosté zobrazení. Volíme $G := (0,\infty)\times(-\pi,\pi)$ (případ $r=0$ nám vyloučil požadavek na prostotu). Pak platí

$$\boldsymbol{\varphi}(G) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\in\mathbb{R}^2 \colon x \le 0\}.$$

Protože $\lambda_2(\{(x,0)\in\mathbb{R}^2\colon x\le 0\}) = 0$, při integraci se neprojeví, zda integrujeme přes $\mathbb{R}^2$ či $\varphi(G)$. Přejděme nyní k výpočtu integrálu $I = \int_0^{x^2} \mathrm{d}\lambda_1$, kde nejprve použijeme Fubiniho větu (Věta 15.11.2), pak Větu o substituci (Věta 15.12.1), na jejíž aplikaci jsme se právě připravili, a pak Fubiniho větu ještě jednou. Dostáváme

$$\begin{aligned}4I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(y) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}\lambda_2\\ &= \int_{\varphi(G)} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_G \mathrm{e}^{-r^2} r\,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(\alpha)\,\mathrm{d}\lambda_1(r)\\ &= \int_0^\infty 2\pi r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(r) = \Big[-\pi\mathrm{e}^{-r^2}\Big]_0^\infty = \pi.\end{aligned}$$

Odtud $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Poznámka 15.12.4. Podobně jako jsme při používání polárních souřadnic nemohli substituovat na celé množině $\mathbb{R}^2$, i při práci s válcovými či sférickými souřadnicemi na $\mathbb{R}^3$ se musíme vždy vzdát jisté množiny nulové Lebesgueovy míry.

Čtenáři ještě dlužíme odvození vzorce $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ pro $x,y>0$.

Příklad 15.12.5. Tentokrát definujme zobrazení $\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ předpisem $u = zt$, $v = z(1-t)$. Položme $G := (0,\infty) \times (0,1)$. Pak máme

$$\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}} = \det \begin{pmatrix} t & z \\ 1-t & -z \end{pmatrix} = -z.$$

Navíc $\boldsymbol{\varphi}(G) = (0,\infty) \times (0,\infty)$, neboť platí $z = u + v$ a $t = \frac{u}{u+v}$. Ukažme, že zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ je prosté. Pokud platí

$$\begin{aligned} z_1 t_1 &= z_2 t_2 \\ z_1 - z_1 t_1 = z_1(1-t_1) &= z_2(1-t_2) = z_2 - z_2 t_2, \end{aligned}$$

porovnáním prvního řádku s krajními výrazy na druhém řádku okamžitě dostáváme $z_1 = z_2$. První řádek pak dává $t_1 = t_2$ (pracujeme na G), čímž je ověřili, že zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ je prosté na G. Nyní použijeme právě odůvodněnou aplikaci Věty o substituci (Věta 15.12.1) spolu s Fubiniho větou (Věta 15.11.2)

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty u^{x-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}\lambda_1(u) \int_0^\infty v^{y-1}\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}\lambda_1(v) \\ &= \int_{\varphi(G)} u^{x-1}v^{y-1}\mathrm{e}^{-u-v}\,\mathrm{d}\lambda_2(u,v) \\ &= \int_G (zt)^{x-1}(z(1-t))^{y-1}\mathrm{e}^{-z}|\mathrm{J}_\varphi(z,t)|\,\mathrm{d}\lambda_2(z,t) \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 (zt)^{x-1}(z(1-t))^{y-1}\mathrm{e}^{-z}z\,\mathrm{d}\lambda_1(t)\,\mathrm{d}\lambda_1(z) \\ &= \int_0^\infty z^{x+y-1}\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}\lambda_1(z) \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}\lambda_1(t) = \Gamma(x+y)B(x,y). \end{aligned}$$

15.12.1 Dodatek: důkaz Věty o substituci

Nejprve ukažme, že pokud zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ je α-lipschitzovské, pak Lebesgueova míra obrazu libovolné lebesgueovské množiny nepřesáhne α^N-násobek Lebesgueovy míry této množiny. Toto tvrzení je zřejmé v případě, kdy naší množinou je koule. U obecnějších množin budeme postupovat tak, že je popíšeme jako sjednocení koulí. Při takovém rozkladu je však nutné postupovat opatrně. Vzpomeňme si na „nešikovný“ postup odstraňování koulí z intervalu $(0,1)$, který vede k tomu, že nám zůstane Cantorovo diskontinuum kladné míry.

Věta 15.12.6 (Vitaliho věta o pokrytí)**.** *Nechť $A \subset \mathbb{R}^N$ a $G \supset A$ je otevřená množina. Pak existuje nejvýše spočetný systém $\{\overline{B}_j\}_{j\in J}$, $J \subset \mathbb{N}$, po dvou disjunktních uzavřených koulí obsažených v G takový, že*

$$\lambda_N\Big(A \setminus \bigcup_{j\in J} \overline{B}_j\Big) = 0.$$

Důkaz. Nejprve se zabývejme případem, kdy G je omezená. Můžeme navíc předpokládat, že žádný konečný systém po dvou disjunktních uzavřených koulí obsažených v G nepokrývá A, jinak bychom byli hotovi.

Nový systém vybíráme indukcí. V každém kroku spočteme supremum poloměrů ze všech přípustných koulí (leží v G, protínají A a neprotínají koule dosud vybrané) a vybereme přípustnou kouli, jejíž poloměr je větší než polovina uvedeného suprema.

Tento proces se v žádném kroku nezastaví. Skutečně, jednak množinu A nikdy úplně nepokryjeme díky dodatečnému předpokladu a navíc stále existují přípustné koule do dalšího kroku díky otevřenosti dosud nepokryté části G. Dostaneme tedy nekonečnou posloupnost po dvou disjunktních koulí $\{\overline{B}_j\}_{j=1}^{\infty}$.

Ukažme, že $\lambda_N(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{B}_j) = 0$. Nechť v dalším $r_j > 0$ značí poloměr a x_j značí střed koule $\overline{B}_j$. Nechť dále s_j značí supremum poloměrů koulí přípustných v j-tém kroku konstrukce (připomeňme $0 < \frac{s_j}{2} < r_j \leq s_j$). Nejprve si povšimněme, že

$$\lambda_N(G) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_N(\overline{B}_j) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \lambda_N(\overline{B}_j) \overset{j\to\infty}{\to} 0 \quad \Longrightarrow \quad r_j \overset{j\to\infty}{\to} 0.$$

Zvolme $x \in A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{B}_j$ a zafixujme $p \in \mathbb{N}$. Díky otevřenosti a neprázdnosti množiny $G \setminus \bigcup_{j=1}^{p} \overline{B}_j$ existuje koule $\overline{B}$ taková, že

$$x \in \overline{B} \subset G \setminus \bigcup_{j=1}^{p} \overline{B}_j.$$

Označuje-li r poloměr této koule, pak musí platit $r \leq s_p$ (naše koule byla přípustná v p-tém kroku) a navíc (díky $s_j \to 0$) existuje $q \in \mathbb{N}$ takové, že $r > s_q$. To znamená, že mezi koulemi $\overline{B}_{p+1}, \overline{B}_{p+2}, \ldots, \overline{B}_{q-1}$ existuje alespoň jedna koule protínající $\overline{B}$. Nechť j v dalším značí minimální index takové koule. Protože $\overline{B}$ byla přípustná v j-tém kroku, z předchozí konstrukce a $\overline{B}_j \cap \overline{B} \neq \emptyset$ dostáváme $r \leq s_j \leq 2r_j$ a odtud $\overline{B} \subset \overline{B}_{5r_j}(x_j)$. Následně platí

$$A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{B}_j \subset \bigcup_{j=p}^{\infty} \overline{B}_{5r_j}(x_j)$$

a odtud díky Větě o Lebesgueově míře roztažené množiny (Věta 15.3.14) máme

$$\lambda_N\Big(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{B}_j\Big) \leq \lambda_N\Big(\bigcup_{j=p}^{\infty} \overline{B}_{5r_j}(x_j)\Big) \leq \sum_{j=p}^{\infty} \lambda_N(\overline{B}_{5r_j}(x_j)) = \sum_{j=p}^{\infty} 5^N \lambda_N(\overline{B}_j) \overset{p\to\infty}{\to} 0.$$

V obecném případě, kdy G není omezená, předchozí postup aplikujeme na dvojice $A_1 := A \cap B_1(0)$ a $G_1 := G \cap B_1(0)$, $A_2 := A \cap (B_2(0) \setminus \overline{B}_1(0))$ a $G_2 := G \cap (B_2(0) \setminus \overline{B}_1(0))$, atd. Získané systémy potom sjednotíme (nevadí, že zůstaly nepokryté sféry $\partial B_n(0)$, $n \in \mathbb{N}$, neboť mají nulovou Lebesgueovu míru). $\square$

Poznámka 15.12.7. (i) V důkazu jsme potřebovali pracovat s uzavřenými koulemi kvůli tomu, aby nepokryté části množiny G vstupující do jednotlivých kroků konstrukce byly otevřené. Na druhou stranu, hranice koule má nulovou Lebesgueovu míru. Máme-li tedy spočetný systém uzavřených koulí, odstraněním jejich

hranic ztratíme jen množinu nulové Lebesgueovy míry. Proto lze Vitaliho větu o pokrytí (Věta 15.12.6) formulovat i pro otevřené koule.
(ii) Vitaliho věta o pokrytí bývá v literatuře uváděna v obecnější verzi, která připouští situaci, kdy je zakázáno při pokrývání použít některé koule.

Důsledek 15.12.8 (O pokrytí množiny koulemi)**.** *Nechť $A \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\varepsilon > 0$. Pak existuje spočetný systém otevřených koulí $\{B_j\}$ se středy v množině A takový, že*

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \qquad a \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_N(B_j) \leq \lambda_N(A) + \varepsilon.$$

Důkaz. Budeme aplikovat verzi Vitaliho věty o pokrytí (Věta 15.12.6) z předchozí poznámky. Dostáváme, že existuje systém po dvou disjunktních koulí obsažených v A pokrývající celou množinu A až na množinu nulové Lebesgueovy míry. Tu můžeme pokrýt (podle definice Lebesgueovy míry) spočetně mnoha otevřenými intervaly $\{I_m\}$ takovými, že $\lambda_N(\bigcup_{m=1}^{\infty} I_m) < \varepsilon$. Nyní existuje spočetný systém uzavřených krychlí $\{Q_k\}$ takový, že

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} I_m \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \qquad \text{a} \qquad \lambda_N\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k\Big) < \lambda_N\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} I_m\Big) + \varepsilon < 2\varepsilon$$

(ke každému zadanému kvádru najdeme $l \in \mathbb{N}$ tak velké, že pokud $\mathbb{R}^N$ rozřežeme na krychličky o hraně 2^{-l}, pak sjednocení krychliček protínajících tento kvádr má Lebesgueovu míru nejvýše dvojnásobnou oproti našemu kvádru). Zbývá již jen vzít přiměřeně malé otevřené koule obsahující naše krychle. Lebesgueova míra se tím zvětší jen o multiplikativní konstantu závislou pouze na dimenzi. Koule odpovídající krychličkám ležícím mimo A (ty mohou vzniknout, pokud některý z pomocných kvádrů zasahuje daleko mimo A) ze systému odstraníme. Pokud má některá ze zbylých koulí střed mimo A, využijeme toho, že množinu A protíná, a proto existuje koule s nejvýše dvojnásobným poloměrem taková, že už má střed v množině A a naši kouli obsahuje.

Hledaný systém je sjednocením koulí, které nám dala Vitaliho věta o pokrytí, a koulí, které jsme právě zkonstruovali. $\square$

Důsledek 15.12.9 (O míře obrazu při lipschitzovském zobrazení)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $E \subset G$ a $\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je α-lipschitzovské zobrazení na G. Pak*

$$\lambda_N^*(\varphi(E)) \leq \alpha^N \lambda_N^*(E).$$

Je-li φ pouze lokálně lipschitzovské na G, pak zobrazuje podmnožiny G, které mají nulovou Lebesgueovu míru, na množiny nulové Lebesgueovy míry.

Důkaz. Dokažme první tvrzení. Stačí uvažovat jen případ $\lambda_N^*(E) < \infty$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle Věty o vnější a vnitřní regularitě Lebesgueovy vnější míry (Věta 15.3.18) existuje otevřená množina $H \supset E$ taková, že

$$\lambda_N(H) \leq \lambda_N^*(E) + \varepsilon.$$

Navíc můžeme předpokládat, že $H \subset G$, jinak přejdeme k $H \cap G$. Podle předchozího důsledku existují koule $\{B_j\} = \{B_{r_j}(x_j)\}$ takové, že $\{x_j\} \subset H$,

$$H \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \qquad \text{a} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_N(B_j) \le \lambda_N(H) + \varepsilon.$$

Díky α-lipschitzovskosti (tedy konstanta lipschitzovskosti je α) zobrazení φ konečně dostáváme (některé z koulí mohou zasahovat mimo G, proto musíme být opatrní)

$$\begin{aligned}
\lambda_N^*(\boldsymbol{\varphi}(E)) &\le \lambda_N^*\Big(\boldsymbol{\varphi}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}(B_j \cap G)\Big)\Big) = \lambda_N^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\boldsymbol{\varphi}(B_j \cap G)\Big) \le \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_N^*(\boldsymbol{\varphi}(B_j \cap G)) \\
&\le \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_N^*(B_{\alpha r_j}(\boldsymbol{\varphi}(x_j))) = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha^N\lambda_N(B_{r_j}(\boldsymbol{\varphi}(x_j))) = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha^N\lambda_N(B_j) \\
&\le \alpha^N(\lambda_N^*(E) + 2\varepsilon).
\end{aligned}$$

Jestliže $\boldsymbol{\varphi}$ je pouze lokálně lipschitzovské na G, pro každé $j \in \mathbb{N}$ položme

$$K_j := \{x \in G\colon \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus G) \ge \tfrac{1}{j}\} \cap \overline{B_j(0)}.$$

Tím jsme získali kompaktní množiny splňující $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset G$ a $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = G$. Pokud nyní $E \subset G$ splňuje $\lambda_N(E) = 0$, každá z množin $E \cap K_j$ má tutéž vlastnost a navíc leží ve vnitřku kompaktu K_{j+1}, na němž je zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ lipschitzovské. Následně díky první části lemmatu máme $\lambda_N(\boldsymbol{\varphi}(E \cap K_j)) = 0$ a odtud

$$\lambda_N(\boldsymbol{\varphi}(E)) = \lambda_N\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\boldsymbol{\varphi}(E \cap K_j)\Big) = \lim_{j \to \infty}\lambda_N(\boldsymbol{\varphi}(E \cap K_j)) = 0.$$

□

Důsledek 15.12.10 (O rotační invarianci Lebesgueovy míry)**.** *Lebesgueova míra je rotačně invariantní (při rotaci se zachovává jak lebesgueovská měřitelnost, tak hodnota Lebesgueovy míry množiny).*

Důkaz. Z Důsledku o míře obrazu při lipschitzovském zobrazení (Důsledek 15.12.9) plyne, že při rotaci se Lebesgueova vnější míra nemůže zvětšit. Tentýž výsledek aplikovaný na inverzi k naší rotaci dává, že se Lebesgueova vnější míra nemůže ani zmenšit. Díky tomu se také při rotaci zachovává rovnost v podmínce z Carathéodoryho kritéria měřitelnosti (Definice 15.3.5). Odtud již snadno plyne zachování měřitelnosti. □

Důsledek 15.12.11 (O měřitelnosti obrazu při regulárním zobrazení)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\boldsymbol{\varphi} \in C^1(G; \mathbb{R}^N)$ je prosté regulární zobrazení. Pak pro libovolnou lebesgueovsky měřitelnou množinu $A \subset G$ je $\boldsymbol{\varphi}(A)$ lebesgueovsky měřitelná množina.*

Důkaz. Protože A je lebesgueovsky měřitelná, můžeme psát $A = A_1 \cup A_2$, kde A_1 je borelovská a $\lambda_N(A_2) = 0$. Podle Věty o charakterizaci měřitelných funkcí pomocí vzorů (Věta 15.4.6) je $\boldsymbol{\varphi}(A_1)$ lebesgueovsky měřitelná množina jakožto vzor borelovské množiny při spojitém zobrazení $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$. Dále $\lambda_N(\boldsymbol{\varphi}(A_2)) = 0$ podle poslední části Důsledku o míře obrazu při lipschitzovském zobrazení (Důsledek 15.12.9), neboť funkce φ je lokálně lipschitzovská. Celkově je množina

$$\boldsymbol{\varphi}(A) = \boldsymbol{\varphi}(A_1) \cup \boldsymbol{\varphi}(A_2)$$

lebesgueovsky měřitelná. □

Poznámka 15.12.12. (i) Důkaz byl založen na vlastnosti našeho zobrazení

$$\lambda_N(E) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_N(\boldsymbol{\varphi}(E)) = 0.$$

Této vlastnosti se říká *Luzinova vlastnost* (N).
(ii) Pro Luzinovu vlastnost (N) nestačí spojitost, uvažte Cantorovu funkci, která zobrazuje Cantorovo diskontinuum na množinu plné Lebesgueovy míry.
(iii) Pokud je $\boldsymbol{\varphi}\colon G \mapsto \mathbb{R}^N$ homeomerfismus ($\boldsymbol{\varphi}$ a $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$ jsou spojitá), pak je Luzinova vlastnost (N) ekvivalentní tomu, že $\boldsymbol{\varphi}$ zobrazuje lebesgueovsky měřitelné množiny na lebesgueovsky měřitelné množiny. Skutečně, pokud platí Luzinova vlastnost (N), můžeme použít konstrukci z předchozího důkazu. Pokud tato vlastnost neplatí, vezmeme $E \subset G$ splňující $\lambda_N(E) = 0$ a $\lambda_N(\boldsymbol{\varphi}(E)) > 0$. Pro jakoukoliv lebesgueovsky neměřitelnou množinu $A \subset \boldsymbol{\varphi}(E)$ pak máme $\lambda(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(A)) = 0$. Tedy $\boldsymbol{\varphi}^{-1}(A)$ je lebesgueovsky měřitelná množina, která nemá lebesgueovsky měřitelný obraz.

Dále si dokažme následující známý výsledek.

Tvrzení 15.12.13 (O vztahu determinantu a Lebesgueovy míry rovnoběžnostěnu)**.** *Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N \in \mathbb{R}^N$. Pak N-rozměrná Lebesgueova míra rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$, tedy množiny*

$$M = \Big\{ \sum_{i=1}^{N} t_i \mathbf{v}_i \colon t_1, \dots, t_N \in [0,1] \Big\},$$

je rovna absolutní hodnotě determinantu matice, kde jsou vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$ zapsané jako sloupce.

Důkaz. Tvrzení je zřejmé v případě, kdy $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$ jsou lineárně závislé, protože tehdy je rovnoběžnostěn podmnožinou nadroviny (ta má nulovou Lebesgueovu míru) a determinant je nulový.

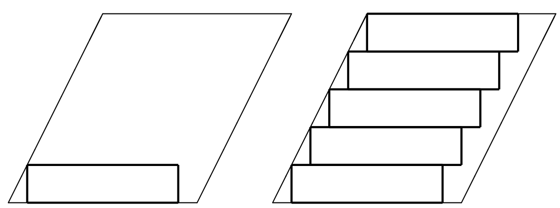
Ve zbytku důkazu se budeme zabývat případem lineárně nezávislých vektorů. Zde je vše jasné v případě diagonální matice (připomeňme, že Lebesgueova míra kvádru je rovna součinu délek jeho hran). Na tento případ zbývající případy převedeme. Učiníme tak ve dvou krocích. Nejprve si ujasníme, že standardní geometrická definice objemu rovnoběžnostěnu (součin výšky a plochy podstavy) je totožná s jeho N-rozměrnou Lebesgueovou mírou. Ve druhém kroku si ukážeme, že každý rovnoběžnostěn se dá konečným počtem kroků přetransformovat na kvádr, přičemž jednotlivé transformace nemění ani hodnotu determinantu ani geometrický objem.

Krok 1: rovnost geometrického objemu a Lebesguovy míry rovnoběžnostěnu. Budeme postupovat indukcí. Nechť je nejprve $N = 2$. Rotací rovnoběžníku můžeme dosáhnout toho, že podstava je rovnoběžná s osou odpovídající první proměnné v $\mathbb{R}^2$. Rotaci jsme oprávněni provést díky tomu, ze jednak rotace nemění geometrický objem a jednak se při ní zachovává Lebesgueova míra díky Důsledku o rotační invarianci Lebesgueovy míry (Důsledek 15.12.10).

Nyní provedeme dolní odhad míry rovnoběžníku. Nechť $d > 0$ je délka podstavy a $h > 0$ je výška rovnoběžníku. Zvolme $\varepsilon > 0$. V závislosti na zkosení rovnoběžníku lze volit $m \in \mathbb{N}$ tak velké, že obdélník o podstavě $(1-\varepsilon)d$ a výšce $\frac{h}{m}$, který má střed dolní podstavy ve středu dolní podstavy rovnoběžníku, leží celý v rovnoběžníku. Díky tomu dokážeme do rovnoběžníku umístit m kopií našeho obdélníku (překrývají se jen hrany, které mají nulovou dvojrozměrnou Lebesgueovu míru; metoda konstrukce je znázorněna na obrázku), a proto dostáváme

$$\lambda_2(M) \geq m\Big((1-\varepsilon)d\frac{h}{m}\Big) = (1-\varepsilon)dh.$$

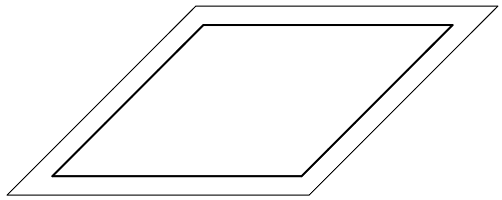
Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, dostáváme $\lambda_2(M) \geq dh$. Obrácený odhad získáme podobně za pomoci obdélníků s podstavou délky $(1+\varepsilon)d$.



Obrázek 15.4: Aproximace zevnitř v $\mathbb{R}^2$: rovnoběžník vyplňujeme obdélníky, při jejichž konstrukci vycházíme ze zmenšené podstavy.

Pro $N = 3$ postupujeme tak, že podstavu, která je rovnoběžníkem (vztah její dvojrozměrné Lebesgueovy míry a geometrického obsahu jsme již odvodili výše) nahradíme rovnoběžníkem s rozměry rovnými $(1-\varepsilon)$-násobku rozměrů původních. Ten umístíme do vnitřku spodní podstavy (třeba pomocí stejnolehlosti se středem v těžišti). Vzniklý útvar nazvěme P. Tentokrát budeme rovnoběžnostěn vyplňovat posouváním množiny $P \times [0, \frac{d}{m}]$. Její míru umíme určit díky předchozímu indukčnímu kroku a Fubiniho větě (Věta 15.11.2). Pokračujeme indukcí.

Krok 2: postupné transformace rovnoběžnostěnu.
Nejprve si uvědomme, že každou regulární matici umíme převést na matici diagonální tím, že k jednotlivým sloupcům přičítáme vhodné násobky sloupců ostatních. Při těchto operacích zůstává determinant zachován. Vysvětleme si ještě, že



Obrázek 15.5: Aproximace zevnitř v $\mathbb{R}^N$: ve vyšší dimenzi je podstavou rovnoběžnostěn, který nahradíme o malinko menším rovnoběžnostěnem získaným pomocí stejnolehlosti.

zůstává zachován i geometrický objem rovnoběžnostěnu. Nechť původní rovnoběžnostěn je dán vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$ a modifikovaný rovnoběžnostěn je dán vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_j + \alpha \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{j+1}, \dots, \mathbf{v}_N$, pro nějaké $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $i \in \{1, \dots, N\} \setminus \{j\}$. Označíme-li jako dolní podstavu množinu, která je dána pomocí vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \dots, \mathbf{v}_N$, přesněji množinu

$$\Big\{ \sum_{i \in \{1,\dots,N\} \setminus \{j\}} \quad t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_N \in [0,1] \Big\},$$

pak dolní podstavu (a tedy i její obsah) mají oba rovnoběžnostěny totožnou. Navíc horní podstava nového rovnoběžnostěnu je horní podstava rovnoběžnostěnu původního posunutá o nějaký násobek vektoru ležícího v nadrovině dolní podstavy. Tím pádem se nezměnila výška rovnoběžnostěnu a geometrický objem zůstal zachován. Ten je navíc podle prvního kroku roven Lebesgueově míře. Díky tomu naše transformace zachovávají i Lebesgueovu míru rovnoběžnostěnu a důkaz je dokončen. □

V hlavní části důkazu Věty o substituci (Věta 15.12.1) budeme naše zobrazení φ lokálně aproximovat lineárními zobrazeními. Často budeme používat následující výsledek.

Lemma 15.12.14 (O transformaci míry při lineárním zobrazení)**.** *Nechť* $\mathbf{L} \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *je lineární zobrazení reprezentované maticí* $\mathbb{M}$ *a* $E \subset \mathbb{R}^N$ *je lebesgueovsky měřitelná množina. Pak* $\lambda_N(\mathbf{L}(E)) = |\det \mathbb{M}| \lambda_N(E)$.

Důkaz. Zabývejme se jen případem $|\det \mathbb{M}| > 0$, jinak je vše zřejmé. Definujme pro každé $n \in \mathbb{N}$ systém

$$\mathcal{A}_n := \{E \subset \mathbb{R}^N \colon \lambda_N(\mathbf{L}(E \cap (-n,n)^N)) = |\det \mathbb{M}| \lambda_N(E \cap (-n,n)^N)\}.$$

Ukažme, že $\mathcal{A}_n$ obsahuje všechny borelovské množiny. Začněme tím, že uvážíme $E \subset \mathbb{R}^N$ jako omezený otevřený interval. Tvrzení je zřejmé pro $N = 1$. Pokud $N \geq 2$, využijeme Tvrzení o vztahu determinantu a Lebesgueovy míry rovnoběžnostěnu

(Tvrzení 15.12.13). Protože průnik dvojice omezených otevřených intervalů je opět omezený otevřený interval, díky Lemmatu o rovnosti obalů (Lemma 15.11.14) zbývá ukázat zbývá ukázat, že $\mathcal{A}_n$ je Dynkinův systém.

Zřejmě platí $\mathbb{R}^N \in \mathcal{A}_n$. Pokud $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ jsou po dvou disjunktní množiny, zřejmě mají tutéž vlastnost i systémy $\{E_n \cap (-n,n)^N\}$ a $\{\mathbf{L}(E_n \cap (-n,n)^N)\}$. Pak už je snadno vidět, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}_n$. Konečně, pokud $E \in \mathcal{A}_n$, pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ máme

$$
\begin{aligned}
\lambda_N(&\mathbf{L}((\mathbb{R}^N \setminus E) \cap (-n,n)^N)) \\
&= \lambda_N(\mathbf{L}((-n,n)^N)) - \lambda_N(\mathbf{L}(E \cap (-n,n)^N)) \\
&= |\det \mathbb{M}|\lambda_N((-n,n)^N) - |\det \mathbb{M}|\lambda_N(E \cap (-n,n)^N) \\
&= |\det \mathbb{M}|\lambda_N((\mathbb{R}^N \setminus E) \cap (-n,n)^N).
\end{aligned}
$$

Odtud pro všechny borelovské množiny platí

$$\lambda_N(\mathbf{L}(E \cap (-n,n)^N)) = |\det \mathbb{M}|\lambda_N(E \cap (-n,n)^N).$$

Pomocí Lebesgueovy věty o monotonní konvergenci (Věta 15.10.3) následně dostáváme

$$\lambda_N(\mathbf{L}(E)) = |\det \mathbb{M}|\lambda_N(E).$$

Pokud je $E \subset \mathbb{R}^N$ lebesgueovsky měřitelná, přepíšeme si $E = E_1 \cup E_2$, kde E_1 je borelovská a $\lambda_N(E_2) = 0$. Druhou množinu pak standardně nahradíme borelovskou nadmnožinou nulové Lebesgueovy míry. □

V dalším budeme pro jednoduchost používat pro eukleidovskou normu prvku $x \in \mathbb{R}^N$ zkrácené značení $|x|$. Připomeňme ještě značení $\mathbf{0} := (0,\dots,0) \in \mathbb{R}^N$.

Věta 15.12.15 (Sardova věta)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a nechť $\boldsymbol{\varphi} \in C^1(G;\mathbb{R}^N)$. Pak*

$$\lambda_N(\boldsymbol{\varphi}(\{x \in G \colon \mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(x) = 0\})) = 0.$$

Důkaz. Nechť Q je libovolná uzavřená krychle splňující $Q \subset G$. Délku její hrany označme d. Zafixujme $\varepsilon > 0$. Dále vektorová funkce

$$\mathbf{H}(x,y) := \begin{cases} \frac{\boldsymbol{\varphi}(y)-\boldsymbol{\varphi}(x)-\nabla\boldsymbol{\varphi}(x)\cdot(y-x)}{|y-x|} & \text{pro } x \neq y \\ 0 & \text{pro } x = y \end{cases}$$

je spojitá na $G \times G$ (použije se $\varphi \in C^1(G;\mathbb{R}^N)$ a Lagrangeova věta přírůstku funkce, tedy Věta 6.3.3), a proto je stejnoměrně spojitá na $Q \times Q$. Následně je možné nalézt $k \in \mathbb{N}$ tak velké, že pokud Q rozřežeme na k^N stejně velkých krychliček (překrývají se jen jejich stěny), pro x a y patřící do téže krychličky platí $|\mathbf{H}(x,y)| < \varepsilon$. Zároveň φ je nutně lipschitzovské na Q, tedy existuje $M > 0$ splňující

$$|\boldsymbol{\varphi}(y_1) - \boldsymbol{\varphi}(y_2)| \le M|y_1 - y_2| \qquad \text{pro všechna } y_1, y_2 \in Q.$$

Nechť v dalším S označuje jednu z malých krychliček, která obsahuje bod x splňující $\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(x) = 0$. Povšimněme si, že pak $z \mapsto \nabla\boldsymbol{\varphi}(x) \cdot z$ zobrazuje $\mathbb{R}^N$ na nejvýše

$(N-1)$-dimenzionální podprostor $\mathbb{R}^N$. Označme jej V. Pokud navíc $y \in S$, pak výše uvedený odhad $|\mathbf{H}(x,y)| < \varepsilon$ zaručuje, že vzdálenost $\boldsymbol{\varphi}(y)$ od množiny $V + \boldsymbol{\varphi}(x)$ (posunutý podprostor) je nejvýše $\varepsilon|y-x|$. Tuto hodnotu lze podle předchozích voleb odhadnout číslem $\varepsilon\sqrt{N}\frac{d}{k}$.

Na druhou stranu máme díky lipschitzovskosti $\boldsymbol{\varphi}$ odhad

$$|\boldsymbol{\varphi}(y) - \boldsymbol{\varphi}(x)| \le M|y-x| \le M\sqrt{N}\frac{d}{k}.$$

Celkově jsme zjistili, že obraz množiny S leží v průniku pásu a koule. Tento průnik je obsažen ve válci s poloměrem podstavy $M\sqrt{N}\frac{d}{k}$ a výškou $2\varepsilon\sqrt{N}\frac{d}{k}$. Lebesgueovu míru této množiny lze odhadnout hodnotou $\frac{C\varepsilon}{k^N}$. Protože krychliček je nejvýše k^N, dostáváme

$$\lambda_N(\boldsymbol{\varphi}(\{x \in Q \colon \mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(x) = 0\})) \le C\varepsilon.$$

Navíc $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, proto $\lambda_N(\boldsymbol{\varphi}(\{x \in Q \colon \mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(x) = 0\})) = 0$.

Protože G je možné pokrýt spočetným systémem uzavřených krychlí (stačí brát všechny krychle, které leží v G a jejichž rohy mají racionální souřadnice), jsme hotovi. $\square$

Představme si další ingredienci našeho důkazu Věty o substituci.

Věta 15.12.16 (Lebesgueova věta o hustotě)**.** *Nechť $E \subset \mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelná množina. Pak skoro každý bod x z množiny E je bodem hustoty této množiny, neboli splňuje*

$$\lim_{r\to 0_+} \frac{\lambda_N(B_r(x)) \cap E)}{\lambda_N(B_r(x)))} = 1.$$

Lebesgueovu větu o hustotě zde nebudeme dokazovat. Získá se tak, že na funkci χ_E aplikujeme Větu o Lebesgueových bodech, kterou si dokážeme v kapitole o Lebesgueových prostorech. Důkaz Věty o Lebesgueových bodech (Věta 16.5.13) a v něm použitá teorie Větu o substituci (Věta 15.12.1) nepoužívá, nehrozí tedy důkaz kruhem.

Nyní se opět vraťme k aproximacím pomocí lineárních zobrazení. Pro taková zobrazení budeme používat normu

$$\|\mathbf{L}\| = \sup\{\mathbf{L}x \colon x \in \mathbb{R}^N, |x| \le 1\}.$$

Pokud je $\boldsymbol{L}$ reprezentované maticí $\mathbb{M}$, platí $|\det \mathbb{M}| \le \|\mathbf{L}\|^N$, neboť $\mathbf{L}$ zobrazuje jednotkovou krychli na rovnoběžnostěn o objemu $|\det \mathbb{M}|$ a s hranami délky nepřekračující $\|\mathbf{L}\|$.

Lemma 15.12.17 (O vlastnostech lineární aproximace)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $\boldsymbol{\varphi} \in C^1(G;\mathbb{R}^N)$ je prosté regulární zobrazení a $\varepsilon > 0$. Nechť $F \subset G$ je lebesgueovsky měřitelná množina a $\mathbf{L} \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je prosté lineární zobrazení reprezentované maticí $\boldsymbol{M}$, které splňuje*

$$|\varphi(s) - \varphi(t) - \mathbf{L}(s-t)| \le \varepsilon|s-t| \qquad \textit{pro všechna } s,t \in F. \tag{15.12.1}$$

Označme

$$\alpha := \frac{1}{1-\varepsilon\|\mathbf{L}^{-1}\|} \qquad a \qquad \beta := 1+\varepsilon\|\mathbf{L}^{-1}\|.$$

Pak platí následující tvrzení.
(i) *Zobrazení $\boldsymbol{\varphi}\circ\mathbf{L}^{-1}$ je β-lipschitzovské na $\mathbf{L}(F)$.*
(ii) *Jestliže $\varepsilon\|\mathbf{L}^{-1}\|<1$, pak $\mathbf{L}\circ\boldsymbol{\varphi}^{-1}$ je α-lipschitzovské na $\boldsymbol{\varphi}(F)$.*
(iii) *Pro skoro všechna $t\in F$ platí $\|\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}(t)-\mathbf{L}\|\le\varepsilon$ a pro všechna $t\in F$ platí $|\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(t)|\le\beta^N|\det\mathbb{M}|$.*
(iv) *Jestliže $\varepsilon\|\mathbf{L}^{-1}\|<1$, pak pro všechna $t\in F$ platí $|\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(t)|\ge\alpha^{-N}|\det\mathbb{M}|$.*
(v) *Pro každou lebesgueovsky měřitelnou množinu $E\subset F$ platí*

$$\lambda_N(\boldsymbol{\varphi}(E))\le\beta^N|\det\mathbb{M}|\lambda_N(E).$$

(vi) *Jestliže $\varepsilon\|\mathbf{L}^{-1}\|<1$ a $E\subset F$ je lebesgueovsky měřitelná, pak*

$$\beta^{-N}\alpha^{-N}\int_E|\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}|\,\mathrm{d}\lambda_N\le\lambda_N(\boldsymbol{\varphi}(E))\le\beta^N\alpha^N\int_E|\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}|\,\mathrm{d}\lambda_N.$$

Důkaz. Nechť $t,s\in F$. Pak

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\varphi}(s)-\boldsymbol{\varphi}(t)|&\le|\boldsymbol{\varphi}(s)-\boldsymbol{\varphi}(t)-\mathbf{L}(s-t)|+|\mathbf{L}(s-t)|\le\varepsilon|s-t|+|\mathbf{L}s-\mathbf{L}t|\\&\le\varepsilon\|\mathbf{L}^{-1}\||\mathbf{L}s-\mathbf{L}t|+|\mathbf{L}s-\mathbf{L}t|=\beta|\mathbf{L}s-\mathbf{L}t|.\end{aligned}$$

Odtud snadno dostáváme (i). Navíc platí

$$\begin{aligned}|\mathbf{L}s-\mathbf{L}t|&\le|\boldsymbol{\varphi}(s)-\boldsymbol{\varphi}(t)-\mathbf{L}(s-t)|+|\boldsymbol{\varphi}(s)-\boldsymbol{\varphi}(t)|\le\varepsilon|s-t|+|\boldsymbol{\varphi}(s)-\boldsymbol{\varphi}(t)|\\&\le\varepsilon\|\mathbf{L}^{-1}\||\mathbf{L}s-\mathbf{L}t|+|\boldsymbol{\varphi}(s)-\boldsymbol{\varphi}(t)|.\end{aligned}$$

Jednoduchou úpravou odtud dostáváme

$$(1-\varepsilon\|\mathbf{L}^{-1}\|)|\mathbf{L}s-\mathbf{L}t|\le|\boldsymbol{\varphi}(s)-\boldsymbol{\varphi}(t)|,$$

z čehož plyne (ii).

Dokažme (iii). Nechť $t\in F$ je bodem hustoty množiny F. Zafixujme $\widetilde{\varepsilon}>0$. Dále z předpokladu $\boldsymbol{\varphi}\in C^1(G;\mathbb{R}^N)$ plyne, že pro s z dostatečně malého okolí bodu t platí

$$|\boldsymbol{\varphi}(s)-\boldsymbol{\varphi}(t)-\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}(t)(s-t)|\le\widetilde{\varepsilon}|s-t|.$$

Na průniku tohoto okolí s množinou F proto platí

$$\begin{aligned}|\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}(t)(s-t)-\mathbf{L}(s-t)|&\le|\boldsymbol{\varphi}(s)-\boldsymbol{\varphi}(t)-\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}(t)(s-t)|+|\boldsymbol{\varphi}(s)-\boldsymbol{\varphi}(t)-\mathbf{L}(s-t)|\\&\le(\widetilde{\varepsilon}+\varepsilon)|s-t|.\end{aligned}$$

Tvrdíme, že poslední odhad platí dokonce pro $s\in\mathbb{R}^N$. Skutečně, pokud by tomu tak nebylo, našli bychom bod tvaru $s=t+v\in\mathbb{R}^N$, ve kterém by odhad neplatil. Díky spojitosti obou lineárních zobrazení vystupujících na levé straně by existovalo okolí bodu s, v jehož žádném bodě by odhad neplatil. Následně díky linearitě obou zobrazení by odhad neplatil v odpovídajícím kuželu s vrcholem v bodě t. Tím bychom ale dostali spor s tím, že t je bodem hustoty množiny, kde odhad platí. Konečně, protože $\widetilde{\varepsilon} > 0$ bylo libovolné, dostáváme

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}(t)(s-t) - \mathbf{L}(s-t)| \leq \varepsilon |s-t| \qquad \text{pro všechna } s \in \mathbb{R}^N$$

a máme první odhad z (iii). Dále podle (i) má zobrazení $\boldsymbol{\varphi} \circ \mathbf{L}^{-1}$ absolutní hodnotu derivace v každém jednotkovém směru shora odhadnutou číslem β. Proto má jeho Jacobiho matice všude normu odhadnutou číslem β. Odtud plyne

$$|\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(t)||\det \mathbb{M}^{-1}| \leq \beta^N.$$

Snadno tedy dostáváme druhý odhad. Podobně v důkazu části (iv) využijeme odhad $|\det \mathbb{M}||J_{\boldsymbol{\varphi}^{-1}}(\boldsymbol{\varphi}(t))| \leq \alpha^N$ (získaný pomocí (ii)) a rovnost $|J_{\boldsymbol{\varphi}^{-1}}(\boldsymbol{\varphi}(t))| = |\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(t)|^{-1}$ (plyne z globální verze Věty o inverzi, tedy Věty 12.8.7).

V důkazu části (v) použijeme (i), Důsledek o měřitelnosti obrazu při regulárním zobrazení (Důsledek 15.12.11), Důsledek o míře obrazu při lipschitzovském zobrazení (Důsledek 15.12.9), Lemma o transformaci míry při lineárním zobrazení (Lemma 15.12.14) a dostáváme

$$\lambda_N(\boldsymbol{\varphi}(E)) \leq \beta^N \lambda_N(\mathbf{L}(E)) = \beta^N |\det \mathbb{M}| \lambda_N(E).$$

Použijeme-li navíc (iv), předchozí odhad dává

$$\lambda_N(\boldsymbol{\varphi}(E)) \leq \beta^N |\det \mathbb{M}| \lambda_N(E) \leq \beta^N \alpha^N \int_E |\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}| \, \mathrm{d}\lambda_N,$$

což je druhá nerovnost v (vi). Zbývající nerovnost dostaneme analogickým postupem založených na (ii) a (iii), kde je prvním krokem odhad

$$\lambda_N(\boldsymbol{\varphi}(E)) \geq \alpha^{-N} \lambda_N(\mathbf{L}(E)) = \alpha^{-N} |\det \mathbb{M}| \lambda_N(E)$$

a následně

$$\lambda_N(\boldsymbol{\varphi}(E)) \geq \alpha^{-N} |\det \mathbb{M}| \lambda_N(E) \geq \beta^{-N} \alpha^{-N} \int_E |\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}| \, \mathrm{d}\lambda_N.$$

□

Důkaz Věty o substituci (Věta 15.12.1). Nejprve se zabývejme případem $f = \chi_F$, kde $F \subset \varphi(G)$ je lebesgueovsky měřitelná množina. Označme $E := \boldsymbol{\varphi}^{-1}(F)$, což je lebesgueovsky měřitelná množina (vzor lebesgueovsky měřitelné množiny při spojitém zobrazení). Naším cílem je ukázat, že platí

$$\lambda_N(\boldsymbol{\varphi}(E)) = \int_E |\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}| \, \mathrm{d}\lambda_N. \tag{15.12.2}$$

Pak totiž budeme mít i dokazovanou rovnost, neboť právě uvedená rovnost zaručuje, že

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(G)} \chi_F \, \mathrm{d}\lambda_N = \lambda_N(F) = \lambda_N(\boldsymbol{\varphi}(E)) &= \int_E |\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}| \, \mathrm{d}\lambda_N \\ &= \int_G \chi_F(\boldsymbol{\varphi}(x)) |\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(x)| \, \mathrm{d}\lambda_N(x). \end{aligned}$$

Zabývejme se nyní důkazem pomocné rovnosti (15.12.2). Rozložme množinu E předpisem

$$E = E_1 \cup E_2 := \{x \in E \colon \mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(x) \neq 0\} \cup \{x \in E \colon \mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(x) = 0\}.$$

Protože $\boldsymbol{\varphi} \in C^1(G; \mathbb{R}^N)$, podle pravidel pro výpočet determinantu je funkce $x \mapsto \mathrm{J}_{\varphi}(x)$ spojitá, díky tomu je množina $G_1 := \{x \in G \colon \mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(x) \neq 0\}$ otevřená, a proto jsou právě zavedené množiny lebesgueovsky měřitelné. Navíc s využitím Sardovy věty (Věta 15.12.15) máme

$$\lambda_N(\boldsymbol{\varphi}(E_2)) = 0 = \int_{E_2} 0 \,\mathrm{d}\lambda_N = \int_{E_2} |\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}| \,\mathrm{d}\lambda_N. \tag{15.12.3}$$

Práce s množinou E_1 je založena na Lemmatu o vlastnostech lineární aproximace (Lemma 15.12.14). Začneme rozkladem otevřené množiny G_1, na níž je $\boldsymbol{\varphi}$ prosté regulární zobrazení, na spočetný systém po dvou disjunktních lebesgueovsky měřitelných množin, kde platí odhady typu (15.12.1). Nejprve zvolme $\tau > 1$. Nyní pro každé $x \in G_1$ definujme lineární zobrazení $\mathbf{L}_x := \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}(x)$ a nechť $\mathbb{M}_x$ je jemu odpovídající matice. Protože $x \in G_1$, máme $\det \mathbb{M}_x \neq 0$.

Zvolme $\varepsilon_x > 0$ tak malé, aby $\varepsilon_x \|\mathbf{L}_x^{-1}\| < 1 - \tau^{-\frac{1}{2N}}$. Pomocí Lagrangeovy věty o přírůstku funkce (Věta 6.3.3) lze nyní nahlédnout, že existuje $\delta_x > 0$ takové, že

$$|\boldsymbol{\varphi}(s) - \boldsymbol{\varphi}(t) - \mathbf{L}_x(s-t)| < \varepsilon_x |s-t| \qquad \text{pro všechna } s, t \in \mathcal{U}_{\delta_x}(x).$$

Uvedená okolí pokrývají množinu G_1. Pomocí Lindelöfovy pokryvací věty (Věta 11.7.2) vybereme spočetný podsystém stále pokrývající G_1. Standardním způsobem nyní přejdeme k systému měřitelných po dvou disjunktních množin $\{H_j\}$ (pokud bylo spočetné pokrytí tvořeno koulemi $\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \widetilde{H}_3, \ldots$, vezmeme $\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2 \setminus \widetilde{H}_1, \widetilde{H}_3 \setminus (\widetilde{H}_1 \cup \widetilde{H}_2), \ldots$). Pro jednoduchost značení v dalším pišme, že množině H_j odpovídá lineární zobrazení $\mathbf{L}_j$ a konstanta ε_j. Dále pracujme se zafixovaným $j \in \mathbb{N}$.

Podle poslední části Lemmatu o vlastnostech lineární aproximace (Lemma 15.12.14) platí

$$\tau^{-1} \int_{H_j \cap E_1} |\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}| \,\mathrm{d}\lambda_N \leq \lambda_N(\boldsymbol{\varphi}(H_j \cap E_1)) \leq \tau \int_{H_j \cap E_1} |\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}| \,\mathrm{d}\lambda_N,$$

neboť

$$0 < \beta_j < \alpha_j \leq \frac{1}{1 - \varepsilon_j \|\mathbf{L}_j^{-1}\|} \leq \frac{1}{1 - (1 - \tau^{-\frac{1}{2N}})} = \tau^{\frac{1}{2N}}.$$

Získanou nerovnost vysčítáme přes $j \in \mathbb{N}$ a dostáváme

$$\tau^{-1} \int_{E_1} |\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}| \,\mathrm{d}\lambda_N \leq \lambda_N(\boldsymbol{\varphi}(E_1)) \leq \tau \int_{E_1} |\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}| \,\mathrm{d}\lambda_N.$$

Protože $\tau > 1$ bylo libovolné, máme $\lambda_N(\boldsymbol{\varphi}(E_1)) = \int_{E_1} |\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}| \,\mathrm{d}\lambda_N$. Tento výsledek spolu s (15.12.3) dává (15.12.2), čímž jsme dokončili důkaz věty pro případ, že f je charakteristická funkce lebesgueovsky měřitelné množiny.

Dále díky linearitě integrálu dostáváme platnost věty pro nezáporné lebesgueovsky měřitelné jednoduché funkce. Pomocí Lebesgueovy věty o monotonní konvergenci (Věta 15.7.6) přecházíme k nezáporným lebesgueovsky měřitelným funkcím. (Skutečně, využijeme standardní neklesající posloupnost nezáporných lebesgueovsky měřitelných jednoduchých funkcí $\{s_n\}$ bodově konvergující k f. Limitní přechod pod integrálem na levé straně je jasný. Na pravé straně si povšimněme, že $\{s_n \circ \boldsymbol{\varphi}\}$ je neklesající posloupnost nezáporných jednoduchých funkcí bodově konvergující k $f \circ \boldsymbol{\varphi}$. Lebesgueovská měřitelnost zmíněných funkcí se ověří podobně, jako se ověřila lebesgueovská měřitelnost množiny E na začátku důkazu.) Odtud díky rozkladu na kladnou a zápornou část dostáváme obecný případ. □

15.13 Zobecnění Lebesgueova integrálu

Některé aplikace vyžadují integraci funkcí, pro které klasický Lebesgueův integrál neexistuje. Zde si uvedeme dva případy takových zobecnění. Nový přístup k integrálu s sebou však nese tu nevýhodu, že ztrácíme některé vlastnosti Lebesgueova integrálu. V lepším případě musíme obvyklé výsledky dokazovat znovu.

Prvním příkladem je integrál $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, který existuje jako Newtonův, ale neexistuje jako Lebesgueův. Z hlediska výpočtu hodnoty tohoto integrálu nám teorie Newtonova integrálu nepomůže, protože neumíme najít primitivní funkci. Níže však uvidíme, že nástroje z teorie Lebesgueova integrálu nám spočítat hodnotu našeho integrálu umožňují.

Definice 15.13.1 (Zobecněný Lebesgueův integrál)**.** Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definováno na $(a,b) \subset \mathbb{R}$, pro všechna $\alpha, \beta \in (a,b)$ existuje vlastní $\int_\alpha^\beta f\,\mathrm{d}\lambda_1$ a existuje vlastní

$$J := \lim_{\substack{\alpha,\beta\in(a,b)\\ \alpha\to a\\ \beta\to b}} \int_\alpha^\beta f\,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Potom číslo J nazýváme *zobecněným Lebesgueovým integrálem* a značíme jej $(\mathcal{ZL})\int_a^b f\,\mathrm{d}x$.

Poznámka 15.13.2. Dvojnou limitu v definici chápeme tak, že pro všechna $\varepsilon > 0$ existují $\delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že pro všechna $\alpha \in \mathcal{U}^+_{\delta_1}(a)$ a $\beta \in \mathcal{U}^-_{\delta_2}(b)$ platí

$$\left| J - \int_\alpha^\beta f \mathrm{d}\lambda_1 \right| < \varepsilon.$$

Poznámka 15.13.3. Pokud existuje $\int_a^b f\,\mathrm{d}\lambda_1$, pak existuje i $(\mathcal{ZL})\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ a oba integrály se rovnají. To se snadno ověří za pomoci Lebesgueovy věty o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17).

Následující věta je formulována ve tvaru, ve kterém ji co nejjednodušeji můžeme použít pro výpočet integrálu $(\mathcal{ZL})\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Věta 15.13.4 (O integrálech závislých na parametru pro zobecněný Lebesgueův integrál)**.** *Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $[c,d] \subset \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definováno na $(a,b) \times [c,d]$ a platí:*
(i) *pro každé $\beta \in (a,b)$ je funkce $\gamma \mapsto \int_a^\beta f(x,\gamma)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$ spojitá na $[c,d]$*
(ii) *pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každou dvojici $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{U}_\delta^-(b)$ platí*

$$\Big|\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x,\gamma)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\Big| < \varepsilon$$

pro všechna $\gamma \in [c,d]$.
Pak pro všechna $\gamma \in [c,d]$ existuje $(\mathcal{ZL})\int_a^b f(x,\gamma)\,\mathrm{d}x$ a je spojitě závislý na $\gamma \in [c,d]$.

Důkaz. Nejprve ukažme existenci zobecněných Lebesgueových integrálů. Zafixujme $\gamma \in [c,d]$ a položme

$$\Phi_\gamma(\beta) := \int_a^\beta f(x,\gamma)\,\mathrm{d}\lambda_1(x).$$

Podle druhého předpokladu funkce Φ splňuje B–C podmínku pro limitu

$$J_\gamma := \lim_{\beta \to b_-} \Phi_\gamma(\beta).$$

Ukažme, že $J_\gamma = (\mathcal{ZL})\int_a^b f(x,\gamma)\,\mathrm{d}x$. Poslouží nám nerovnost

$$\begin{aligned}&\Big|J_\gamma - \int_\alpha^\beta f(x,\gamma)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\Big| \\ &\quad\le \Big|J_\gamma - \int_a^\beta f(x,\gamma)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\Big| + \Big|\int_a^\beta f(x,\gamma)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) - \int_\alpha^\beta f(x,\gamma)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\Big|.\end{aligned}$$

První člen pravé strany umíme udělat libovolně malý pro β z dostatečně malého okolí bodu b díky předchozí konstrukci. Pro druhý člen zase máme

$$\Big|\int_a^\beta f(x,\gamma)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) - \int_\alpha^\beta f(x,\gamma)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\Big| \le \int_a^\alpha |f(x,\gamma)|\,\mathrm{d}\lambda_1(x),$$

kde pravou stranu umíme udělat libovolně malou díky prvnímu předpokladu a Větě o absolutní spojitosti Lebesgueova integrálu (Věta 15.8.13). Celkově jsme ukázali existenci zobecněných Lebesgueových integrálů.

Dokažme ještě spojitou závislost J_γ na γ. Zafixujme $\gamma_0 \in (c,d)$ (jednostranná spojitost v krajních bodech se dokazuje analogicky). Zvolme $\varepsilon > 0$. Nechť $\delta > 0$ odpovídá našemu ε jako ve druhém předpokladu věty, zvolme $\beta \in \mathcal{U}_\delta^-(b)$ a k němu podle prvního předpokladu vezměme $\tau > 0$ takové, že

$$\Big|\int_a^\beta f(x,\gamma)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) - \int_a^\beta f(x,\gamma_0)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\Big| < \varepsilon$$

pro všechna $\gamma \in (\gamma_0 - \tau, \gamma_0 + \tau)$. Celkově pak máme

$$\begin{aligned}|J_\gamma - J_{\gamma_0}| \le \Big|\int_a^\beta f(x,\gamma)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) - \int_a^\beta f(x,\gamma_0)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\Big| \\ + \Big|(\mathcal{ZL})\int_a^b f(x,\gamma)\,\mathrm{d}x - \int_a^\beta f(x,\gamma)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\Big| \\ + \Big|(\mathcal{ZL})\int_a^b f(x,\gamma_0)\,\mathrm{d}x - \int_a^\beta f(x,\gamma_0)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\Big| < 3\varepsilon,\end{aligned}$$

kde odhad prvního členu pravé strany jsme si vysvětlili výše a zbylé dva členy jsou odhadnuty limitním přechodem ve druhém předpokladu. □

Příklad 15.13.5. Spočítejme $I := (\mathcal{ZL})\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. Předchozí větu budeme aplikovat na integrály

$$I(\gamma) := (\mathcal{ZL})\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\gamma x}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro } \gamma \in [0,\infty).$$

Budeme postupovat ve dvou krocích. Nejprve si povšimneme, že pro $\gamma \in (0,\infty)$ se jedná o klasické Lebesgueovy integrály. Díky tomu na ně budeme moci aplikovat klasickou teorii pro integrály závislé na parametru a zjistíme, že $I(\gamma) = \frac{\pi}{2} - \arctan\gamma$. Ve druhém kroku použijeme předchozí větu pro $\gamma \in [0,1]$ a dostaneme

$$I = I(0) = \lim_{\gamma\to 0_+} I(\gamma) = \lim_{\gamma\to 0_+}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan\gamma\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

Přistupme k prvnímu kroku. Použijeme Větu o derivaci integrálu podle parametru (Věta 15.10.3). Při ověřování předpokladů může činit potíže snad jen integrovatelná majoranta pro funkce $\frac{\partial}{\partial\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma x}\frac{\sin x}{x} = -\mathrm{e}^{-\gamma x}\sin x$, což vyřešíme systémem majorant $\{\mathrm{e}^{-\delta x}\}_{\delta>0}$ použitelných pro $\gamma \in [\delta,\infty)$. Následně máme

$$\begin{aligned}I'(\gamma) &= \int_0^\infty -\mathrm{e}^{-\gamma x}\sin x\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = -\operatorname{Im}\Big[\frac{\mathrm{e}^{(-\gamma+\mathrm{i})x}}{-\gamma+\mathrm{i}}\Big]_0^\infty = \operatorname{Im}\frac{1}{-\gamma+\mathrm{i}} = \operatorname{Im}\frac{-\gamma-\mathrm{i}}{\gamma^2+1} \\ &= -\frac{1}{1+\gamma^2}.\end{aligned}$$

Odtud $I(\gamma) = C - \arctan\gamma$ na $(0,\infty)$. Pomocí Lebesgueovy věty o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17) kombinované s Heineho větou (Věta 5.4.1) snadno dále získáváme

$$\lim_{\gamma\to\infty} I(\gamma) = \lim_{\gamma\to\infty}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\gamma x}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = \int_0^\infty 0\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = 0.$$

Proto $C = \frac{\pi}{2}$ a dostáváme vzorec $I(\gamma) = \frac{\pi}{2} - \arctan\gamma$.

Přistupme ke druhému kroku. Tentokrát budeme pracovat s $\gamma \in [0,1]$ a na všechny integrály nahlížet jako na zobecněné Lebesgueovy integrály. Stačí nám ověřit předpoklady Věty o integrálech závislých na parametru pro zobecněný Lebesgueův integrál (Věta 15.13.4). První předpoklad požaduje spojitost zobrazení

$$\gamma \mapsto \int_0^\beta \mathrm{e}^{-\gamma x} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}\lambda_1(x)$$

na $[0,1]$ pro libovolné zafixované $\beta \in (0,\infty)$. Opět se jedná o klasické Lebesgueovy integrály a požadovaná vlastnost plyne z Věty o spojitosti integrálu závislého na parametru (Věta 15.10.1), ve které jako majorantu volíme třeba konstantní jedničku. Druhou podmínku nám zajistí Druhá věty o střední hodnotě integrálního počtu (lze použít Větu 7.7.4 i 7.7.7), neboť máme

$$\begin{aligned}\Big|(\mathcal{R})\int_{\beta_1}^{\beta_2} \mathrm{e}^{-\gamma x} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x\Big| &= \Big|\frac{\mathrm{e}^{-\gamma\beta_1}}{\beta_1}(\mathcal{R})\int_{\beta_1}^{\xi} \sin x \, \mathrm{d}x + \frac{\mathrm{e}^{-\gamma\beta_2}}{\beta_2}(\mathcal{R})\int_{\xi}^{\beta_2} \sin x \, \mathrm{d}x\Big| \\ &\le \frac{1}{\beta_1}\Big|(\mathcal{R})\int_{\beta_1}^{\xi} \sin x \, \mathrm{d}x\Big| + \frac{1}{\beta_2}\Big|(R)\int_{\xi}^{\beta_2} \sin x \, \mathrm{d}x\Big| \\ &\le \frac{2}{\beta_1} + \frac{2}{\beta_2}.\end{aligned}$$

Nyní jsme již skutečně oprávněni použít výše uvedený výpočet vedoucí k $I = \frac{\pi}{2}$.

Dalším zobecněním Lebesgueova integrálu je *integrál ve smyslu hlavní hodnoty*, který později oceníme v teorii distribucí (moderní teorie parciálních diferenciálních rovnic je založena na používání nástrojů z metrických prostorů a vhodným metrickým prostorem je právě prostor takzvaných *distribucí*).

Definice 15.13.6 (Integrál ve smyslu hlavní hodnoty)**.** Nechť $x_0 \in (a,b) \subset \mathbb{R}$ a $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována skoro všude na (a,b). Nechť platí
(i) pro každé $\varepsilon > 0$ existuje vlastní $\int_{(a,b)\setminus(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)} f \, \mathrm{d}\lambda_1$
(ii) existuje vlastní

$$A := \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{(a,b)\setminus(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)} f \, \mathrm{d}\lambda_1.$$

Pak číslo A nazýváme *integrálem funkce f přes interval (a,b) ve smyslu hlavní hodnoty (principal value integral)* a píšeme

$$A = \text{p.v.} \int_a^b f \, \mathrm{d}\lambda_1.$$

Poznámka 15.13.7. Někdy se integrál ve smyslu hlavní hodnotu označuje zkratkou v.p. Ta pochází z francouzského „valeur principale“, autorem tohoto pojmu je francouzský matematik Augustin Louis Cauchy.

Příklad 15.13.8. Nechť $a < 0 < b$. Pak $\int_a^b \frac{1}{x} \, \mathrm{d}\lambda_1$ neexistuje, neboť

$$\int_a^b \Big(\frac{1}{x}\Big)^+ \mathrm{d}\lambda_1 = \int_0^b \frac{1}{x} \, \mathrm{d}\lambda_1 = \infty$$

a

$$\int_a^b \left(\frac{1}{x}\right)^- \mathrm{d}\lambda_1 = -\int_a^0 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\lambda_1 = \infty.$$

Na druhou stranu máme

$$\begin{aligned}\text{p.v.}\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\lambda_1 &= \lim_{\varepsilon\to 0_+}\Big(\int_a^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\lambda_1 + \int_\varepsilon^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\lambda_1\Big) = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\big([\log|x|]_a^{-\varepsilon} + [\log x]_\varepsilon^b\big)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0_+}\big((\log\varepsilon - \log|a|) + (\log b - \log\varepsilon)\big) = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\log\frac{b}{|a|} = \log\frac{b}{|a|}.\end{aligned}$$

Podobně ukážeme, že pokud je funkce $g \in C^1((a,b))$ omezená na (a,b), pak p.v. $\int_a^b \frac{g(x)}{x}\,\mathrm{d}\lambda_1$ existuje. Integrály přes $(a,-\varepsilon)$ a (ε,b) existují díky spojitosti a omezenosti integrandu. Dále pišme s využitím aritmetiky limit (níže ukážeme, že pravá strana má smysl)

$$\text{p.v.}\int_a^b \frac{g(x)}{x}\,\mathrm{d}\lambda_1 = \text{p.v.}\int_a^b \frac{g(0)}{x}\,\mathrm{d}\lambda_1 + \text{p.v.}\int_a^b \frac{g(x)-g(0)}{x}\,\mathrm{d}\lambda_1 =: I_1 + I_2.$$

Analogicky jako výše máme $I_1 = g(0)\log\frac{b}{|a|}$. Existence I_2 plyne z výpočtu založeného na Lagrangeově větě o přírůstku funkce (Věta 6.3.3)

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\Big|\frac{g(x)-g(0)}{x}\Big|\,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\Big|\frac{g'(\xi_x)x}{x}\Big|\,\mathrm{d}\lambda_1 \le \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\max_{[-\varepsilon,\varepsilon]}|g'|\,\mathrm{d}\lambda_1 \le 2C\varepsilon.$$

Pak totiž máme splněnou B–C podmínku pro existenci limity z druhé části definice integrálu ve smyslu hlavní hodnoty.

15.14 Dodatek: zobecněná Lebesgueova věta o majorizované konvergenci a Vitaliho věta o stejně integrovatelných funkcích

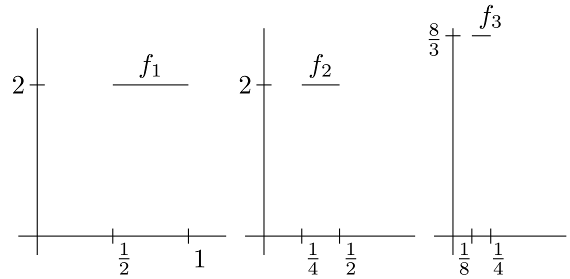
V předchozích kapitolách jsme často užívali Lebesgueovu větu o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17) a Lebesgueovu větu o monotonní konvergenci (Věta 15.7.6). Uvedené věty umožňují prohodit limitu a integrál ve dvou typech bodově konvergentních posloupností. Tyto dva příklady nám ale nestačí vždy. Jako modelový příklad uvažme posloupnost $\{f_n\} := \{\frac{2^n}{n}\chi_{(2^{-n},2^{-n+1})}\}$.

Platí $f_n \to 0$ na $\mathbb{R}$ a

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\,\mathrm{d}\lambda_1 = \frac{1}{n} \to 0 = \int_{\mathbb{R}} 0\,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Tento výsledek se nedá zdůvodnit stejnoměrnou konvergencí ani Lebesgueovou větou o monotonní konvergenci (Věta 15.7.6) ani Lebesgueovou větou o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17), neboť posloupnost $\{f_n\}$ nekonverguje stejnoměrně, není monotonní a případná majoranta g by musela splňovat

$$g \ge f_n \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad\Longrightarrow\quad g \ge \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\chi_{(2^{-n},2^{-n+1})} \quad\Longrightarrow\quad \int_{\mathbb{R}} g\,\mathrm{d}\lambda_1 \ge \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty.$$



Obrázek 15.6: Ilustrace k volbě posloupnosti $\{f_n\}$.

V dalším si uvedeme dvě věty, které si poradí i s tímto příkladem.

Věta 15.14.1 (Zobecněná Lebesgueova věta o majorizované konvergenci)**.** *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných numerických funkcí definovaných na X a platí $f_n \to f$ skoro všude na X. Nechť $\{g_n\} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ je posloupnost funkcí splňující $g_n \to g$ skoro všude na X, kde $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, a $|f_n| \leq g_n$ skoro všude na X pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Jestliže*

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu,$$

pak

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Z předpokladů snadno plyne, že $|f| \leq g$ skoro všude na X. Proto $g_n + g - |f_n - f| \geq 0$ skoro všude na X pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Aplikací Fatouova lemmatu (Lemma 15.7.9) a bodové konvergence dostáváme

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X (g_n + g - |f_n - f|) \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X \liminf_{n\to\infty} (g_n + g - |f_n - f|) \, \mathrm{d}\mu = \int_X 2g \, \mathrm{d}\mu.$$

Proto

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (g_n - g - |f_n - f|) \, \mathrm{d}\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_X (g_n - g) \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = -\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Odtud již snadno plyne dokazované tvrzení. □

Poznámka 15.14.2. Lebesgueova věta o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17) je speciálním případem předchozí věty s volbou $g_n := g$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pro formulaci druhé věty nejprve potřebujeme zadefinovat nový pojem.

Definice 15.14.3 (Stejná integrovatelnost)**.** Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných numerických funkcí definovaných na X. Řekneme, že funkce $\{f_n\}$ jsou *stejně integrovatelné* na X, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $\Omega \subset X$ platí

$$\mu(\Omega) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \int_\Omega |f_n| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Věta 15.14.4 (Vitaliho věta o stejně integrovatelných funkcích)**.** *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných numerických funkcí definovaných na X. Nechť dále platí*
(i) $\mu(X) < \infty$
(ii) $f_n \to f$ *skoro všude na* X
(iii) $\{f_n\}$ *jsou stejně integrovatelné na* X
(iv) $|f| < \infty$ *skoro všude na* X.
Pak $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nechť $\delta > 0$ odpovídá našemu ε v definici stejné integrovatelnosti funkcí f_n. Protože $\mu(X) < \infty$ a $f_n \to f$ skoro všude na X, podle Jegorovovy věty (Věta 15.5.8) existuje $E \subset X$ taková, že

$$\mu(E) < \delta \qquad \text{a} \qquad f_n \rightrightarrows f \quad \text{na } X \setminus E.$$

Proto existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\int_{X\setminus E} |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

Dále díky stejné integrovatelnosti funkcí f_n máme

$$\int_E |f_n| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}$$

a Fatouovo lemma (Lemma 15.7.9) navíc dává

$$\int_E |f| \,\mathrm{d}\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} |f_n| \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E |f_n| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Celkově pro $n \geq n_0$ máme

$$\begin{aligned}\int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu &= \int_{X\setminus E} |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu + \int_E |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_{X\setminus E} |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu + \int_E |f_n| \,\mathrm{d}\mu + \int_E |f| \,\mathrm{d}\mu < 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Vlastnost $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ plyne okamžitě z odhadu $|f| \leq |f_n| + |f - f_n|$. □

Poznámka 15.14.5. Na posloupnost $\{f_n\} := \{\frac{2^n}{n}\chi_{(2^{-n},2^{-n+1})}\}$ je možné aplikovat Vitaliho větu o stejně integrovatelných funkcích (Věta 15.14.4) třeba na intervalu $[0,1]$. Uvažované funkce jsou skutečně stejně integrovatelné, neboť k zadanému $\varepsilon > 0$ na jednu stranu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n| \, \mathrm{d}\lambda_1 < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } n \geq n_0,$$

na druhou stranu jsou všechny funkce f_n pro $n < n_0$ omezené stejnou konstantou.

15.14.1 Jensenova nerovnost

Jensenova nerovnost, se kterou jsme se seznámili při studiu konvexních funkcí jedné reálné proměnné, má také svoji integrální verzi.

Věta 15.14.6 (Jensenova nerovnost). *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor s pravděpodobnostní mírou, $f \in L^1(\mu)$, $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, $f(X) \subset (\alpha, \beta)$ a $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je konvexní na (α, β). Pak*

$$\varphi\Big(\int_X f \, \mathrm{d}\mu\Big) \leq \int_X \varphi \circ f \, \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Označme $t := \int_X f \, \mathrm{d}\mu$. Protože $\mu(X) = 1$, máme $t \in (\alpha, \beta)$. Označme ještě

$$M := \sup_{s \in (\alpha, t)} \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s}.$$

Ukažme, že $M \in \mathbb{R}$ a pro všechna $s \in (\alpha, \beta) \setminus \{t\}$ platí

$$\varphi(t) - \varphi(s) \leq M(t - s).$$

Pokud vezmeme $s \in (\alpha, t)$, uvedená nerovnost je splněna díky definici M, a pokud $s = t$, nerovnost platí triviálně. Ve zbývajícím případě $s \in (t, \beta)$ díky konvexitě φ máme pro každé $y \in (\alpha, t)$

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(y)}{t - y} \leq \frac{\varphi(s) - \varphi(t)}{s - t}.$$

Dále si stačí uvědomit, že levá strana má supremum rovné M. Odtud dostáváme $M \in \mathbb{R}$ a odhad $M \leq \frac{\varphi(s) - \varphi(t)}{s - t}$, který vede na dokazovanou pomocnou nerovnost.

Nyní do získané nerovnosti dosadíme $s := f(x)$ spolu s definicí t a máme

$$\varphi\Big(\int_X f \, \mathrm{d}\mu\Big) - \varphi(f(x)) \leq M\Big(\int_X f \, \mathrm{d}\mu - f(x)\Big).$$

Integrujeme pres X podle μ a využijeme $\mu(X) = 1$

$$\varphi\Big(\int_X f \, \mathrm{d}\mu\Big) - \int_X \varphi(f(x)) \, \mathrm{d}\mu \leq M\Big(\int_X f \, \mathrm{d}\mu - \int_X f \, \mathrm{d}\mu\Big),$$

z čehož plyne dokazovaný výsledek. $\square$

Poznámka 15.14.7. V případě Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}$ se Jensenova nerovnost používá při integraci přes jednotkový interval nebo obecněji pro $-\infty < a < b < \infty$ můžeme psát

$$\varphi\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f \,\mathrm{d}\lambda_1\Big) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b (\varphi \circ f)\,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Příklad 15.14.8. Cyklista se pohybuje nezápornou rychlostí v závislou na čase $t \in (a,b)$ a překonává odpor vzduchu úměrný druhé mocnině rychlosti. Podle Jensenovy nerovnosti platí

$$\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b v \,\mathrm{d}\lambda_1\Big)^2 \le \frac{1}{b-a}\int_a^b v^2 \,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Je-li rychlost konstantní, snadno vidíme, že v předchozí nerovnosti nastává rovnost. Je-li tedy $d > 0$ zadaná vzdálenost, kterou má cyklista ujet v časovém intervalu (a,b) (tedy $d = \int_a^b v \,\mathrm{d}\lambda_1$), ze všech přípustných funkcí reprezentujících rychlost bude právě konstantní rychlost pro našeho cyklistu nejvýhodnější. Uvědomme si totiž, že levá strana nerovnosti je pevně daná, pravá strana reprezentuje (až na multiplikativní konstantu) výkon sil, které musí cyklista vynaložit kvůli odporu vzduchu. Zjistili jsme, že pravá strana se minimalizuje, pokud je rychlost konstantní.

Předchozí příklad bylo ale možno řešit také aplikací Hölderovy nerovnosti, kterou si dokážeme v příští kapitole. Netriviální důsledky Jensenovy nerovnosti (Věta 15.14.6) získáme, pokud ji aplikujeme na funkce φ jiné než mocninné. Například pokud vezmeme $\varphi(x) := \log x$ (což je konkávní funkce, musíme tedy zaměnit nerovnost), dostáváme použitím tvaru nerovnosti z Poznámky 15.14.7

$$\log\Big(\frac{b+a}{2}\Big) \ge \frac{b\log b - a\log a}{b-a} - 1,$$

která platí pro libovolné $0 < a < b < \infty$.

Kapitola 16

Lebesgueovy prostory

V kapitole o metrických prostorech jsme si představili integrální normy

$$\|f\|_p = \Big(\int_a^b |f|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}$$

na prostoru $C([a,b])$. Jak v případě Riemannova tak Newtonova integrálu se dá nahlédnout, že prostor $C([a,b])$ s tímto typem norem není úplný. To nám pro tyto normy neumožňuje používat naše hlubší výsledky z teorie metrických prostorů. Zde si ukážeme, že v případě Lebesgueova integrálu na vhodně zvolené množině funkcí dostáváme Banachův prostor. Pro $p = 2$ se dokonce jedná o prostor Hilbertův.

Připomeňme, že v kapitole o stejnoměrné konvergenci jsme narazili na typ parciálních diferenciálních rovnic, jejichž řešení vyžadovalo rozložení zadané funkce f do tvaru

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

Právě výsledky této kapitoly spolu s pozdějšími výsledky z teorie Fourierových řad nám ukáží, že množina

$$\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, \dots\} := \{1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \dots\}$$

je ortogonální bází zde studovaných prostorů při volbě $(a,b) = (-\pi,\pi)$ a $p = 2$. Navíc díky tvaru skalárního součinu $(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} fg \,\mathrm{d}x$ dostaneme (bodovou konvergenci budeme umět dokázat například pro po částech diferencovatelné funkce)

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(f, \frac{f_n}{\|f_n\|_2}\Big) \frac{f_n}{\|f_n\|_2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f,f_n)}{\|f_n\|_2^2} f_n,$$

neboli

$$a_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots$$

a

$$b_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro } k = 1, 2, \dots.$$

Nové prostory zavedeme jen vzhledem k Lebesgueově míře λ_N. Celá teorie by se však dala vybudovat vzhledem k libovolné σ-konečné míře.

Protože budeme v celé kapitole pracovat pouze s Lebesgueovou mírou, dovolíme si zkracovat slovní spojení „lebesgueovsky měřitelná" na „měřitelná" a namísto „$\mathrm{d}\lambda_N(x)$" budeme pod integrálem psát „$\mathrm{d}x$".

Poznámka 16.0.1. V teorii Lebesgueových prostorů vybudovaných na Lebesgueově míře a v teorii parciálních diferenciálních rovnic se často zkracuje značení pro Lebesgueovu míru množiny $A \subset \mathbb{R}^N$ na $|A| := \lambda_N(A)$. My zde toto zkrácené značení používat nebudeme.

16.1 Definice Lebesgueových prostorů a jejich základní vlastnosti

Definice 16.1.1 (Pomocný prostor $\mathcal{L}^p(\Omega)$ a veličina $\mathcal{N}_p$)**.** Nechť $p \in [1, \infty)$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Pak $\mathcal{L}^p(\Omega)$ označuje množinu všech měřitelných numerických funkcí na Ω, pro které platí

$$\mathcal{N}_p(f) := \left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Dále $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ označuje množinu všech měřitelných numerických funkcí na Ω, pro které platí

$$\mathcal{N}_\infty(f) = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f| := \inf_{\substack{P \subset \Omega \\ \lambda_N(P)=0}} \sup_{\Omega \setminus P} |f| < \infty.$$

Veličina ess sup se nazývá *esenciální supremum.*

Zřejmě vždy platí $\operatorname{ess\,sup}_\Omega f \le \sup_\Omega f$. Pro lepší představu o rozdílu těchto pojmů si uveďme několik příkadů.

Příklad 16.1.2. (i) Nechť $\Omega = (0, 1)$ a $f \equiv 1$. Zřejmě $\sup_\Omega f = 1$. Vynecháme-li z definičního oboru libovolnou množinu nulové míry, stále nám zůstane mnoho bodů s funkční hodnotou rovnou jedné. Proto $\operatorname{ess\,sup}_\Omega f = 1$.
(ii) Nechť $\Omega = (0, 1)$ a $f(x) = x$. Zřejmě $\operatorname{ess\,sup}_\Omega f \le \sup_\Omega f = 1$. Na druhou stranu, pro každé $\delta > 0$ a libovolnou množinu $P \subset \Omega$ splňující $\lambda_1(P) = 0$ platí $(1 - \delta, 1) \setminus P \ne \emptyset$. Proto $\operatorname{ess\,sup}_\Omega f > 1 - \delta$ a odtud $\operatorname{ess\,sup}_\Omega f = 1$.
(iii) Nechť $\Omega = (0, 1)$ a $f(x) = -\log x$. Podobně jako v předchozí části lze ukázat, že $\operatorname{ess\,sup}_\Omega f = \sup_\Omega f = \infty$. Následně máme $f \notin \mathcal{L}^\infty(\Omega)$.
(iv) Seřaďme všechna racionální čísla intervalu $(0, 1)$ do posloupnosti $\{q_n\}$ a definujme pro $x \in \Omega = (0, 1)$

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{pro } x = q_n \\ 0 & \text{pro } x \notin \{q_n\}. \end{cases}$$

Pak

$$\operatorname{ess\,sup}_\Omega f = 0 < \infty = \sup_\Omega f.$$

Tvrzení 16.1.3 (Charakterizace ess sup)**.** *Nechť $S \in [0,\infty]$ a f je měřitelná numerická funkce na měřitelné množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Pak*

$$\operatorname{ess\,sup}_\Omega |f| \leq S \qquad \Longleftrightarrow \qquad |f| \leq S \quad \textit{skoro všude na } \Omega.$$

Důkaz. Nejprve si povšimněme, že pro $S = \infty$ platí oba výroky ze znění věty. Dále jestliže $S < \infty$, pak implikace „$\Leftarrow$“ plyne přímo z definice pojmu ess sup.

Stačí se tedy omezit na $S < \infty$ a dokázat implikaci „$\Rightarrow$“. Platí-li výrok na levé straně, pak podle definice pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje měřitelná množina $P_n \subset \Omega$ taková, že $\lambda_N(P_n) = 0$ a

$$\sup_{\Omega \setminus P_n} |f| < S + \frac{1}{n}.$$

Následně

$$\lambda_N\Big(\bigcup_{n=1}^\infty P_n\Big) = 0 \qquad \text{a} \qquad |f| \leq S \quad \text{na } \Omega \setminus \bigcup_{n=1}^\infty P_n.$$

□

Poznámka 16.1.4. Povšimněme si ještě, že pro $p \in [1,\infty)$ platí

$$\Big(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}x < \infty.$$

Umocnění integrálu na $\frac{1}{p}$ tedy není podstatné při definici prostoru $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Pro veličinu $\mathcal{N}_p$ má však zásadní význam, neboť pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ a $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ pak máme

$$\mathcal{N}_p(\alpha f) = |\alpha| \mathcal{N}_p(f),$$

což je vlastnost, díky níž se (po odstranění problému zmíněného níže) $\mathcal{N}_p$ stane normou.

Dvojice $(\mathcal{L}^p(\Omega), \mathcal{N}_p)$ však není normovaný lineární prostor. Podle definice normy by totiž muselo platit

$$\mathcal{N}_p(f) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f \equiv 0,$$

ale to není pravda, neboť ekvivalentní (rovnající se skoro všude) funkce se při integraci chovají stejně. Tento problém odstraníme následujícím způsobem.

Definice 16.1.5 (Lebesgueův prostor $L^p(\Omega)$)**.** Nechť $p \in [1,\infty]$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Pak *Lebesgueův prostor* $L^p(\Omega)$ je množina všech tříd ekvivalence (vzhledem k rovnosti funkcí skoro všude) na $\mathcal{L}^p(\Omega)$.

Poznámka 16.1.6. (i) V každé třídě ekvivalence je nekonečně mnoho funkcí. Například funkce 0, $\chi_{\{0\}}$ a Dirichletova funkce leží v téže třídě ekvivalence.
(ii) Definice je korektní v tom smyslu, že pokud f a g leží v téže třídě a g a h leží v téže třídě, pak f a h leží v téže třídě, neboť

$$\lambda_N(\{f \neq q\}) = 0, \lambda_N(\{g \neq h\}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_N(\{f \neq h\}) = 0.$$

Dále platí pro f a g z téže třídy, že $\mathcal{N}_p(f) = \mathcal{N}_p(g)$; pro $1 \leq p < \infty$ díky nezávislosti Lebesgueova integrálu na změně funkce na množině míry nula, pro $p = \infty$ díky definici esenciálního suprema.
(iii) Prvky $L^p(\Omega)$ jsou sice třídy funkcí, ale v praxi se většinou těmto prvkům říká „funkce“ a chováme se k nim jako k funkcím, u kterých neznáme některé funkční hodnoty. Bývá zvykem třídy značit podle jedné z funkcí ve třídě se vyskytující. Typicky vybíráme funkci s nejhezčími vlastnostmi v dané třídě. Takové funkci se pak říká *reprezentant*.
(iv) Skutečnost, že u prvků Lebesgueových prostorů máme určené funkční hodnoty až na množinu nulové míry, se sice neprojevuje při integraci, ale třeba derivovat takovéto funkce nemůžeme, neboť hodnota derivačních podílů $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se dramaticky změní změnou hodnoty $f(x)$. Později (v teorii distribucí) zavedeme jiný typ derivace, který u funkcí z Lebesgueových prostorů částečně převezme úlohu derivace klasické.
(v) Ze stejného důvodu nemá smysl počítat třeba limity těchto „funkcí“ na kraji definičního oboru.

Příklad 16.1.7. Pokud napíšeme $1 \in C((0,1))$, myslíme tím námi dosud často používanou konstantní funkci. Pokud napíšeme $1 \in L^2((0,1))$, máme na mysli třídu funkcí, pro niž je 1 spojitým reprezentantem.

Příklad 16.1.8. Snadným výpočtem (pomocí primitivní funkce) se ověří, že

$$x^\alpha \in L^1((0,1)) \Longleftrightarrow \alpha > -1 \qquad \text{a} \qquad x^\alpha \in L^1((1,\infty)) \Longleftrightarrow \alpha < -1.$$

Odtud dostáváme pro libovolné $p \in [1, \infty)$

$$x^\alpha \in L^p((0,1)) \Longleftrightarrow x^{\alpha p} \in L^1((0,1)) \Longleftrightarrow \alpha p > -1$$

a

$$x^\alpha \in L^p((1,\infty)) \Longleftrightarrow x^{\alpha p} \in L^1((1,\infty)) \Longleftrightarrow \alpha p < -1.$$

Zajímavá je situace ve vyšší dimenzi. Budeme pracovat s funkcí $|x|^\alpha$, kde $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$. Pro $N = 2$ polární souřadnice (odpovídající jakobián je $\mathrm{J}_{\boldsymbol{\Phi}} = r$) dávají

$$\int_{B_1(0)} |x|^{\alpha p} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} r^{\alpha p} r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = 2\pi \int_0^1 r^{\alpha p + 1} \,\mathrm{d}r$$

a

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)} |x|^{\alpha p} \,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \int_{-\pi}^{\pi} r^{\alpha p} r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = 2\pi \int_1^\infty r^{\alpha p + 1} \,\mathrm{d}r.$$

Proto

$$|x|^\alpha \in L^p(B_1(0)) \Longleftrightarrow \alpha p + 1 > -1 \quad \text{a} \quad |x|^\alpha \in L^p(\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)) \Longleftrightarrow \alpha p + 1 < -1.$$

Ve vyšší dimenzi použijeme sférické souřadnice. Pro $N = 3$ mají podobu

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi_2\cos\varphi_1 \\ x_2 &= r\cos\varphi_2\sin\varphi_1 \qquad \text{pro } r \in (0,\infty), \varphi_2 \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}), \varphi_1 \in (-\pi,\pi). \\ x_3 &= r\sin\varphi_2 \end{aligned}$$

Pro $N = 4$ máme

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi_3\cos\varphi_2\cos\varphi_1 \\ x_2 &= r\cos\varphi_3\cos\varphi_2\sin\varphi_1 \\ x_3 &= r\cos\varphi_3\sin\varphi_2 \\ x_4 &= r\sin\varphi_3 \end{aligned} \qquad \text{pro} \qquad \begin{gathered} r \in (0,\infty), \varphi_3 \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}), \\ \varphi_2 \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}), \varphi_1 \in (-\pi,\pi), \end{gathered}$$

a tak dále. Z pravidel pro výpočet determinantu je jasné, že jakobián bude tvaru

$$\mathrm{J}_{\mathbf{\Phi}} = r^{N-1}\Psi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N-1}),$$

kde $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}^{N-1})$ je funkce vzniklá součty, rozdíly a součiny sinů a kosinů s argumenty $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N-1}$. Protože navíc platí díky Fubiniho větě

$$\begin{aligned} \lambda_N(B_1(0)) &= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} |\mathrm{J}_{\mathbf{\Phi}}| \,\mathrm{d}\varphi_1 \ldots \mathrm{d}\varphi_{N-1} \,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 r^{N-1}\,\mathrm{d}r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} |\Psi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N-1})| \,\mathrm{d}\varphi_1 \ldots \mathrm{d}\varphi_{N-1}, \end{aligned}$$

musí být

$$\infty > C_N := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} |\Psi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N-1})| \,\mathrm{d}\varphi_1 \ldots \mathrm{d}\varphi_{N-1} > 0.$$

Díky právě získaným poznatkům o sférických souřadnicích máme

$$\int_{B_1(0)} |x|^{\alpha p} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 C_N r^{\alpha p} r^{N-1} \,\mathrm{d}r$$

a

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)} |x|^{\alpha p} \,\mathrm{d}x = \int_1^\infty C_N r^{\alpha p} r^{N-1} \,\mathrm{d}r.$$

Proto

$$|x|^\alpha \in L^p(B_1(0)) \Longleftrightarrow \alpha p > -N \qquad \text{a} \qquad |x|^\alpha \in L^p(\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)) \Longleftrightarrow \alpha p < -N.$$

Poznámka 16.1.9. Minulý příklad by si ještě zasloužil ukázat, že jakobián je dokonce (alespoň všude mimo počátek) nenulový, jak vyžaduje použitá Věta o substituci (Věta 15.12.1). To přenecháváme čtenáři jako cvičení (získejte přesnou formuli pro jakobián). Protože je jakobián zřejmě v počátku nulový, musíme být při integraci přes $B_1(0)$ poněkud opatrnější. Striktně vzato, místo přes celou kouli budeme integrovat přes kouli bez počátku $(B_1(0)\backslash 0)$; zde Věta o substituci funguje. Jeden bod má ovšem nulovou míru a tím získáme stejné výsledky jako výše. V dalším už analogické úvahy nebudeme opakovat.

Příklad 16.1.10. Protože

$$|f^+| \le |f|, \qquad |f^-| \le |f| \qquad \text{a} \qquad |f| = |f^+ - f^-| \le |f^+| + |f^-|$$

platí

$$f \in L^p(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad f^+, f^- \in L^p(\Omega).$$

16.2 Hölderova nerovnost a její důsledky

Snadno lze nahlédnout, že množiny $L^p(\Omega)$ jsou vektorové prostory s obvyklými operacemi sčítání funkcí (pro $p < \infty$ se využije $|f+g|^p \le 2^p|f|^p + 2^p|g|^p$) a násobení funkcí reálným číslem. Naším dalším cílem bude ukázat, že $\mathcal{N}_p$ je na $L^p(\Omega)$ norma a dokázat úplnost odpovídajících prostorů. Nejvíce práce nám dá trojúhelníková nerovnost. Přípravu na její důkaz začneme nerovností, která má i další aplikace.

Věta 16.2.1 (Hölderova nerovnost)**.** *Nechť $p, q \in [1,\infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (s konvencí $\frac{1}{\infty} = 0$) a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Jestliže $f \in L^p(\Omega)$ a $g \in L^q(\Omega)$, pak $fg \in L^1(\Omega)$ a*

$$\int_\Omega |fg| \,\mathrm{d}x \le \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_q(g).$$

Důkaz. Nejprve se zabývejme případem $p = \infty$. Podle definice esenciálního suprema máme $|f| \le \mathcal{N}_\infty(f)$ skoro všude. Navíc $q = 1$, a proto dostáváme

$$\int_\Omega |fg| \,\mathrm{d}x \le \int_\Omega \mathcal{N}_\infty(f)|g| \,\mathrm{d}x = \mathcal{N}_\infty(f) \int_\Omega |g| \,\mathrm{d}x = \mathcal{N}_\infty(f)\mathcal{N}_1(g),$$

což jsme chtěli ukázat. Analogicky postupujeme pokud $p = 1$ a $q = \infty$.

Ve zbývajících případech máme $1 < p, q < \infty$. Nejprve si povšimněme, že pokud $\mathcal{N}_p(f) = 0$ nebo $\mathcal{N}_q(g) = 0$, dotyčná funkce je nulová skoro všude a dokazovaná nerovnost platí triviálně. Jinak díky případnému vytknutí vhodných multiplikativních konstant stačí uvažovat situaci $\mathcal{N}_p(f) = \mathcal{N}_q(g) = 1$. Zde použijeme Youngovu nerovnost $st \le \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$ platnou pro všechna $s, t \ge 0$ a $1 < p, q < \infty$ splňující $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (důkaz se snadno získá tak, že zavedeme pomocnou funkci

$\varphi(s) := \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q} - st$ a zderivováním nalezneme globální minimum). Máme

$$\begin{aligned}\int_\Omega |fg| \, \mathrm{d}x &\leq \int_\Omega \Big(\frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}\Big) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{|f|^p}{p} \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{|g|^q}{q} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathcal{N}_p^p(f)}{p} + \frac{\mathcal{N}_q^q(g)}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_q(g),\end{aligned}$$

což jsme chtěli ukázat. □

Cvičení 16.2.2. Dokažte výše uvedenou Youngovu nerovnost.

Poznámka 16.2.3. Pokud $p \in [1, \infty]$, pak pro $q \in [1, \infty]$ splňující $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ platí vzorec

$$q = \frac{p}{p-1}$$

(s konvencemi $\frac{\infty}{\infty - 1} = 1$, $\frac{1}{1-1} = \infty$). Exponent q se nazývá *hölderovsky sdružený exponent* k exponentu p a často se značí p'. Ze vzorce $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ plyne

$$(p')' = p, \qquad p = 2 \iff p' = 2 \qquad \text{a} \qquad p \in (1, 2) \iff p' \in (2, \infty).$$

Významným důsledkem Hölderovy nerovnosti je trojúhelníková nerovnost pro funkcionál $\mathcal{N}_p$.

Věta 16.2.4 (Minkowského nerovnost)**.** *Nechť $p \in [1, \infty]$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Jestliže $f, g \in L^p(\Omega)$, pak $f + g \in L^p(\Omega)$ a*

$$\mathcal{N}_p(f + g) \leq \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(g).$$

Důkaz. Pokud $p = 1$ nebo $p = \infty$, důkaz je snadným cvičením. V dalším předpokládejme, že máme $p \in (1, \infty)$. Snadno se také získá $f + g \in L^p(\Omega)$ a odtud

$$|f + g|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) = L^{p'}(\Omega).$$

Díky tomu a Hölderově nerovnosti máme

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f + g|^p \, \mathrm{d}x &\leq \int_\Omega \big(|f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1}\big) \, \mathrm{d}x \\ &\leq \Big(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_\Omega \big(|f + g|^{p-1}\big)^{p'} \, \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p'}} \\ &\qquad + \Big(\int_\Omega |g|^p \, \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_\Omega \big(|f + g|^{p-1}\big)^{p'} \, \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \Big[\Big(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_\Omega |g|^p \, \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\Big] \Big(\int_\Omega |f + g|^p \, \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p'}}.\end{aligned}$$

Odtud

$$\Big(\int_\Omega |f + g|^p \, \mathrm{d}x\Big)^{1 - \frac{1}{p'}} \leq \Big(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_\Omega |g|^p \, \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Protože $1 - \frac{1}{p'} = \frac{1}{p}$, jsme hotovi. □

Díky Minkowského nerovnosti vidíme, že $\mathcal{N}_p$ na $L^p(\Omega)$ splňuje trojúhelníkovou nerovnost, což byla jediná vlastnost normy, kterou je zde těžší dokázat. V příštím textu proto budeme namísto $\mathcal{N}_p(f)$ psát $\|f\|_{L^p(\Omega)}$, nebo stručněji $\|f\|_p$. V tomto zápise má Hölderova nerovnost tvar

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

V dalším budeme $L^p(\Omega)$ vždy vnímat jako normovaný lineární prostor opatřený touto normou.

Poznámka 16.2.5. Pokud $p = q = 2$, Hölderova nerovnost implikuje Cauchy–Schwarzovu nerovnost

$$\Big| \int_\Omega fg \,\mathrm{d}x \Big| \le \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Snadno se zde ověří, že nalevo je uvnitř absolutních hodnot skalární součin (využije se linearita integrálu a vztah mezi nulovostí integrálu a nulovostí integrandu skoro všude).

Hölderova nerovnost má ještě další důsledky.

Tvrzení 16.2.6 (O vnoření Lebesgueových prostorů na množině konečné míry)**.** *Nechť $1 \le r \le p \le \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná a $\lambda_N(\Omega) < \infty$. Jestliže $f \in L^p(\Omega)$, pak $f \in L^r(\Omega)$.*

Důkaz. Budeme se zabývat jen případem $1 \le r < p < \infty$, ostatní případy jsou jednoduché. Díky Hölderově nerovnosti s dvojicí exponentů $\frac{p}{r}$ a $(\frac{p}{r})' = \frac{\frac{p}{r}}{\frac{p}{r}-1} = \frac{p}{p-r}$ máme

$$\begin{aligned}\|f\|_r^r &= \int_\Omega |f|^r \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f|^r 1 \,\mathrm{d}x \le \Big(\int_\Omega |f|^{r\frac{p}{r}} \,\mathrm{d}x \Big)^{\frac{r}{p}} \Big(\int_\Omega 1^{\frac{p}{p-r}} \,\mathrm{d}x \Big)^{\frac{p-r}{p}} \\ &= \lambda_N^{\frac{p-r}{p}}(\Omega) \|f\|_p^r < \infty.\end{aligned}$$

□

Poznámka 16.2.7. (i) Poslední výsledek se dá zapsat také jako $L^p(\Omega) \subset L^r(\Omega)$. (ii) Mezi uvedenými Lebesgueovými prostory obecně neplatí rovnost, jak ukazuje například pro $1 \le r < p < \infty$ funkce $\frac{1}{x^s}$ na $(0,1)$, kde volíme $s \in (0,\infty)$ tak, aby $rs < 1$ a $ps > 1$. Pak máme

$$\int_0^1 \Big(\frac{1}{x^s} \Big)^r \mathrm{d}x < \infty \qquad \text{a} \qquad \int_0^1 \Big(\frac{1}{x^s} \Big)^p \mathrm{d}x = \infty.$$

(iii) Na neomezené množině výsledek z předchozí věty neplatí. Pokud je třeba $1 \le r < p < \infty$, vezměme $s \in (1,\infty)$ tak, aby $rs < 1$ a $ps > 1$. Pak máme

$$\int_1^\infty \Big(\frac{1}{x^s} \Big)^r \mathrm{d}x = \infty \qquad \text{a} \qquad \int_1^\infty \Big(\frac{1}{x^s} \Big)^p \mathrm{d}x < \infty.$$

(iv) Není bez zajímavosti připomenout vztah $\ell_r \subset \ell_p$ pro $r \le p$. Tento výsledek s naší problematikou souvisí, neboť součet řady lze interpretovat jako integrál z po částech konstantní funkce.
(v) Není těžké se přesvědčit, například kombinací bodů (ii) a (iii), že na množinách nekonečné míry není obecně žádný vztah mezi prostory $L^p(\Omega)$ a $L^q(\Omega)$ pro $p \neq q$. K této problematice se ještě vrátíme.

Minulé tvrzení se dá zesílit.

Tvrzení 16.2.8 (O spojitosti normy vzhledem k exponentu)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ splňuje $\lambda_N(\Omega) < \infty$ a $p \in (1,\infty]$. Jestliže $f \in L^p(\Omega)$, pak pro všechna $r \in [1,p)$ platí $f \in L^r(\Omega)$ a $\|f\|_r \le C(\lambda_N(\Omega))\|f\|_p$ (C nezávisí na r).*

Naopak, jestliže $f \in L^r(\Omega)$ pro všechna $r \in [1,p)$ a existuje $C > 0$ takové, že $\|f\|_r \le C$ pro všechna $r \in [1,p)$, pak $f \in L^p(\Omega)$ a $\|f\|_p \le C$ (tatáž konstanta).

Důkaz. Nejprve se zabývejme případem $p = \infty$. Pokud $|f| \le C$ skoro všude na Ω a $r \in [1,\infty)$, pak

$$\|f\|_r \le \left(\int_\Omega C^r\right)^{\frac{1}{r}} = C\lambda_N^{\frac{1}{r}}(\Omega) \le C\max\{1,\lambda_N(\Omega)\}.$$

Druhá část se dokáže sporem. Nechť $\|f\|_r \le C$ pro všechna $r \in [1,\infty)$, existují $\delta > 0$ a $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ kladné míry takové, že $|f| \ge C + \delta$ na $\widetilde{\Omega}$. Pak

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \ge (C+\delta)\lambda_N^{\frac{1}{r}}(\widetilde{\Omega}).$$

Dostáváme spor, neboť pravá strana jde k $C + \delta$ pro r jdoucí k nekonečnu.

Zabývejme se nyní případem $p \in (1,\infty)$. Pokud $r \in [1,p)$, máme díky Hölderově nerovnosti odhad (první nerovnost byla podrobně odvozena v důkazu předešlého tvrzení)

$$\|f\|_r \le \lambda_N^{\frac{p-r}{pr}}(\Omega)\|f\|_p \le \max\{1,\lambda_N(\Omega)\}^{\frac{p-r}{pr}}\|f\|_p \le \max\{1,\lambda_N(\Omega)\}\|f\|_p.$$

Nyní předpokládejme, že $\|f\|_r \le C$ pro všechna $r \in [1,p)$, neboli

$$\int_\Omega |f|^r \,\mathrm{d}x \le C^r.$$

Zvolme libovolnou monotonní posloupnost $\{r_n\} \subset [1,p)$ splňující $r_n \to p$. Pak podle Lebesgueovy věty o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17) máme

$$\int_{\Omega\cap\{|f|\le 1\}} |f|^{r_n} \,\mathrm{d}x \to \int_{\Omega\cap\{|f|\le 1\}} |f|^p \,\mathrm{d}x$$

a podle Lebesgueovy věty o monotonní konvergenci (Věta 15.7.6) zase dostáváme

$$\int_{\Omega\cap\{|f|>1\}} |f|^{r_n} \,\mathrm{d}x \to \int_{\Omega\cap\{|f|>1\}} |f|^p \,\mathrm{d}x.$$

Celkově máme

$$C^p \leftarrow C^{r_n} \ge \int_\Omega |f|^{r_n} \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}x$$

a jsme hotovi. □

V předchozích výsledcích jsme viděli, že vnoření mezi dvojicí Lebesgueových prostorů je zaručeno jen na množině konečné míry. V případě trojice Lebesgueových prostorů se však bez podmínky $\lambda_N(\Omega) < \infty$ obejdeme.

Tvrzení 16.2.9 (O interpolační nerovnosti)**.** *Nechť* $1 \le p \le r \le q \le \infty$ *a* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je měřitelná. Jestliže* $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, *pak* $f \in L^r(\Omega)$. *Dokonce platí*

$$\|f\|_r \le \|f\|_p^{1-\theta} \|f\|_q^{\theta},$$

kde $\theta \in [0,1]$ *splňuje*

$$\theta \begin{cases} = \frac{q}{r}\frac{r-p}{q-p} & \text{pro } p < q < \infty \\ = \frac{r-p}{r} & \text{pro } p < q = \infty \\ \text{je libovolné} & \text{pro } p = q. \end{cases}$$

Důkaz. V případech $p = r = q$, $p = r < q$ a $p < r = q$ je vše zřejmé. Pokud $p < r < q = \infty$, máme

$$\|f\|_r^r = \int_\Omega |f|^r \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f|^p |f|^{r-p} \,\mathrm{d}x \le \int_\Omega |f|^p \|f\|_\infty^{r-p} \,\mathrm{d}x = \|f\|_\infty^{r-p} \int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}x.$$

Odtud

$$\|f\|_r \le \|f\|_\infty^{\frac{r-p}{r}} \|f\|_p^{\frac{p}{r}},$$

což jsme chtěli ukázat.

Zbývá případ $p < r < q < \infty$. V tomto případě použijeme Hölderovu nerovnost s exponentem $s \in (1,\infty)$ na $|f|^r = |f|^\alpha |f|^{r-\alpha}$, kde $\alpha \in (0,r)$. Oba parametry nám na konci výpočtu vyjdou z toho, že chceme, aby se na pravé straně odhadu vyskytovaly mocniny norem $\|f\|_p$ a $\|f\|_q$. Počítejme

$$\|f\|_r^r = \int_\Omega |f|^r \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f|^\alpha |f|^{r-\alpha} \,\mathrm{d}x \le \||f|^\alpha\|_s \||f|^{r-\alpha}\|_{s'} = \|f\|_{\alpha s}^\alpha \|f\|_{(r-\alpha)s'}^{r-\alpha}.$$

Potřebujeme, aby platilo $\alpha s = p$ a $(r-\alpha)s' = \frac{(r-\alpha)s}{s-1} = q$. Z první rovnice si vyjádříme $s = \frac{p}{\alpha}$ a ze druhé postupně dostáváme

$$\frac{(r-\alpha)\frac{p}{\alpha}}{\frac{p}{\alpha}-1} = q \iff \frac{(r-\alpha)p}{p-\alpha} = q \iff (r-\alpha)p = (p-\alpha)q$$
$$\iff \alpha(q-p) = p(q-r) \iff \alpha = p\frac{q-r}{q-p},$$

z čehož plyne

$$\theta = \frac{r-\alpha}{r} = 1 - \frac{p}{r}\frac{q-r}{q-p} = \frac{r}{r}\frac{q-p}{q-p} - \frac{p}{r}\frac{q-r}{q-p} = \frac{1}{r}\frac{rq-pq}{q-p} = \frac{q}{r}\frac{r-p}{q-p}.$$

□

Poznámka 16.2.10. Vztah z předchozího tvrzení lze pro $p < q$ zapsat jako $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{p}$ při standardní konvenci $\frac{\theta}{q} = 0$ pro $q = \infty$.

Hölderova nerovnost se často používá v odhadech řešení diferenciálních rovnic.

Příklad 16.2.11. Předpokládejme, že funkce $y \in C^1([0,1])$ splňuje $y(0) = 0$ a $\|y'\|_2 \leq 1$. Chceme odhadnout $\max_{[0,1]} |y|$ a $\|y\|_2$. Zafixujme $t \in (0,1]$. Pak podle Newtonovy formule a Hölderovy nerovnosti máme

$$
\begin{aligned}
|y(t)| = |y(t) - y(0)| &= \Big| \int_0^t y' \, \mathrm{d}x \Big| \leq \int_0^t |y'| \, \mathrm{d}x \leq \Big(\int_0^t |y'|^2 \, \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^t 1^2 \, \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Big(\int_0^1 |y'|^2 \, \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}} \sqrt{t} \leq \sqrt{t}.
\end{aligned}
$$

Máme tedy $|y(t)| \leq \sqrt{t}$ na $[0,1]$. Proto $\max_{[0,1]} |y| \leq 1$ a

$$
\|y\|_2 = \Big(\int_0^1 y^2 \, \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\int_0^1 x \, \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\Big[\frac{x^2}{2} \Big]_0^1 \Big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}.
$$

Poznamenejme ještě, že Hölderova nerovnost se nedá vylepšit třeba tím, že bychom k pravé straně přidali multiplikativní konstantu, která je menší než jedna. Dokonce platí silnější výsledek.

Přestože se ve znění Hölderovy nerovnosti na levé straně pracuje s normou v $L^1(\Omega)$, Hölderova nerovnost může sloužit k získání odhadů pro normy v $L^p(\Omega)$ i pro $p \in (1, \infty)$.

Příklad 16.2.12. Pokud $f, g \in L^4(\Omega)$, pak lze odhadovat $\|fg\|_2$, neboť máme

$$
\|fg\|_2^2 = \int_\Omega f^2 g^2 \, \mathrm{d}x \leq \Big(\int_\Omega f^4 \, \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega g^4 \, \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_4^2 \|g\|_4^2.
$$

Proto

$$
\|fg\|_2 \leq \|f\|_4 \|g\|_4.
$$

Výsledek předchozího příkladu lze zobecnit.

Cvičení 16.2.13. Nechť Ω je měřitelná, $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$. Potom $fg \in L^r(\Omega)$ a platí

$$
\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.
$$

Dokažte tento výsledek.

Hölderova nerovnost se dá iterovat a díky tomu můžeme odhadovat i normu součinu většího počtu funkcí.

Příklad 16.2.14. Nechť $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, $h \in L^r(\Omega)$, kde $1 \leq p, q, r \leq \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Ukažme, že pak platí

$$
\|fgh\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.
$$

Předně pokud je alespoň jeden exponent, kupříkladu p, roven ∞, problém je nezajímavý, neboť máme snadný odhad

$$
\|fgh\|_1 = \int_\Omega |f||g||h| \, \mathrm{d}x \leq \|f\|_\infty \int_\Omega |g||h| \, \mathrm{d}x
$$

a odhad integrálu na pravé straně prostřednictvím Hölderovy nerovnosti dává dokazovaný výsledek.

Zabývejme se nyní těžším případem $1 < p, q, r < \infty$. Nejprve aplikujeme Hölderovu nerovnost s exponenty p a $p' = \frac{p}{p-1}$ a dostáváme

$$\int_\Omega |f||g||h| \,\mathrm{d}x \le \|f\|_p \Big(\int_\Omega |g|^{p'} |h|^{p'} \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p'}}.$$

Na integrál na pravé straně poslední nerovnosti ještě použijeme Hölderovu nerovnost s exponenty $\frac{q}{p'}$ a $(\frac{q}{p'})'$

$$\Big(\int_\Omega |g|^{p'} |h|^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} \le \bigg(\Big(\int_\Omega |g|^q \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{p'}{q}} \Big(\int_\Omega |h|^{p'(\frac{q}{p'})'} \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{(\frac{q}{p'})'}}\bigg)^{\frac{1}{p'}} = \|g\|_q \|h\|_{p'(\frac{q}{p'})'}.$$

Nyní si stačí už jen povšimnout toho, že

$$p'\Big(\frac{q}{p'}\Big)' = p' \frac{\frac{q}{p'}}{\frac{q}{p'} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{p'} - \frac{1}{q}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}} = \frac{1}{\frac{1}{r}} = r.$$

I tento výsledek lze zobecnit.

Cvičení 16.2.15. Nechť Ω je měřitelná, $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, a nechť $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$. Potom $\prod_{i=1}^n f_i \in L^1(\Omega)$ a platí

$$\Big\| \prod_{i=1}^n f_i \Big\|_1 \le \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}.$$

Dokažte tento výsledek.

Tvrzení 16.2.16 (O nasycenosti Hölderovy nerovnosti)**.** *Nechť $1 \le p \le \infty$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Pak pro každou $f \in L^p(\Omega)$ platí*

$$\|f\|_p = \sup_{\substack{g \in L^{p'}(\Omega) \\ \|g\|_{p'} = 1}} \int_\Omega |fg| \,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Nerovnost „$\ge$“ plyne z Hölderovy nerovnosti. Zajímá nás nerovnost obrácená pro f netriviální. Pokud $p = 1$, stačí položit $g_0 \equiv 1$. Pak máme $\|g_0\|_\infty = 1$ a

$$\int_\Omega |f g_0| \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f \cdot 1| \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}x = \|f\|_1.$$

Pokud $p \in (1, \infty)$, položme $g_0 := \frac{|f|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}}$. Pak máme

$$\|g_0\|_{p'}^{p'} = \int_\Omega \frac{|f|^{(p-1)p'}}{\|f\|_p^{(p-1)p'}} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} \,\mathrm{d}x = 1$$

a

$$\int_\Omega |fg_0|\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{|f|^p}{\|f\|_p^{p-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^{p-1}} = \|f\|_p.$$

Konečně, v případě $p = \infty$ definujme pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ splňující $0 < \lambda_N(E) < \infty$ funkci

$$g_E := \frac{1}{\lambda_N(E)}\chi_E.$$

Pak zřejmě $\|g_E\|_1 = 1$ a máme

$$\sup_{\substack{E\subset\Omega\\0<\lambda_N(E)<\infty}} \int_\Omega |fg_E|\,\mathrm{d}x = \sup_{\substack{E\subset\Omega\\0<\lambda_N(E)<\infty}} \frac{1}{\lambda_N(E)}\int_E |f|\,\mathrm{d}x = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f| = \|f\|_\infty.$$

□

Poznámka 16.2.17. Někdy se v matematice studují také Lebesgueovy prostory pro $p \in (0,1)$, tedy

$$L^p(\Omega) := \Big\{f \text{ měřitelná}\colon \int_\Omega |f|^p\,\mathrm{d}x < \infty\Big\}.$$

Veličina $(\int_\Omega |f|^p\,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}$ však nesplňuje trojúhelníkovou nerovnost (stačí vzít $f := \chi_{(0,1)}$ a $g := \chi_{(1,2)}$). Dá se zde zavést alespoň metrika

$$\varrho(f,g) = \int_\Omega |f-g|^p\,\mathrm{d}x$$

(na rozdíl od standardní lebesgueovské normy neodmocňujeme). Trojúhelníková nerovnost pak za svou platnost vděčí odhadu

$$|x+y|^p \le |x|^p + |y|^p \qquad \text{platnému pro } x,y\in\mathbb{R} \text{ a } p\in(0,1),$$

který plyne z výpočtu (stačí uvažovat $|y| \le |x|$)

$$\begin{aligned}(|x|^p+|y|^p)^{\frac{1}{p}} &= |x|\Big(1+\frac{|y|^p}{|x|^p}\Big)^{\frac{1}{p}} \ge |x|\Big(1+\frac{1}{p}\frac{|y|^p}{|x|^p}\Big) = |x| + \frac{1}{p}|y|^p|x|^{1-p}\\ &\ge |x|+|y| \ge |x+y|,\end{aligned}$$

kde jsme použili Bernoulliho nerovnost $(1+x)^\alpha \ge 1+\alpha x$ pro x a $\alpha \ge 0$.

16.3 Konvergence v Lebesgueových prostorech, úplnost Lebesgueových prostorů

Konvergence v Lebesgueových prostorech je konvergencí v normě, tedy pro $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$ a $f \in L^p(\Omega)$ píšeme, že $f_n \to f$ v $L^p(\Omega)$, jestliže $\|f_n - f\|_p \to 0$. Pro $p = \infty$

je konvergence v $L^p(\Omega)$ velice podobná stejnoměrné konvergenci. Pro $p < \infty$ se konvergence v $L^p(\Omega)$ dá popsat také jako

$$\left(\int_\Omega |f_n - f|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad \text{nebo} \qquad \int_\Omega |f_n - f|^p \,\mathrm{d}x \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

V praxi se často tato konvergence ověřuje tak, že ukážeme konvergenci skoro všude a pak použijeme vhodnou větu o záměně limity a integrálu.

Příklad 16.3.1. Funkce $\{f_n\} := \{\frac{1}{n\sqrt{x}}\}$ patří do $L^p((0,1))$ pro $p \in [1,2)$. Bodově konvergují k nule a navíc pro $p \in [1,2)$ platí $f_n \to 0$ v $L^p((0,1))$, neboť máme

$$\int_0^1 |f_n - f|^p \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{n^p}\frac{1}{x^{\frac{p}{2}}} \,\mathrm{d}x \overset{n\to\infty}{\to} 0,$$

kde jsme mohli použít například Lebesgueovu větu o majorizované konvergenci s majorantou $g := \frac{1}{x^{\frac{p}{2}}}$ nebo spíše vytknout činitel $\frac{1}{n^p}$ před integrál.

Cvičení 16.3.2. Ukažte, že platí

$$f_n \to f \quad \text{v } L^p(\Omega) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_n^+ \to f^+, f_n^- \to f^- \quad \text{v } L^p(\Omega).$$

Další možností ověřování konvergence v $L^p(\Omega)$ je používat důsledky Hölderovy nerovnosti na funkce $f_n - f$. Okamžitě dostáváme

$$\begin{aligned} f_n \to f \text{ v } L^p(\Omega),\ r \le p,\ \lambda_N(\Omega) < \infty \qquad &\Longrightarrow \qquad f_n \to f \text{ v } L^r(\Omega) \\ f_n \to f \text{ v } L^p(\Omega),\ f_n \to f \text{ v } L^q(\Omega),\ p \le r \le q \qquad &\Longrightarrow \qquad f_n \to f \text{ v } L^r(\Omega). \end{aligned}$$

Negativní výsledky o prohazování limity a integrálu ukazují, že bodová konvergence sama o sobě nezaručuje konvergenci v Lebesgueově prostoru $L^p(\Omega)$ pro $p \in [1,\infty)$. Na druhou stranu, není ani podmínkou nutnou, jak ukazuje příklad

$$\{\chi_{[0,1]}, \chi_{[0,\frac{1}{2}]}, \chi_{[\frac{1}{2},1]}, \chi_{[0,\frac{1}{4}]}, \chi_{[\frac{1}{4},\frac{2}{4}]}, \chi_{[\frac{2}{4},\frac{3}{4}]}, \chi_{[\frac{3}{4},\frac{4}{4}]}, \chi_{[0,\frac{1}{8}]}, \dots\}.$$

Uvedená posloupnost konverguje k triviální funkci v $L^p(\Omega)$ pro $p \in [1,\infty)$, ale není pravda, že by konvergovala skoro všude. Druhá část následující věty nám však ukazuje, že mezi konvergencí v $L^p(\Omega)$ a konvergencí skoro všude jistý vztah je.

Věta 16.3.3 (O konvergenci skoro všude a úplnosti Lebesgueových prostorů)**.** *Nechť $1 \le p \le \infty$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Pak Lebesgueův prostor $L^p(\Omega)$ je úplný a každá posloupnost konvergentní v $L^p(\Omega)$ má podposloupnost konvergující skoro všude na Ω.*

Důkaz. Pro $p = \infty$ výsledky okamžitě plynou z toho, že po úpravě funkcí na množině nulové míry dostáváme stejnoměrně konvergentní posloupnost.

Zbývá případ $p < \infty$. Důkaz rozdělíme do dvou kroků.

Krok 1: každá cauchyovská posloupnost v $L^p(\Omega)$ má podposloupnost konvergující skoro všude.

Označme uvažovanou posloupnost $\{f_n\}$. Díky cauchyovskosti můžeme nalézt podposloupnost takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}.$$

Pro všechna $m \in \mathbb{N}$ pak definujme nezáporné funkce

$$g_m := \sum_{k=1}^{m} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \qquad \text{a} \qquad g := \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|.$$

Z Minkowského nerovnosti (Věta 16.2.4) dostáváme indukcí

$$\|g_m\|_p = \Big\|\sum_{k=1}^{m} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|\Big\|_p \le \sum_{k=1}^{m} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \le \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} \le 1.$$

Následně díky Fatouově lemmatu (Lemma 15.7.9) máme

$$\|g\|_p^p = \int_\Omega |g|^p \,\mathrm{d}x \le \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega |g_m|^p \,\mathrm{d}x = \liminf_{m\to\infty} \|g_m\|_p^p \le 1.$$

Speciálně g je konečná skoro všude, neboli řada $\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$ konverguje skoro všude. Proto také konverguje skoro všude na Ω posloupnost funkcí

$$f_{n_m} = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{m-1} \big(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\big),$$

což jsme chtěli dokázat v tomto kroku. Zároveň jsme ještě ukázali, že každá konvergentní posloupnost v $L^p(\Omega)$ má podposloupnost konvergující skoro všude, neboť konvergence implikuje cauchyovskost.

Krok 2: předpokládejme, že máme cauchyovskou posloupnost $\{f_n\}$ v $L^p(\Omega)$, která má s.v. bodově konvergentní podposloupnost $\{f_{n_k}\}$ s limitou f. Ukážeme, že $f \in L^p(\Omega)$ a $\|f_n - f\|_p \to 0$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak díky cauchyovskosti existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n, m \ge n_0$ máme

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

Pokud v předchozí nerovnosti bereme $m = n_k$, kde $k \ge n_0$, a použijeme Fatouovo lemma (Lemma 15.7.9), dostáváme pro libovolné $n \ge n_0$

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_\Omega |f_n - f|^p \,\mathrm{d}x \le \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |f_n - f_{n_k}|^p \,\mathrm{d}x \le \varepsilon^p.$$

Odtud $f = f_n + (f - f_n) \in L^p(\Omega)$ a $\|f_n - f\|_p \to 0$. □

Poznámka 16.3.4. V důkazu byl zajímavý moment, když jsme si přechodem k podposloupnosti zajistili $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \le \frac{1}{2^k}$, což nám umožnilo zkonstruovat pro naši posloupnost majorantu $|f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \in L^p(\Omega)$. Tento trik je občas užitečný.

Cvičení 16.3.5. Doposud jsme si představili následující druhy konvergence posloupnosti funkcí: stejnoměrnou, bodovou, bodovou skoro všude, v prostoru $L^p(\Omega)$ pro nějaké $p \in [1, \infty)$ a v $L^\infty(\Omega)$. Připomeňte si (nebo rozmyslete) vzájemné vztahy těchto konvergencí (rovněž pro omezenou množinu).

16.4 Separabilita L^p pro $p \in [1, \infty)$, husté podmnožiny

V kapitole o metrických prostorech jsme si ukázali, jak se v důkazech využívá hustota množin, které obsahují pouze prvky s hezkými vlastnostmi. Podobný přístup je velmi užitečný i při práci s Lebesgueovými prostory. Zde si k tomu vybudujeme odpovídající teorii.

V celém oddíle se budeme zabývat pouze případem $p \in [1, \infty)$. Budeme navíc používat následující pojem.

Definice 16.4.1 (Nosič funkce)**.** Nechť (X, ϱ) je metrický prostor a $f\colon X \to \mathbb{R}$ je funkce. *Nosičem funkce* f nazýváme (uzavřenou) množinu

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in D_f\colon f(x) \neq 0\}}.$$

Bude se nám také hodit následující pozorování.

Lemma 16.4.2. *Nechť (M, ϱ) je metrický prostor a $M_1 \subset M_2 \subset M$. Jestliže M_1 je hustá v M_2 a M_2 hustá v M, pak M_1 je hustá v M.*

Důkaz. V libovolně malém okolí bodu z M leží nějaký bod z M_2 a v jeho libovolně malém okolí leží nějaký bod z M_1. □

Hlavním výsledkem tohoto oddílu je následující věta.

Věta 16.4.3 (O hustých podmnožinách $L^p(\Omega)$)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná a $p \in [1, \infty)$. Pak v $L^p(\Omega)$ jsou husté následující množiny:*
(i) *množina všech funkcí z $L^p(\Omega)$, které jsou omezené*
(ii) *množina všech funkcí z $L^p(\Omega)$, jejichž nosič je omezenou podmnožinou Ω*
(iii) *množina všech omezených funkcí z $L^p(\Omega)$, jejichž nosič je omezenou podmnožinou Ω*
(iv) *množina všech měřitelných jednoduchých funkcí s omezeným nosičem*
(v) *množina všech měřitelných jednoduchých funkcí s omezeným nosičem, které nabývají jen racionálních hodnot*
(vi) *množina všech měřitelných jednoduchých funkcí s omezeným nosičem, které nabývají jen racionálních hodnot a úrovňové množiny pro nenulové hodnoty jsou po dvou disjunktní otevřené intervaly s racionálními souřadnicemi vrcholů*
(vii) *množina spojitých funkcí s kompaktním nosičem (značí se $C_0(\mathbb{R}^N)$)*
(viii) *je-li Ω navíc otevřená, jsou husté také nekonečněkrát diferencovatelné funkce s kompaktním nosičem obsaženým v Ω (značí se $\mathcal{D}(\Omega)$).*

Důkaz. Při důkazu prvního tvrzení položme pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x) & \text{pokud } |f(x)| \leq n \\ n \operatorname{sign}(f(x)) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak funkce f_n jsou omezené, $f_n \in L^p(\Omega)$ (protože $|f_n|^p \leq |f|^p$). Navíc $f_n \to f$ v $L^p(\Omega)$ díky Lebesgueově větě o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17); majorantou pro $|f_n - f|^p$ je $|f|^p \in L^1(\Omega)$.

Ve druhém tvrzení použijeme funkce $g_n := f\chi_{\Omega\cap B_n(0)}$ a ve třetím funkce $h_n := f_n\chi_{\Omega\cap B_n(0)}$, kde f_n jsou jako v důkazu prvního tvrzení.

Dokažme čtvrté tvrzení. Díky předchozímu lemmatu stačí aproximovat funkce ze třetího tvrzení. K tomu stačí vzít standardně zkonstruované jednoduché funkce aproximující f^+ a f^-, které následně odečteme. Konvergenci v $L^p(\Omega)$ nám dá Lebesgueova věta o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17).

Páté tvrzení získáme ze čtvrtého tak, že na všech úrovňových množinách přepíšeme hodnoty na blízká racionální čísla, o zbytek se postará stejnoměrná konvergence.

Šesté tvrzení dokážeme pomocí pátého. Nechť $s = \sum_{j=1}^m \alpha_j\chi_{A_j}$ je jednoduchá funkce, kde α_j jsou racionální čísla a A_j omezené měřitelné množiny. Nejprve množinu A_1 z vnějšku aproximujeme omezenou otevřenou množinou G_1 tak, aby $\lambda_N(G_1 \setminus A_1) < \varepsilon$. Nyní můžeme psát $G_1 = \bigcup_{k=1}^\infty I_k$, kde I_k jsou otevřené omezené intervaly. Protože

$$\lambda_N(G_1) = \lambda_N\Big(\bigcup_{k=1}^\infty I_k\Big) = \lambda_N(I_1) + \lambda_N(I_2 \setminus I_1) + \lambda_N(I_3 \setminus (I_1 \cup I_2)) + \dots,$$

existuje $l \in \mathbb{N}$ tak velké, že $\lambda_N(G_1 \setminus \bigcup_{k=1}^l I_k) < \varepsilon$. Malým zmenšením získaných intervalů můžeme přejít k intervalům J_k, kde $k \in \{1,\dots,l\}$, takovým, že jejich vrcholy mají racionální souřadnice a platí

$$\lambda_N\Big(G_1 \setminus \bigcup_{k=1}^l J_k\Big) < 2\varepsilon.$$

Protože průnik dvou intervalů je interval, můžeme přejít k obecně většímu počtu po dvou disjunktních otevřených intervalů s racionálními souřadnicemi (při dělení intervalů odstraníme vzniklé stěny, ale ty mají nulovou míru). Celkově máme (necháváme stejné značení)

$$\lambda_N\Big(A_1 \setminus \bigcup_{k=1}^l J_k\Big) < 2\varepsilon \qquad \text{a} \qquad \lambda_N\Big(\bigcup_{k=1}^l J_k \setminus A_1\Big) \le \lambda_N(G_1 \setminus A_1) < \varepsilon.$$

Naši aproximující funkce budeme definovat na všech intervalech J_k, $k = 1,\dots,l$ hodnotou α_1, na zbytku množiny A_1 nulou.

Ve druhém kroku budeme konstruovat otevřenou množinu G_2, která nahradí A_2. Abychom si nezkazili předefinování hodnot z prvního kroku, nejprve vezmeme omezenou otevřenou množinu $\widetilde{G}_2 \supset A_2$ splňující $\lambda_N(\widetilde{G}_2 \setminus A_2) < \varepsilon$ a pak položíme $G_2 = \widetilde{G}_2 \setminus \bigcup_{k=1}^l \overline{J_k}$. Dále pokračujeme jako v předchozím kroku. Celkově má naše konstrukce m kroků a dá se nahlédnout, že se funkční hodnoty změní jen na množině celkové míry $C\varepsilon$, kde C závisí jen na m. Protože navíc funkční hodnoty jsou omezené (jsou konečné a je jich m), L^p-norma rozdílu původní a aproximující funkce bude odhadnuta hodnotou $C\varepsilon^{\frac{1}{p}}$ (ale obecně s jinou hodnotou konstanty C než výše).

Sedmé tvrzení se dokáže z šestého tak, že použijeme analogickou techniku jako v důkazu Věty o aproximaci měřitelných funkcí spojitými funkcemi (Věta 15.5.6).

Podrobněji, funkční hodnoty zachováme na jednotlivých intervalech až na tenký pás na okraji, který použijeme ke spojitému přechodu do nulové hodnoty.

Osmé tvrzení se dokáže pomocí šestého (ovšem je nutné lehce modifikovat konstrukci, aby $\bigcup_{k=1}^{l} \overline{J_k} \subset \Omega$, atd.) podobně jako sedmé, jen funkční hodnoty na krajích intervalů měníme pomocí slepení s C^∞-funkcí. Nejprve si konstrukci vysvětlíme pro $N = 1$. Zde potřebujeme zkonstruovat takovou funkci $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, že pro zadaná $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$\varphi(a) = \varphi'(a) = \varphi''(a) = \cdots = 0, \qquad \varphi'(b) = \varphi''(b) = \cdots = 0 \qquad \text{a} \qquad \varphi(b) > 0.$$

Takové funkce umíme konstruovat pomocí regularizace funkcí, kterou si představíme v další sekci, explicitní konstrukce takové funkce pomocí elementárních funkcí bez použití konvoluce funkcí není jasná.

Ve vyšší dimenzi provedeme výše popsaný postup u jednotlivých intervalů pro každou souřadnici zvlášť a výsledná funkce bude součinem právě zkonstruovaných funkcí. □

Ze šesté části předchozí věty okamžitě dostáváme následující výsledek.

Důsledek 16.4.4. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná a $p \in [1, \infty)$. Pak $L^p(\Omega)$ je separabilní.*

Poznámka 16.4.5. Není těžké nahlédnout, že předchozí výsledky neplatí pro $L^\infty(\Omega)$. K vyvrácení separability stačí uvážit $\Omega = (-1, 1)$ a pro každý otevřený interval $M \subset (-1, 1)$ definovat $f_M := \chi_M$. Pokud $M_1 \neq M_2$, pak $\|f_{M_1} - f_{M_2}\|_\infty = 1$. Uvedených intervalů je nespočetně mnoho, z čehož plyne spor se separabilitou. Skutečně, nechť $\{g_\alpha\}$ je hustá podmnožina $L^\infty(\Omega)$. Pak pro každý interval $M_1 \subset (-1, 1)$ existuje α takové, že $\|f_{M_1} - g_\alpha\|_\infty < \frac{1}{4}$. Díky tomu pro $M_2 \neq M_1$ máme

$$\|f_{M_2} - g_\alpha\|_\infty \geq \|f_{M_1} - f_{M_2}\|_\infty - \|f_{M_1} - g_\alpha\|_\infty > \frac{3}{4}.$$

Odtud $\{g_\alpha\}$ má alespoň tolik prvků, kolik je otevřených podintervalů $(-1, 1)$, a proto nemůže být spočetná.

16.5 Konvoluční zhlazování

Hlavním výsledkem předchozího oddílu byla hustota nekonečněkrát diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem v Lebesgueových prostorech. Zde si představíme konstrukci, která dává alternativní důkaz uvedeného výsledku. Zároveň však tato konstrukce umožňuje získat další odhady, které mají aplikace v teorii parciálních diferenciálních rovnic.

Hladkou funkci zde získáme tak, že původní funkci ve všech bodech nahradíme vhodně zavedeným integrálním průměrem z funkčních hodnot, které funkce nabývá na malém okolí tohoto bodu. Proto v celém oddíle budeme pracovat jen s funkcemi, které jsou definované na celém $\mathbb{R}^N$. V obecném případě stačí funkci dodefinovat nulou vně množiny, na které je definována.

Podrobný popis zmíněné konstrukce vyžaduje několik definic.

Definice 16.5.1 (Regularizátor)**.** Funkce $\omega\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ se nazývá *regularizátor* jestliže splňuje
(i) $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$
(ii) $\omega \geq 0$ a $\operatorname{supp}\omega = \overline{B}_1(0)$
(iii) ω je radiálně symetrická
(iv) $\int_{B_1(0)} \omega \,\mathrm{d}x = 1$.

Příklad 16.5.2. (i) Typickým regularizátorem je funkce

$$\omega(x) = \begin{cases} c_N \mathrm{e}^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{pro } x \in B_1(0) \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde konstanta c_N je zvolena tak, aby platila čtvrtá vlastnost z definice regularizátoru.
(ii) Je-li ω regularizátor a $k \in \mathbb{N}$, pak funkce

$$\omega_k(x) := k^N \omega(kx)$$

má vlastnosti regularizátoru až na to, že $\operatorname{supp}\omega_k = \overline{B}_{\frac{1}{k}}(0)$. Nepřehlédněte zejména, že $\int_{\mathbb{R}^N} \omega_k \,\mathrm{d}x = 1$, což snadno plyne z Věty o substituci (Věta 15.12.1).

Poznámka 16.5.3. V literatuře se obvykle nalezne značení

$$\omega_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^N}\omega\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)$$

a místo limity $k \to \infty$ níže se uvažuje limita $\varepsilon \to 0_+$. Z důvodu snadnější práce s limitou posloupnosti než s limitou ve spojité proměnné dáváme přednost našemu značení.

Protože budeme počítat integrální průměry jen na velmi malých okolích, celý proces bude možné aplikovat na funkce z množiny $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, což je množina měřitelných funkcí f na Ω takových, že pro každé $x \in \mathbb{R}^N$ existuje $\delta_x > 0$ splňující $f \in L^1(\mathcal{U}_{\delta_x}(x))$.

Zřejmě $L^1(\mathbb{R}^N) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, navíc máme například $x^2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Dále díky Borelově pokrývací větě (Věta 11.7.3) pro libovolné $R > 0$ platí $L^1(B_R(0)) \supset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$.

Zhlazenou funkci definujeme pomocí regularizátoru.

Definice 16.5.4 (Zhlazení funkce)**.** Nechť $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, ω je regularizátor na $\mathbb{R}^N$ a $k \in \mathbb{N}$. Pak *zhlazením funkce* f nazýváme funkci

$$f_k(x) := k^N \int_{\mathbb{R}^N} \omega(k(x-y)) f(y) \,\mathrm{d}y.$$

Poznámka 16.5.5. (i) Díky definici funkce ω_k také máme

$$f_k(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \omega_k(x-y) f(y) \,\mathrm{d}y.$$

(ii) Vzorec pro zhlazení bývá zvykem psát ve tvaru $f_k = \omega_k \star f$, kde symbol „$\star$“ zastupuje operaci *konvoluci* definovanou předpisem

$$u \star v(x) := \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)v(y)\,\mathrm{d}y.$$

Ke konvolucím se vrátíme ještě v dalších kapitolách. Nejtypičtější situace je $u, v \in L^1(\mathbb{R}^N)$. V takovém případě si později dokážeme, že $u \star v$ je definována skoro všude a je to funkce z $L^1(\mathbb{R}^N)$.
(iii) Povšimněte si, že platí

$$f_k(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \omega_k(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N} \omega_k(y)f(x-y)\,\mathrm{d}y$$

(v levém integrálu si napište $y = x - z$), neboli $\omega_k \star f = f \star \omega_k$. Tuto komutativitu konvoluce budeme často používat.

Parametr $k \in \mathbb{N}$ v definici zhlazení má tu úlohu, že s jeho zvyšováním zpřesňujeme aproximaci. To si ukážeme níže. Díky hladkosti funkce ω_k a Větě o derivaci integrálu podle parametru (Věta 15.10.3) bude snadné ukázat, že $f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Na druhou stranu odvození aproximačních vlastností funkcí f_k vyžaduje delší přípravu. Nejprve si vyslovíme hlavní výsledek. Pak se budeme věnovat jeho důkazu.

Věta 16.5.6 (O vlastnostech zhlazení funkce)**.** *Nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $k \in \mathbb{N}$ a f_k je zhlazení funkce f. Pak*
(i) $f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$
(ii) *$f_k \to f$ skoro všude na $\mathbb{R}^N$*
(iii) *jestliže $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ pro $p \in [1, \infty]$, pak $\|f_k\|_p \le \|f\|_p$*
(iv) *jestliže $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ pro $p \in [1, \infty)$, pak $f_k \to f$ v $L^p(\mathbb{R}^N)$*
(v) *jestliže $f \in C(\Omega)$ pro $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otevřenou, pak $f_k \rightrightarrows f$ na každém kompaktu $K \subset \Omega$.*

Poznámka 16.5.7. Díky tomu, že funkce můžeme dodefinovávat nulou, aniž bychom změnili normu, tvrzení (iii) a (iv) se vztahují také na prostory $L^p(\Omega)$, pro libovolnou $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ měřitelnou.

Nyní již přistoupíme k přípravným pracem pro důkaz předešlé věty. Především budeme potřebovat novou pokrývací větu.

Věta 16.5.8 (Vitaliho pokrývací lemma)**.** *Nechť $\{B_{r_i}(x_i)\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \subset \mathbb{R}^N$ je konečný systém otevřených koulí. Pak existuje takový jeho disjunktní podsystém $\{B_{r_j}(x_j)\}_{j\in J}$, $J \subset \{1, \dots, n\}$, že*

$$\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} B_{r_i}(x_i) \subset \bigcup_{j\in J} B_{3r_j}(x_j).$$

Důkaz. Můžeme předpokládat, že koule jsou seřazeny sestupně podle velikosti. Podsystém $\{B_{r_j}(x_j)\}_{j\in J}$, $J \subset \{1, \dots, n\}$, vybereme následujícím způsobem. Nejprve položíme $j_1 = 1$ a odstraníme všechny koule, které protínají největší kouli

$B_{r_1}(x_1)$. Dále $j_2 > j_1$ je pořadové číslo druhé největší ze zbývajících koulí. Nyní odstraníme všechny koule, které protínají $B_{r_{j_2}}(x_{j_2})$, a do dalšího kroku pokračujeme se třetí největší koulí ze zbývajících. Takto pokračujeme, dokud nezískáme disjunktní systém. Vlastnost

$$\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} B_{r_i}(x_i) \subset \bigcup_{j\in J} B_{3r_j}(x_j)$$

plyne z toho, že byla-li nějaká koule $B_{r_i}(x_i)$ vyřazena, musí existovat $j \in \{1, \dots, i-1\}$ takové, že $B_{r_j}(x_j)$ je mezi vybranými koulemi a $B_{r_i}(x_i) \cap B_{r_j}(x_j) \neq \emptyset$. Zároveň však máme $r_j \geq r_i$, a proto $B_{r_i}(x_i) \subset B_{3r_j}(x_j)$. □

Dále si představíme pomocný operátor.

Definice 16.5.9 (Hardy–Littlewoodův maximální operátor)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená. Hardy–Littlewoodův maximální operátor je operátor, který funkci $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ přiřadí funkci Mf definovanou předpisem

$$Mf(x) = \sup_{\overline{B}_r(x)\subset\Omega} \frac{1}{\lambda_N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)|\,\mathrm{d}y.$$

Věta 16.5.10 (Hardy–Littlewoodova)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená a $f \in L^1(\Omega)$. Pak pro všechna $t > 0$ platí*

$$\lambda_N(\{x \in \Omega\colon Mf(x) > t\}) \leq \frac{3^N}{t}\|f\|_1.$$

Důkaz. Lze se omezit na případ $\Omega = \mathbb{R}^N$, neboť funkci f můžeme rozšířit nulou a nový maximální operátor se tím může jedině zvětšit, zatímco veličina $\|f\|_1$ zůstává zachována.

Zafixujme $t > 0$ a definujme množinu $G_t := \{x \in \mathbb{R}^N\colon Mf(x) > t\}$. Ta je zřejmě otevřená. Zvolme ještě $K \subset G_t$ kompaktní. Pro každé $z \in K$ existují $x_z \in \mathbb{R}^N$ a $r_z > 0$ taková, že

$$\int_{B_{r_z}(x_z)} |f(y)|\,\mathrm{d}y > t\lambda_N(B_{r_z}(x_z)).$$

Systém $\{B_{r_z}(x_z)\}_{z\in K}$ pokrývá K a lze z něj vybrat konečné podpokrytí, ze kterého lze pomocí Vitaliho pokrývacího lemmatu (Věta 16.5.8) vybrat disjunktní podsystém $\{B_{r_i}(x_i)\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ tak, že $\{B_{3r_i}(x_i)\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ pokrývá K. Proto

$$\begin{aligned} t\lambda_N(K) &\leq t\sum_{i=1}^n \lambda_N(B_{3r_i}(x_i)) = 3^N t\sum_{i=1}^n \lambda_N(B_{r_i}(x_i)) \leq 3^N \sum_{i=1}^n \int_{B_{r_i}(x_i)} |f(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\leq 3^N\|u\|_1. \end{aligned}$$

Nyní stačí přejít k supremu přes $K \subset G_t$ na levé straně předchozí nerovnosti (Lebesgueova míra je zevnitř regulární) a věta je dokázána. □

Poznámka 16.5.11. Všimněme si, že dokonce platí

$$\lambda_N(\{x \in \Omega\colon Mf(x) \geq t\}) \leq \frac{3^N}{t}\|f\|_1.$$

To se snadno dokáže z Hardy–Littlewoodovy věty tak, že na levé a pravé straně nerovnosti nahradíme t výrazem $t - \frac{1}{n}$ a provedeme limitu $n \to \infty$.

Dále nás budou zajímat body, na jejichž malých okolích příliš neosciluje funkční hodnota.

Definice 16.5.12 (Lebesgueův bod)**.** Nechť $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Bod $x \in \mathbb{R}^N$ se nazývá *Lebesgueův bod* fukce f, jestliže

$$\lim_{r\to 0_+} \frac{1}{\lambda_N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| \,\mathrm{d}y = 0.$$

Věta 16.5.13 (O Lebesgueových bodech)**.** *Nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Pak skoro všechny body v $\mathbb{R}^N$ jsou body Lebesgueovými.*

Důkaz. Problém má lokální charakter a proto se stačí zabývat případem $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Pro $\varepsilon > 0$ položme

$$N_\varepsilon := \Big\{x \in \mathbb{R}^N\colon \limsup_{r\to 0_+} \frac{1}{\lambda_N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| \,\mathrm{d}y > 3\varepsilon\Big\}.$$

Naším cílem je ukázat, že $\lambda_N(N_\varepsilon) = 0$, kdykoliv $\varepsilon > 0$. Zafixujme $\varepsilon \in (0,1)$ a dále $\delta \in (0,1)$. Protože spojité funkce jsou husté v $L^1(\mathbb{R}^N)$, můžeme najít takovou spojitou funkci $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, že $\|f - g\|_1 < \delta$. Definujme ještě

$$N_{\varepsilon,\delta} = \{x \in \mathbb{R}^N\colon M(f-g)(x) \geq \varepsilon\} \cup \{x \in \mathbb{R}^N\colon |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Zafixujme nyní $x \notin N_{\varepsilon,\delta}$. Díky spojitosti g můžeme najít $\varrho > 0$ takové, že

$$|g(y) - g(x)| < \varepsilon \qquad \text{pro } |y - x| < \varrho.$$

Pro všechna $r \in (0, \varrho)$ tedy máme (připomeňme $x \notin N_{\varepsilon,\delta}$)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda_N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| \,\mathrm{d}y \\
&\qquad\leq \frac{1}{\lambda_N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} \big(|f(y) - g(y)| + |g(y) - g(x)| + |g(x) - f(x)|\big) \,\mathrm{d}y \\
&\qquad\leq M(f-g)(x) + \varepsilon + \varepsilon \leq 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

a proto $N_\varepsilon \subset N_{\varepsilon,\delta}$.

Zároveň díky Hardy–Littlewoodově větě a poznámce za ní (Věta 16.5.10 a Poznámka 16.5.11) a definici L^1-normy máme

$$\begin{aligned}
\lambda_N(N_{\varepsilon,\delta}) &\leq \lambda_N(\{M(f-g) \geq \varepsilon\}) + \lambda_N(\{|f-g| \geq \varepsilon\}) \\
&\leq \frac{3^N}{\varepsilon}\|f-g\|_1 + \frac{1}{\varepsilon}\|f-g\|_1 = \frac{C\delta}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Celkově proto máme $\lambda_N(N_\varepsilon) \leq \lambda_N(N_{\varepsilon,\delta}) \leq \frac{C\delta}{\varepsilon}$, a protože $\delta > 0$ bylo libovolné, musí platit $\lambda_N(N_\varepsilon) = 0$. $\square$

Aplikací Věty o Lebesgueových bodech (Věta 16.5.13) na charakteristickou funkci lebesgueovsky měřitelné množiny okamžitě dostáváme následující výsledek, který jsme využili v důkazu Věty o substituci (Věta 15.12.1).

Věta 16.5.14 (Lebesgueova věta o hustotě)**.** *Nechť $E \subset \mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelná množina pak skoro každý bod x z množiny E splňuje*

$$\lim_{r\to 0_+} \frac{\lambda_N(B_r(x)) \cap E)}{\lambda_N(B_r(x)))} = 1.$$

Poznámka 16.5.15. (i) Každý bod $x \in \mathbb{R}^N$ splňující rovnost na konci předchozí věty se nazývá *bod hustoty* množiny E.
(ii) Bod hustoty nemusí do uvedené množiny patřit, kupříkladu vyjmeme-li z $\mathbb{R}^2$ osový kříž, stále jsou body hustoty naší množiny všechny body z $\mathbb{R}^2$.

Důkaz Věty o vlastnostech zhlazení funkce (Věta 16.5.6). První vlastnost je založena na Větě o derivaci integrálu podle parametru (Věta 15.10.3). Ukažme si podrobně, jak se získá $\frac{\partial f_k}{\partial x_1}$. Ostatní parciální derivace prvního řádu se získají analogicky a parciální derivace vyššího řádu indukcí.

Předně $f_k(x)$ je definováno pro každé $x \in \mathbb{R}^N$, neboť díky tomu, že spojitá funkce ω_k je na kompaktu $\operatorname{supp} \omega_k = \overline{B_{\frac{1}{k}}(0)}$ omezená, máme

$$|\omega_k(x-y)f(y)| \le \max_{B_{\frac{1}{k}}(0)} \omega_k \chi_{\overline{B_{\frac{1}{k}}(x)}}(y)|f(y)| = C\chi_{\overline{B_{\frac{1}{k}}(x)}}(y)|f(y)| \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Podobně při konstrukci majoranty pro parciální derivaci využijeme odhad

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1}(\omega_k(x-y)f(y))\right| = \left|\frac{\partial \omega_k}{\partial x_1}(x-y)f(y)\right| \le \max_{B_{\frac{1}{k}}(0)} \left|\frac{\partial \omega_k}{\partial x_1}\right| \chi_{\overline{B_2(x)}}(y)|f(y)| \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

(pokud derivujeme podle první proměnné v bodě $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, potřebujeme zkonstruovat univerzální majorantu pro všechny body $(x_1 + t, x_2, \ldots, x_N)$, kde t probíhá interval $(-\delta, \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$; naše konstrukce majoranty připouští třeba $\delta \le 1$, neboť máme odhad na kouli $\overline{B_2(x)}$). Věta o derivaci integrálu podle parametru (Věta 15.10.3) nám následně dává

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_1}(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Druhá vlastnost plyne z toho, že podle Věty o Lebesgueových bodech (Věta 16.5.13) jsou skoro všechny body $\mathbb{R}^N$ body Lebesgueovými a pro ně máme (využíváme také vlastnost konvoluce $\omega_k \star f = f \star \omega_k$)

$$\begin{aligned}|f_k(x) - f(x)| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^N} \omega_k(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y - f(x)\int_{\mathbb{R}^N} \omega_k(x-y)\,\mathrm{d}y\Big| \\ &= \Big|\int_{B_{\frac{1}{k}}(x)} \omega_k(x-y)(f(y)-f(x))\,\mathrm{d}y\Big| \\ &\le \max_{\mathbb{R}^N} \omega_k \int_{B_{\frac{1}{k}}(x)} |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y \\ &= C_1 k^N \int_{B_{\frac{1}{k}}(x)} |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{C_2}{\lambda_N(B_{\frac{1}{k}}(x))} \int_{B_{\frac{1}{k}}(x)} |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y \overset{k\to\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

Protože spojitost implikuje stejnoměrnou spojitost na kompaktech, z posledního odhadu také plyne páté tvrzení (je-li K kompakt, pro který máme dokázat náš výsledek, stejnoměrnou spojitost použijeme na o něco větší kompaktní množině $\{z \in \Omega\colon\ \mathrm{dist}(z,K) \le \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(K, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)\}$).

Dále je snadný důkaz třetí vlastnosti pro $p = \infty$, neboť máme pro každé $x \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}|f_k(x)| = \Big|\int_{\mathbb{R}^N} \omega_k(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y\Big| &\le \int_{\mathbb{R}^N} \omega_k(x-y)|f(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\le \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \omega_k(x-y)\,\mathrm{d}y = \|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Pro $p = 1$ máme díky Fubiniho větě (Větě 15.11.2; měřitelnost funkce $(x,y) \mapsto \omega_k(x-y)f(y)$ zdůvodníme pomocí měřitelnosti součinu dvou měřitelných funkcí)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |f_k(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^N}\Big|\int_{\mathbb{R}^N} \omega_k(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y\Big|\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \omega_k(x-y)|f(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \omega_k(x-y)\,\mathrm{d}x|f(y)|\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|\,\mathrm{d}y = \|f\|_1.\end{aligned}$$

Pro $p \in (1,\infty)$ použijeme Hölderovu nerovnost

$$\begin{aligned}|f_k(x)| = \Big|\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\omega_k(y)\,\mathrm{d}y\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\omega_k^{\frac{1}{p}}(y)\omega_k^{\frac{1}{p'}}(y)\,\mathrm{d}y\Big| \\ &\le \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p\omega_k(y)\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{\mathbb{R}^N} \omega_k(y)\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p\omega_k(y)\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

a získaný odhad nám spolu s Fubiniho větou (Věta 15.11.2) dává

$$\begin{aligned}\|f_k\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |f_k(x)|^p\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p\omega_k(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p\,\mathrm{d}x\,\omega_k(y)\,\mathrm{d}y = \|f\|_p^p\int_{\mathbb{R}^N} \omega_k(y)\,\mathrm{d}y = \|f\|_p^p.\end{aligned}$$

Měřitelnost funkce $|f(x-y)|^p\omega_k(y)$ se odůvodní stejně jako výše.

Zbývá už jen dokázat čtvrtou vlastnost. Nechť $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ a $\varepsilon > 0$. Víme, že omezené funkce s omezeným nosičem jsou husté v $L^p(\mathbb{R}^N)$. Nechť tedy g je omezená funkce, $\operatorname{supp} g \subset \overline{B_R(0)}$ pro jisté $R > 0$ a $\|f-g\|_p < \varepsilon$. Pak máme

$$\|f_k - f\|_p = \|\omega_k \star f - f\|_p \leq \|\omega_k \star f - \omega_k \star g\|_p + \|\omega_k \star g - g\|_p + \|g - f\|_p.$$

Uspokojivý odhad třetího členu pravé strany máme z konstrukce funkce g. Navíc díky již dokázané třetí vlastnosti umíme odhadnout i člen první

$$\|\omega_k \star f - \omega_k \star g\|_p = \|\omega_k \star (f-g)\|_p \leq \|f-g\|_p < \varepsilon.$$

Konečně, na druhý člen použijeme druhou vlastnost spolu s pátou vlastností. Tedy $\omega_k \star g \to g$ s.v. na $B_R(0)$, $\|\omega_k \star g\|_\infty \leq \|g\|_\infty$, $\operatorname{supp}\omega_k \star g \subset B_{R+1}(0)$, tedy podle Lebesgueovy věty o dominantní konvergenci (Věta 15.8.17) je také tento člen odhadnutý ε pro k dostatečně velké. □

16.6 Dodatek: spojitost v průměru

Existuje ještě jedna možnost, jak dokázat vlastnost (iv) z Věty o vlastnostech zhlazení funkce (Věta 16.5.6). Nepotřebuje vlastnost (ii), tedy konvergenci s.v. posloupnosti $\omega_k \star k$, ale používá jednu hlubší vlastnost funkcí z L^p-prostoru pro $p \in [1,\infty)$, tak zvanou spojitost v průměru. Její důkaz je založen na Luzinově větě (Věta 15.5.9).

Věta 16.6.1 (Spojitost v průměru)**.** *Nechť $1 \leq p < \infty$, Ω je lebesgueovsky měřitelná a $f \in L^p(\Omega)$. Potom pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$, $|\mathbf{h}| < \delta$ je*

$$\int_\Omega |\widetilde{f}(x+\mathbf{h}) - f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \varepsilon^p,$$

kde $\widetilde{f}$ označuje funkci, která je na Ω rovna f a vně Ω je nulová.

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Díky vlastnosti (ii) z Věty o hustých podmnožinách $L^p(\Omega)$ (Věta 16.4.3) existuje $R > 0$ takové, že

$$\int_{\Omega\setminus B_R(0)} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \varepsilon^p, \qquad \int_{\Omega\setminus B_R(0)} |\widetilde{f}(x+\mathbf{h})|^p \, \mathrm{d}x < \varepsilon^p,$$

kde $|\mathbf{h}| \leq 1$ a $\widetilde{f}$ je prodloužení funkce f nulou vně Ω. (Toto je zajímavé jen pro případ funkcí s neomezeným nosičem.) Dále díky Větě o absolutní spojitosti Lebesgueova integrálu (Věta 15.8.13) existuje $\delta_1 > 0$ takové, že pro $\lambda_N(E) < \delta$ je

$$\int_E |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \varepsilon^p, \qquad \int_E |\widetilde{f}(x+\mathbf{h})|^p \, \mathrm{d}x < \varepsilon^p.$$

Nyní použijeme Luzinovu větu (Věta 15.5.9). Ta spolu s Větou o vnější a vnitřní regularitě Lebesgueovy vnější míry (Věta 15.3.18) říká, že k číslu $\delta_1 > 0$ existuje kompaktní množina $C \subset \Omega \cap B_R(0)$ tak, že $\lambda_N(\Omega \cap B_R(0) \setminus C) < \frac{\delta_1}{2}$ a funkce f zúžená na C je stejnoměrně spojitá na C vzhledem k C. Tedy existuje $\delta \leq \min\{1, \delta_1\}$ tak, že pro $|\mathbf{h}| < \delta$ je

$$|\widetilde{f}(x + \mathbf{h}) - f(x)| < \frac{1}{\lambda_N(\Omega \cap B_R(0))} \varepsilon^p$$

a současně

$$\lambda_N(\{x \in \Omega \cap B_R(0)\colon\ x, x + \mathbf{h} \notin C\}) < \delta_1.$$

Proto

$$\begin{aligned}
\Big(\int_\Omega |\widetilde{f}(x + \mathbf{h}) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} &\leq \Big(\int_{\Omega \setminus B_R(0)} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \Big(\int_{\Omega \setminus B_R(0)} |\widetilde{f}(x + \mathbf{h})|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_C |\widetilde{f}(x + \mathbf{h}) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \Big(\int_{\Omega \cap B_R(0) \setminus C} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_{\Omega \cap B_R(0) \setminus C} |\widetilde{f}(x + \mathbf{h})|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} < 5\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Tuto větu potom můžeme použít k důkazu vlastnosti (iv) z Věty o vlastnostech zhlazení funkce (Věta 16.5.6) následovně. Počítáme

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |f_k(x) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big| \int_{B_{\frac{1}{k}}(0)} \omega_k(x - y)(f(y) - f(x)) \,\mathrm{d}y \Big|^p \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \Big| \int_{B_1(0)} \omega(z)\big(f\big(x - \tfrac{1}{k} z\big) - f(x)\big) \,\mathrm{d}z \Big|^p \,\mathrm{d}x \\
&\leq C(N, \omega) \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\int_{B_1(0)} \big|f\big(x - \tfrac{1}{k} z\big) - f(x)\big|^p \,\mathrm{d}z \Big) \,\mathrm{d}x \\
&= C(N, \omega) \int_{B_1(0)} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \big|f\big(x - \tfrac{1}{k} z\big) - f(x)\big|^p \,\mathrm{d}x \Big) \,\mathrm{d}z \to 0
\end{aligned}$$

pro $k \to \infty$ díky Větě o spojitosti v průměru (Věta 16.6.1). Při výpočtu výše jsme použili k získání druhé rovnosti substituci $k(x - y) = z$, následující odhad je důsledkem Hölderovy nerovnosti a poslední rovnost plyne z Fubiniho věty (Věta 15.11.2).

16.7 Dodatek: chování L^p-normy při limitním přechodu

Je vhodné si připomenout jeden ze základních výsledků teorie metrických prostorů, podle kterého je norma spojitá (Věta 11.2.12). Proto vždy máme

$$f_n \to f \quad \text{v } L^p(\Omega) \qquad \Longrightarrow \qquad \|f_n\|_p \to \|f\|_p.$$

Pro poněkud slabší konvergenci skoro všude a $p \in [1, \infty)$ z Fatouova lemmatu (Lemma 15.7.9) plyne slabší výsledek

$$f_n \to f \quad \text{skoro všude v } \Omega \qquad \Longrightarrow \qquad \|f\|_p \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p.$$

Ten se nedá zesílit, jak ukazují příklady typu $\{f_n\} := \{n\chi_{(0,\frac{1}{n})}\}$, v nichž se při limitním přechodu (odpovídajícím konvergenci skoro všude) norma skutečně zmenší.

Předpokládáme-li konvergenci skoro všude, konvergenční chování normy s konvergencí v $L^p(\Omega)$ souvisí dokonce velice úzce, jak nám ukazuje následující výsledek (ještě názorněji to bude vidět z jeho důsledku, který je uveden níže).

Lemma 16.7.1 (Brezis–Liebovo)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná množina, $p \in [1, \infty)$ a $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$ je posloupnost splňující $f_n \to f$ skoro všude v Ω a $\|f_n\|_p \le C$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a jisté $C > 0$. Pak*

$$\|f_n\|_p^p - \|f_n - f\|_p^p \to \|f\|_p^p.$$

Důkaz. Budeme postupovat ve třech krocích. Nejprve si ve dvou krocích odvodíme vhodnou pomocnou nerovnost pro dvojici reálných čísel, pak použijeme nástroje z teorie Lebesgueova integrálu.

Krok 1: Důkaz nerovnosti $(\alpha + \beta)^p - \alpha^p \le \varepsilon\alpha^p + C_\varepsilon\beta^p$ platné pro $\alpha, \beta \ge 0$. Ukážeme, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dostatečně velká konstanta $C_\varepsilon > 0$ taková, že platí uvedená nerovnost. Nejprve si povšimněme, že pro $\alpha = 0$ je nerovnost splněna pro libovolné $C_\varepsilon \ge 1$. V dalším se proto zabývejme už jen případem $\alpha > 0$. Zde můžeme definovat $t := \frac{\beta}{\alpha} \ge 0$ a naše původní nerovnost plyne z nerovnosti (píšeme $\beta = t\alpha$ a pak nerovnost podělíme α^p)

$$(1 + t)^p - 1 \le \varepsilon + C_\varepsilon t^p,$$

kterou nyní dokážeme. Případ $t \ge 1$ vede na odhad levé strany

$$(1 + t)^p - 1 \le (t + t)^p - 0 = 2^p t^p.$$

Zde nám tedy postačí, když bude platit $C_\varepsilon \ge 2^p$. Dále protože funkce $t \mapsto (1 + t)^p - 1$ je spojitá a nulová v počátku, musí existovat $\delta \in (0, 1)$ takové, že

$$(1 + t)^p - 1 \le \varepsilon \qquad \text{na } [0, \delta].$$

Naopak, na intervalu $[\delta, 1]$ je funkce $t \mapsto (1 + t)^p - 1$ omezená a funkce $t \mapsto t^p$ kladná a odražená od nuly. Musí proto existovat $C_\varepsilon \ge 2^p$ takové, že platí

$$(1 + t)^p - 1 \le C_\varepsilon t^p \qquad \text{na } [\delta, 1].$$

Tím je naše pomocná nerovnost dokázána.

Krok 2: Důkaz nerovnosti $||a|^p - |a - b|^p| \le \varepsilon|a - b|^p + C_\varepsilon|b|^p$ platné pro $a, b \in \mathbb{R}$. Dokážeme, že tato nerovnost platí pro libovolné $\varepsilon > 0$ a jemu odpovídající konstantou $C_\varepsilon \ge 2^p$ z předchozí nerovnosti. Rozlišujeme několik případů. Pokud $a = 0$, nerovnost platí triviálně. Pokud $a > 0$ a $b \ge 2a$, máme

$$||a|^p - |a - b|^p| = |b - a|^p - |a|^p \le |b - a|^p \le |b|^p.$$

Pokud $a > 0$ a $b \in [a, 2a]$, platí

$$||a|^p - |a-b|^p| = |a|^p - |a-b|^p \leq |a|^p \leq |b|^p.$$

Pokud $a > 0$ a $b \in [0, a]$, použijeme volbu $\alpha := a - b$, $\beta := b$, která vše převede na nerovnost z prvního kroku. Pokud $a > 0$ a $b \leq 0$, tentokrát položíme $\alpha := a$ a $\beta := -b$. Zbývá si povšimnout, že pokud platí nerovnost pro dvojici a, b, platí také pro dvojici $-a, -b$, čímž jsme vyřešili všechny případy s $a < 0$.

Krok 3: Hlavní část důkazu.
Zafixujme $\varepsilon > 0$ a definujme pomocné funkce

$$W_n := \left(\Big||f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p\Big| - \varepsilon|f_n - f|^p\right)^+.$$

Pak $W_n \to 0$ skoro všude na Ω a navíc díky trojúhelníkové nerovnosti a nerovnosti z druhého kroku máme pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} W_n &\leq \left(\Big||f_n|^p - |f_n - f|^p\Big| + |f|^p - \varepsilon|f_n - f|^p\right)^+ \\ &\leq \left(\varepsilon|f_n - f|^p + C_\varepsilon|f|^p + |f|^p - \varepsilon|f_n - f|^p\right)^+ = C_\varepsilon|f|^p + |f|^p \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Můžeme proto použít Lebesgueovu větu o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17) a dostáváme

$$\int_\Omega W_n \,\mathrm{d}x \to 0.$$

Díky tomu máme (využíváme také, že Fatouovo lemma, tedy Lemma 15.7.9, dává $\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}x \leq C^p$)

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \Big||f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p\Big| \,\mathrm{d}x \leq \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega (W_n + \varepsilon|f_n - f|^p) \,\mathrm{d}x \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega (W_n + \varepsilon 2^p(|f_n|^p + |f|^p)) \,\mathrm{d}x \leq \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega W_n \,\mathrm{d}x + 2^p C^p \varepsilon + 2^p C^p \varepsilon \\ &= 0 + 2^p C^p \varepsilon + 2^p C^p \varepsilon = 2^{p+1} C^p \varepsilon. \end{aligned}$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, jsme hotovi. □

Z Brezis–Liebova lemmatu (Lemma 16.7.1) okamžitě dostáváme následující kritérium konvergence v $L^p(\Omega)$.

Důsledek 16.7.2. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná množina, $p \in [1, \infty)$, $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$ je posloupnost splňující $f_n \to f$ skoro všude v Ω a $\|f_n\|_p \leq C$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a jisté $C > 0$. Nechť dále $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$. Pak $f_n \to f$ v $L^p(\Omega)$.*

Poznámka 16.7.3. Připomeňme, že konvergence v $L^p(\Omega)$ zaručuje konvergenci norem, omezenost norem a po přechodu k podposloupnosti také bodovou konvergenci. Podmínky z předchozího důsledku proto konvergenci v $L^p(\Omega)$ poměrně přesně vystihují.

V některých případech můžeme využít i jiné výsledky než Brezis–Liebovo lemma (Lemma 16.7.1). Kupříkladu Fatouovo lemma (Lemma 15.7.9) v kombinaci s Vitaliho větou o stejně integrovatelných funkcích (Věta 15.14.4) dává následující výsledek.

Tvrzení 16.7.4. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná množina, $\lambda_N(\Omega) < \infty$, $1 \le p < q \le \infty$, $\{f_n\} \subset L^q(\Omega)$ je posloupnost splňující $f_n \to f$ skoro všude v Ω a $\|f_n\|_q \le C$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a jisté $C > 0$. Pak $f_n \to f$ v $L^p(\Omega)$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $q < \infty$ (odůvodněte si sami jako snadné cvičení). Z Fatouova lemmatu (Lemma 15.7.9) plyne $\|f\|_q \le C$, a proto f je konečná skoro všude na Ω. Nyní stačí použít Vitaliho větu o stejně integrovatelných funkcích (Věta 15.14.4) na funkci $|f_n - f|^p$, pokud se nám podaří ověřit předpoklady této věty.

Jediným netriviálním předpokladem k ověření je stejná integrovatelnost funkcí $|f - f_n|^p$. Nechť $\varepsilon > 0$. Vezměme $\delta < \left(\frac{\varepsilon^p}{(2C)^p}\right)^{\frac{q}{q-p}}$. Pro každou množinu $E \subset \Omega$ splňující $\lambda_N(E) < \delta$ máme

$$\int_E |f_n - f|^p \,\mathrm{d}x \le \Big(\int_E |f_n - f|^q \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{p}{q}} \big(\lambda_N(E)\big)^{1-\frac{p}{q}} < (2C)^p \delta^{\frac{q-p}{q}} < \varepsilon^p$$

a jsme hotovi. □

Poznámka 16.7.5. Předpoklad $\|f_n\|_q \le C$ není možné nahradit předpokladem $\|f_n\|_p \le C$ (neboli stejnoměrný odhad musí skutečně platit v přísnější normě), jak ukazuje příklad posloupnosti

$$\{f_n\} := \Big\{n^{\frac{1}{p}} \chi_{(0,\frac{1}{n})}\Big\}.$$

Někdy stačí použít jen Tvrzení o interpolační nerovnosti (Tvrzení 16.2.9).

Příklad 16.7.6. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná množina, $\lambda_N(\Omega) < \infty$, $1 \le r < q \le \infty$, $f_n \to f$ v $L^1(\Omega)$ a $\|f_n\|_q \le C$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a jisté $C > 0$. Ukažme, že $f_n \to f$ v $L^r(\Omega)$.

Pomocí Fatouova lemmatu (Lemma 15.7.9) snadno ukážeme, že $f \in L^q(\Omega)$. Dále nám Tvrzení o interpolační nerovnosti (Tvrzení 16.2.9) zaručuje, že

$$\|f_n - f\|_r \le \|f_n - f\|_1^{1-\theta} \|f_n - f\|_q^{\theta},$$

přičemž $\theta = \frac{q(r-1)}{r(q-1)} < 1$. Protože druhý činitel napravo je stejnoměrně omezený, jde levá strana pro $n \to \infty$ k nule. Poznamenejme na závěr, že v tomto příkladu jsme ve srovnání s případy studovanými výše nahradili předpoklad o bodové konvergenci s.v. předpokladem o konvergenci v $L^1(\Omega)$.

Kapitola 17

Klasická teorie křivkového a plošného integrálu

Cílem této kapitoly je naučit se integrovat přes objekty, které leží v $\mathbb{R}^N$, ale jejich dimenze je menší (typicky se bude jednat o křivky a plochy). Teorie z předchozích kapitol používající Lebesgueův integrál vzhledem k Lebesgueově N-rozměrné míře λ_N nám zde žádný užitečný výsledek nepřináší, neboť zkoumané objekty mají nulovou Lebesgueovu míru. Naše další snažení se dá přibližně popsat tak, že se naše objekty pokusíme narovnat, pak umístit do $\mathbb{R}^k$, kde $1 \leq k < N$, a zde použít integraci vůči míře λ_k. Nejprve se budeme zabývat případem $k = 1$, jemuž odpovídají křivky, a pak případem $1 < k < N$, jemuž odpovídají (zobecněné) plochy.

17.1 Klasická teorie křivkového integrálu

Inspirací pro naši teorii budou následující dva problémy.

(i) Známe rozložení jisté veličiny podél zadané křivky a máme spočítat celkové množství veličiny na uvedené křivce (například máme zadanou lineární hustotu drátu a zajímá nás jeho hmotnost).

Tento problém vede na takzvaný *křivkový integrál prvního druhu*, u něhož nezáleží na tom, v jakém směru při integraci křivkou procházíme.

(ii) Máme spočítat práci při pohybu v silovém poli.

Tento problém, kdy práci vykonává jen tečná složka (vzhledem ke směru pohybu) silového pole, vede na takzvaný *křivkový integrál druhého druhu*, u něhož již není rozhodující jen tvar integrační dráhy (ten někdy dokonce nehraje vůbec žádnou roli a rozhoduje jen poloha koncových bodů), ale záleží zejména na směru, kterým křivkou procházíme (změna směru se projeví změnou znaménka integrálu).

17.1.1 Křivky v $\mathbb{R}^N$

Definice 17.1.1 (Křivky)**.** Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. *Křivkou třídy* C^1 v $\mathbb{R}^N$ nazýváme zobrazení $\boldsymbol{\varphi} \in C^1(I;\mathbb{R}^N)$ (v případě, že v I leží některý z jeho krajních bodů, jako obvykle v něm uvažujeme jen jednostrannou derivaci, která musí být vlastní). *Křivkou po částech třídy* C^1 v $\mathbb{R}^N$ nazýváme zobrazení $\boldsymbol{\varphi}\colon I \to \mathbb{R}^N$, pro které existuje $n \in \mathbb{N}$ a intervaly $I_1, \ldots, I_n$ takové, že $\boldsymbol{\varphi}|_{I_j}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, jsou křivky třídy C^1, $I = \bigcup_{j=1}^n I_j$, vnitřky těchto intervalů jsou disjunktní a sousední intervaly obsahují příslušný dělící bod. Je-li $\boldsymbol{\varphi}$ křivkou po částech třídy C^1 v $\mathbb{R}^N$, říkáme, že je *regulární*, jestliže platí

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) := (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \ldots, \varphi_N'(t)) \neq \mathbf{0} \qquad \text{na } I$$

(v případě krajních bodů a výše citovaných dělících bodů bereme jen jednostranné derivace).

Množina $\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle := \boldsymbol{\varphi}(I)$ se nazývá *geometrický obraz křivky* $\boldsymbol{\varphi}$. Pokud existuje $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ (tentokrát už jako oboustranná derivace), pak se tento vektor nazývá *tečný vektor* ke křivce $\boldsymbol{\varphi}$ v bodě $\boldsymbol{\varphi}(t)$ a $\boldsymbol{\tau}(t) := \frac{\boldsymbol{\varphi}'(t)}{|\boldsymbol{\varphi}'(t)|}$ (pokud $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ existuje a je netriviální) se nazývá *jednotkový tečný vektor*.

Poznámka 17.1.2. (i) Často se místo termínu „křivka třídy C^1“ říká „C^1-křivka“. Podobně se říká „po částech C^1-křivka“.
(ii) Po částech C^1-křivka je vždy spojitá a dílčí intervaly jsou uzavřené s výjimkou intervalů krajních v případě, že I není uzavřený.
(iii) Typickým příkladem C^1-křivky je graf C^1-funkce (zobrazení $t \mapsto (t, f(t))$).
(iv) Pokud C^1-křivka není regulární, může mít poměrně „ošklivý“ obraz. Kupříkladu

$$\boldsymbol{\varphi}(t) := \begin{cases} (-t^2, t^2) & \text{pro } t \in (-\infty, 0] \\ (t^2, t^2) & \text{pro } t \in [0, \infty) \end{cases}$$

je C^1-křivka, jejíž obraz má zlom (obraz je stejný jako graf funkce $t \mapsto |t|$). Tento obraz odpovídá po částech C^1-křivce.
(v) Protože derivace je limitou derivačních podílů, tečný vektor je limitou sečných vektorů (po jejich vhodném „protažení“).
(vi) Požadavek na existenci oboustranné derivace v definici tečného vektoru brání tomu, aby po částech C^1-křivka měla v dělících bodech dvojici různých tečných vektorů.

Představme si ještě další důležité typy křivek.

Definice 17.1.3 (Jednoduchá a uzavřená křivka)**.** Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $\boldsymbol{\varphi} \in C(I;\mathbb{R}^N)$ je křivka. Řekneme, že $\boldsymbol{\varphi}$ je *jednoduchá*, jestliže platí alespoň jedna z podmínek
(i) $\boldsymbol{\varphi}$ je prostá na I
(ii) $I = [a, b]$ a $\boldsymbol{\varphi}$ je prostá na $[a, b)$ a na $(a, b]$
a $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$ je spojitá na obrazu intervalu (a, b).

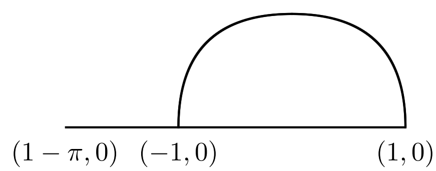
Řekneme, že $\boldsymbol{\varphi}$ je *uzavřená*, jestliže $I = [a, b]$ a $\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\varphi}(b)$. Řekneme, že $\boldsymbol{\varphi}$ je *Jordanova křivka*, jestliže je jednoduchá a uzavřená.

Poznámka 17.1.4. Jednoduchá křivka je prostá (tj. zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ je prosté) s jedinou možnou výjimkou $\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\varphi}(b)$.

Příklad 17.1.5. (i) Definujme křivku $\boldsymbol{\varphi}\colon (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ předpisem

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{cases} (t+1, 0) & \text{pro } t \in (-\pi, 0] \\ (\cos t, \sin t) & \text{pro } t \in [0, \pi). \end{cases}$$

Pro představu je $\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle$ znázorněno na obrázku.



Obrázek 17.1: Obraz křivky φ z Příkladu 17.1.5

Křivka $\boldsymbol{\varphi}$ je spojitá, je třídy C^1 na intervalech $(-\pi, 0]$ a $[0, \pi)$. Proto se jedná o po částech C^1-křivku. Na intervalu $(-\pi, 0)$ máme tečný vektor $\boldsymbol{\varphi}'(t) = (1, 0)$ a na intervalu $(0, \pi)$ máme tečný vektor $\boldsymbol{\varphi}'(t) = (-\sin t, \cos t)$. V bodě $t = 0$ tečný vektor neexistuje (liší se jednostranné derivace). Křivka $\boldsymbol{\varphi}$ je regulární (problémy může dělat jen $t = 0$, ale zde jsou jednostranné derivace $(1, 0)$ a $(0, 1)$). Křivka $\boldsymbol{\varphi}$ je prostá. Není však jednoduchá, protože v obraze se v okolí bodu $(-1, 0)$ jednak vyskytují obrazy intervalů tvaru $(\pi - \delta, \pi)$ a také obrazy intervalů $(-2-\delta, -2+\delta)$.

(ii) Definujme křivku $\boldsymbol{\psi}\colon [-2, \pi] \to \mathbb{R}^2$ předpisem

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \begin{cases} (t+1, 0) & \text{pro } t \in [-2, 0] \\ (\cos t, \sin t) & \text{pro } t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Jako v minulém případě se jedná o regulární C^1-křivku. Zřejmě je tato křivka uzavřená. Její prostota je porušena pouze dvojicí koncových bodů intervalu $t_1 = -2$ a $t_2 = \pi$. Navíc ψ^{-1} je spojité ve všech bodech, které jsou obrazem intervalu $(-2, \pi)$ (v obraze se jako problematický jeví bod $(-1, 0)$, ale v něm definice jednoduché křivky nepožaduje spojitost zobrazení ψ^{-1}). Proto je $\boldsymbol{\psi}$ jednoduchá křivka. Dokonce je to křivka Jordanova.

Protože budeme v dalším často pracovat s křivkami zúženými na intervaly, zaveďme značení křivky zvýrazňující její definiční obor $(\boldsymbol{\varphi}, I)$. Pro budování další teorie bude užitečné slepování křivek a obíhání zadané křivky v opačném směru.

Definice 17.1.6 (Součet křivek, křivka opačná)**.** Nechť $(\boldsymbol{\varphi}, I)$ a $(\boldsymbol{\psi}, J)$ jsou křivky v $\mathbb{R}^N$. Nechť $-\infty \le a_1 \le b_1 < \infty$, $-\infty < a_2 \le b_2 \le \infty$, $I = (a_1, b_1]$, nebo

$I = [a_1, b_1]$, $J = [a_2, b_2)$ nebo $J = [a_2, b_2]$ a $\boldsymbol{\varphi}(b_1) = \boldsymbol{\psi}(a_2)$. Pak definujeme *součet křivek* $\boldsymbol{\varphi} \oplus \boldsymbol{\psi}$ předpisem

$$(\boldsymbol{\varphi} \oplus \boldsymbol{\psi})(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\varphi}(t) & \text{pro } t \in I \\ \boldsymbol{\psi}(t - b_1 + a_2) & \text{pro } t \in K \setminus I, \end{cases}$$

kde interval K je dán vzorcem $K = I \cup (J - a_2 + b_1)$ (interval J jsme posunuli, aby navazoval na I, tedy $J - a_2 + b_1 = [b_1, b_2 - a_2 + b_1)$ respektive $J - a_2 + b_1 = [b_1, b_2 - a_2 + b_1])$.

Opačnou křivkou ke křivce $(\boldsymbol{\varphi}, I)$ nazýváme křivku $(\ominus\boldsymbol{\varphi}, -I)$ danou předpisem

$$\ominus\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(-t) \qquad \text{pro } t \in -I.$$

Povšimněte si, že pro regulární po částech C^1-křivky je výsledkem právě zadefinovaných operací opět regulární po částech C^1-křivka.

17.1.2 Křivkový integrál prvního a druhého druhu

Definice 17.1.7 (Křivkový integrál prvního a druhého druhu)**.** Nechť $(\boldsymbol{\varphi}, I)$ je regulární po částech C^1-křivka v $\mathbb{R}^N$. Jestliže $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná na $\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle$, pak *křivkový integrál prvního druhu* zavádíme předpisem

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} f \,\mathrm{d}s := \int_I f(\boldsymbol{\varphi}(t)) \|\boldsymbol{\varphi}'(t)\| \,\mathrm{d}t, \qquad \text{kde } \|\boldsymbol{\varphi}'(t)\| := \sqrt{{\varphi_1'}^2(t) + \cdots + {\varphi_N'}^2(t)},$$

pokud integrál na pravé straně existuje jako Lebesgueův a je konečný.

Jestliže $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je vektorové pole definované na $\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle$, pak *křivkový integrál druhého druhu* zavádíme předpisem

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} := \int_I \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t) \,\mathrm{d}t$$

(v integrandu napravo je pro každé $t \in I$ skalární součin dvou vektorů v $\mathbb{R}^N$), pokud integrál na pravé straně existuje jako Lebesgueův a je konečný.

Poznámka 17.1.8. (i) Připomeňme, že pro C^1-křivky jsme si už v kapitole o Riemannovu integrálu představili $\int_{\boldsymbol{\varphi}} 1 \,\mathrm{d}s$ jako délku křivky.
(ii) Připomeňme, že $\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|$ je eukleidovská norma vektoru $\boldsymbol{\varphi}'(t)$. V kapitole věnované metrickým prostorům jsme ji značili $\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|_2$.

Poznámka 17.1.9. Pro křivkový integrál druhého druhu se často používá značení ($\boldsymbol{F} = (F_1, \ldots, F_N)$)

$$\int_{\varphi} F_1 \,\mathrm{d}x_1 + F_2 \,\mathrm{d}x_2 + \cdots + F_N \,\mathrm{d}x_N,$$

které je motivováno rozepsáním pravé strany z definičního vztahu pomocí jednotlivých složek

$$\int_I \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t) \,\mathrm{d}t = \int_I \big(F_1(\varphi(t))\varphi_1'(t) + \cdots + F_N(\varphi(t))\varphi_N'(t)\big) \,\mathrm{d}t.$$

Příklad 17.1.10. (i) Spočítejme $I := \int_{\boldsymbol{\varphi}} (x^2 + y)\,\mathrm{d}s$ pro křivku $\boldsymbol{\varphi}(t) := (1,1) + t(-1,1)$, kde $t \in [0,1]$. Podle definice máme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \big((1-t)^2 + (1+t)\big)\sqrt{(-1)^2 + 1^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^1 (2 - t + t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}\Big(2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big) = \frac{11\sqrt{2}}{6}. \end{aligned}$$

(ii) Spočítejme $J := \int_{\boldsymbol{\varphi}} (x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y)$ pro křivku $\varphi(t) := (\cos t, \sin t)$, kde $t \in [0,\pi]$. Podle definice máme

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\pi (\cos t, -\sin t)\cdot(-\sin t, \cos t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^\pi 2\cos t \sin t\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^\pi \sin(2t)\,\mathrm{d}t = -\Big[-\frac{1}{2}\cos(2t)\Big]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

17.1.3 Základní vlastnosti křivkového integrálu

Oba typy křivkového integrálu jsou vybudovány na Lebesgueově integrálu, a proto se u nich projevují jeho vlastnosti. Zde si uvedeme seznam nejdůležitějších vlastností, které nám mohou usnadnit práci.

Z linearity Lebesgueova integrálu okamžitě dostáváme následující výsledek.

Věta 17.1.11 (Linearita křivkového integrálu)**.** *Nechť* $\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ *je křivka,* $f, g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *a* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Pak*

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}s = \alpha\int_{\boldsymbol{\varphi}} f\,\mathrm{d}s + \beta\int_{\boldsymbol{\varphi}} g\,\mathrm{d}s,$$

jestliže existují oba křivkové integrály prvního druhu na pravé straně. Analogicky pro křivkový integrál druhého druhu.

Věta 17.1.12 (O integrálu přes součet křivek)**.** *Nechť* $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ *jsou křivky, je definováno* $\boldsymbol{\varphi} \oplus \boldsymbol{\psi}$ *a* $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. *Pak*

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}\oplus\boldsymbol{\psi}} f\,\mathrm{d}s = \int_{\boldsymbol{\varphi}} f\,\mathrm{d}s + \int_{\boldsymbol{\psi}} f\,\mathrm{d}s,$$

jestliže existují oba křivkové integrály prvního druhu na pravé straně. Analogicky pro křivkový integrál druhého druhu.

Další výsledek získáme z Věty o substituci pro Riemannův integrál (Věta 7.5.23).

Věta 17.1.13 (O substituci pro křivkový integrál)**.** *Nechť* $(\boldsymbol{\varphi}, [a,b])$ *je regulární* C^1*-křivka v* $\mathbb{R}^N$, $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *má na* $[\alpha,\beta]$ *nenulovou spojitou derivaci a* $\eta([\alpha,\beta]) = [a,b]$. *Pak* $(\boldsymbol{\varphi}\circ\eta, [\alpha,\beta])$ *je regulární* C^1*-křivka v* $\mathbb{R}^N$ *a pro každou funkci* $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, *jejíž restrikce na* $\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle$ *je spojitá na* $\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle$, *platí*

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}\circ\eta} f\,\mathrm{d}s = \int_{\boldsymbol{\varphi}} f\,\mathrm{d}s.$$

V případě křivkového integrálu druhého druhu platí (znaménko η' je ve všech bodech intervalu $[\alpha, \beta]$ stejné, proto můžeme níže vybrat kterýkoliv z těchto bodů)

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}\circ\eta} \mathbf{F} \cdot \, \mathrm{d}(\boldsymbol{\varphi} \circ \eta) = \operatorname{sign}(\eta'(\tfrac{\alpha+\beta}{2})) \int_{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{F} \cdot \, \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}.$$

Důkaz. Označme $\boldsymbol{\gamma} := \boldsymbol{\varphi} \circ \eta$. Pak

$$\|\boldsymbol{\gamma}'(\tau)\| = \|\boldsymbol{\varphi}'(\eta(\tau))\eta'(\tau)\| = \|\boldsymbol{\varphi}'(\eta(\tau))\||\eta'(\tau)| \qquad \text{pro } \tau \in (\alpha, \beta).$$

Snadno se nahlédne, že máme splněny předpoklady Věty o substituci pro Riemannův integrál (Věta 7.5.23) a dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{\gamma}} f \, \mathrm{d}s &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\boldsymbol{\gamma}(\tau))\|\boldsymbol{\gamma}'(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau = \int_{\alpha}^{\beta} f(\boldsymbol{\varphi}(\eta(\tau)))\|\boldsymbol{\varphi}'(\eta(\tau))\||\eta'(\tau)| \, \mathrm{d}\tau \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} f(\boldsymbol{\varphi}(\eta(\tau)))\|\boldsymbol{\varphi}'(\eta(\tau))\|\eta'(\tau) \operatorname{sign}(\eta'(\tau)) \, \mathrm{d}\tau \\
&= \operatorname{sign}(\eta'(\tfrac{\alpha+\beta}{2})) \int_{\alpha}^{\beta} f(\boldsymbol{\varphi}(\eta(\tau)))\|\boldsymbol{\varphi}'(\eta(\tau))\|\eta'(\tau) \, \mathrm{d}\tau \\
&= \operatorname{sign}(\eta'(\tfrac{\alpha+\beta}{2})) \int_{\eta^{-1}(\alpha)}^{\eta^{-1}(\beta)} f(\boldsymbol{\varphi}(t))\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\| \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{a}^{b} f(\boldsymbol{\varphi}(t))\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_{\boldsymbol{\varphi}} f \, \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

V případě křivkového integrálu druhého druhu má závěrečný výpočet tvar

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{F} \cdot \, \mathrm{d}\boldsymbol{\gamma} &= \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(\tau)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(\tau) \, \mathrm{d}\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}(\eta(\tau))) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(\eta(\tau))\eta'(\tau) \, \mathrm{d}\tau \\
&= \int_{\eta^{-1}(\alpha)}^{\eta^{-1}(\beta)} \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t) \, \mathrm{d}t = \operatorname{sign}(\eta'(\tfrac{\alpha+\beta}{2})) \int_{a}^{b} \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \operatorname{sign}(\eta'(\tfrac{\alpha+\beta}{2})) \int_{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{F} \cdot \, \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}.
\end{aligned}$$

□

Poznámka 17.1.14. Z minulé věty okamžitě plyne, že při přechodu k opačné křivce se křivkový integrál prvního druhu nemění a u křivkového integrálu druhého druhu se změní znaménko.

Věta 17.1.15 (O nezávislosti křivkového integrálu na parametrizaci)**.** *Nechť křivky $(\boldsymbol{\varphi}, [a, b])$ a $(\boldsymbol{\psi}, [\alpha, \beta])$ jsou jednoduché regulární po částech C^1-křivky na $\mathbb{R}^N$ splňující $\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle = \langle\boldsymbol{\psi}\rangle$ a $f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je funkce, jejíž restrikce na $\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle$ je spojitá na $\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle$. Pak*

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} f \, \mathrm{d}s = \int_{\boldsymbol{\psi}} f \, \mathrm{d}s.$$

V případě křivkového integrálu druhého druhu platí

$$\Big|\int_{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}\Big| = \Big|\int_{\boldsymbol{\psi}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\psi}\Big|.$$

Důkaz. Nejprve si všimněme, že díky našim předpokladům všechny integrály existují. Důkaz získáme za pomoci Věty o substituci pro křivkový integrál (Věta 17.1.13). Budeme postupovat ve dvou krocích. Nejprve si ukážeme, jak se postupuje v případě jednoduchých regulárních C^1-křivek, které nejsou uzavřené. Pak si ukážeme jak se na tento případ převede případ obecný prostřednictvím rozřezání zadaných křivek.

Krok 1: speciální případ.
Předpokládejme, že zadané křivky $(\boldsymbol{\varphi}, [a,b])$ a $(\boldsymbol{\psi}, [\alpha,\beta])$ jsou jednoduché regulární C^1-křivky, které nejsou uzavřené, a navíc

$$\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\psi}(\alpha) \text{ a } \boldsymbol{\varphi}(b) = \boldsymbol{\psi}(\beta) \qquad \text{nebo} \qquad \boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\psi}(\beta) \text{ a } \boldsymbol{\varphi}(b) = \boldsymbol{\psi}(\alpha). \tag{17.1.1}$$

Potřebujeme zkonstruovat funkci $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi} \circ \eta$ a jsou splněny předpoklady předchozí věty.

Protože $\boldsymbol{\varphi}$ je prostá na $[a,b]$, má inverzní funkci $\varphi^{-1}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definovanou na $\langle \boldsymbol{\varphi}\rangle$. Můžeme proto definovat $\eta = \varphi^{-1} \circ \boldsymbol{\psi}$ na $[\alpha,\beta]$. Potřebujeme ještě ukázat, že $\eta \in C^1([\alpha,\beta])$ a má zde nenulovou derivaci.

Zvolme $x_0 \in (\alpha,\beta)$, označme $y_0 = \eta(x_0) \in (a,b)$ (uvnitř intervalu jsme díky tomu, že pracujeme s jednoduchými křivkami a máme (17.1.1)). Protože φ je regulární křivka, existuje $j \in \{1,\dots,N\}$ takové, že $\psi_j'(y_0) \neq 0$. Definujme nyní pomocnou funkci

$$H(x,y) = \varphi_j(y) - \psi_j(x) \qquad \text{na } (a,b)\times(\alpha,\beta).$$

Snadno se ověří, že na okolí bodu $[x_0,y_0]$ můžeme použít Větu o implicitní funkci (Věta 12.4.13; podmínka $H_y(x_0,y_0) \neq 0$ je zaručena naší volbou j). Dostáváme funkci $x \mapsto y(x)$ definovanou a diferencovatelnou na jistém okolí bodu x_0. Díky jednoznačnosti této funkce plynoucí z Věty o implicitní funkci se na uvedeném okolí získaná funkce shoduje s funkcí η. Ta je díky tomu na okolí bodu x_0 diferencovatelná a

$$\eta'(x_0) = -\frac{H_x(x_0,y_0)}{H_y(x_0,y_0)} = -\frac{\psi_j'(x_0)}{\varphi_j'(y_0)}.$$

Díky právě dokázané existenci $\eta'(x_0)$ můžeme psát

$$\boldsymbol{\psi}'(x_0) = \boldsymbol{\varphi}'(\eta(x_0))\eta'(x_0),$$

odkud vidíme, že $\eta'(x_0) \neq 0$.

Zbývá dokázat existenci a nenulovost jednostranných derivací funkce η na krajích intervalu. Zde si můžeme pomoci třeba tak, že křivky $(\boldsymbol{\varphi}, [a,b])$ a $(\boldsymbol{\psi}, [\alpha,\beta])$ rozšíříme na intervaly $(a-\delta, b+\delta)$ respektive $(\alpha-\delta,\beta+\delta)$ liše vůči krajním bodům (využíváme principu, že je-li $g \in C^1([0,\infty))$, pak po dodefinování hodnotou $-g(|x|)$ na záporné reálné poloose dostáváme $C^1(\mathbb{R})$-funkci). Pak už je $[x_0,y_0]$ vnitřním bodem definičního oboru funkce H a můžeme postupovat jako výše.

Nyní máme ověřeny všechny předpoklady Věty o substituci pro křivkový integrál (Věta 17.1.13), a proto dostáváme dokazovanou integrální rovnost pro křivkový integrál prvního druhu. Analogicky postupujeme pro křivkový integrál druhého druhu.

Krok 2: rozřezání křivek v obecném případě.
Rozřežme si interval $[\alpha,\beta]$ na konečný počet podintervalů, kde hraniční body zkonstruujeme tak, že vezmeme všechny dělící body z definice po částech C^1-křivky $(\boldsymbol{\psi},[\alpha,\beta])$, přidáme libovolné dva různé body z intervalu $[\alpha,\beta]$ (tím se jistíme proti tomu, že minulá část konstrukce nám mohla dát pouze krajní body a pak bychom uzavřenou křivku nerozřezali na křivky, které nejsou uzavřené) a body odpovídající dělícím bodům křivky $(\boldsymbol{\varphi},[a,b])$ (využíváme $\langle\boldsymbol{\psi}\rangle = \langle\boldsymbol{\varphi}\rangle$). Získali jsme tedy body

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_m = \beta$$

takové, že $\boldsymbol{\psi}$ je třídy C^1 na $[\alpha_j,\alpha_{j+1}]$ pro všechna $j \in \{0,1,\ldots,m-1\}$ a dílčí křivky nejsou uzavřené.

Zafixujme nyní $j \in \{0,1,\ldots,m-1\}$ a ukažme, že do bodů množiny

$$M := \{\boldsymbol{\psi}(t) \colon t \in (\alpha_j,\alpha_{j+1})\}$$

se zobrazí nějaký otevřený podinterval intervalu $[a,b]$. Nejprve si povšimněme, že interval (α_j,α_{j+1}) neobsahuje bod, jehož obrazem by byl bod $\boldsymbol{\varphi}(a)$ nebo $\boldsymbol{\varphi}(b)$. Proto je na (α_j,α_{j+1}) dobře definováno zobrazení $\eta := \varphi^{-1}\circ\boldsymbol{\psi}$, je spojité a prosté (křivky $\boldsymbol{\varphi}$ a $\boldsymbol{\psi}$ jsou jednoduché). Označme

$$a_j := \inf_{t\in(\alpha_j,\alpha_{j+1})} \varphi^{-1}\circ\boldsymbol{\psi}(t) \qquad \text{a} \qquad a_{j+1} := \sup_{t\in(\alpha_j,\alpha_{j+1})} \varphi^{-1}\circ\boldsymbol{\psi}(t).$$

Pomocí Darbouxovy věty o nabývání mezihodnot (Věta 6.2.1) snadno nahlédneme, že

$$(a_j,a_{j+1}) \subset (\varphi^{-1}\circ\boldsymbol{\psi})((\alpha_j,\alpha_{j+1})).$$

Výše dokonce musí platit rovnost, neboť pokud by pro nějaké $t \in (\alpha_j,\alpha_{j+1})$ kupříkladu platilo $(\varphi^{-1}\circ\psi)(t) = a_j$, pak by díky Darbouxově větě o nabývání mezihodnot obě množiny

$$(\varphi^{-1}\circ\boldsymbol{\psi})\Big(\Big[\frac{\alpha_j+t}{2},t\Big]\Big) \qquad \text{a} \qquad (\varphi^{-1}\circ\boldsymbol{\psi})\Big(\Big[t,\frac{t+\alpha_{j+1}}{2}\Big]\Big)$$

obsahovaly nějaké pravé okolí bodu a_j a to by bylo ve sporu s prostotou funkce $\varphi^{-1}\circ\boldsymbol{\psi}$.

Dále ukažme, že

$$\boldsymbol{\varphi}(a_j) = \boldsymbol{\psi}(\alpha_j) \text{ a } \boldsymbol{\varphi}(a_{j+1}) = \boldsymbol{\psi}(\alpha_{j+1}) \text{ nebo } \boldsymbol{\varphi}(a_j) = \boldsymbol{\psi}(\alpha_{j+1}) \text{ a } \boldsymbol{\varphi}(a_{j+1}) = \boldsymbol{\psi}(\alpha_j). \tag{17.1.2}$$

Předně nemůže platit $\boldsymbol{\varphi}(a_j) = \boldsymbol{\varphi}(a_{j+1})$, neboť toto může nastat jen jako $\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\varphi}(b)$ a my jsme interval $[a,b]$ rozdělili minimálně na dva podintervaly. Dále spojité zobrazení ψ zobrazuje kompaktní interval $[\alpha_j,\alpha_{j+1}]$ na kompakt v $\mathbb{R}^N$. Zároveň už také víme, že

$$\boldsymbol{\psi}([\alpha_j,\alpha_{j+1}]) = M \cup \{\boldsymbol{\psi}(\alpha_j),\boldsymbol{\psi}(\alpha_{j+1})\}.$$

Na druhou stranu i $\boldsymbol{\varphi}$ je spojité, a proto zobrazuje a_j a a_{j+1} do $\overline{M}$. Protože $\overline{M}$ je nejmenší uzavřenou množinou obsahující M, musí díky kompaktnosti $M \cup \{\boldsymbol{\psi}(\alpha_j), \boldsymbol{\psi}(\alpha_{j+1})\}$ platit

$$\overline{M} \subset M \cup \{\boldsymbol{\psi}(\alpha_j), \boldsymbol{\psi}(\alpha_{j+1})\},$$

a protože díky prostotě $\boldsymbol{\varphi}$ máme $\boldsymbol{\varphi}(a_j), \boldsymbol{\varphi}(a_{j+1}) \notin M$, celkově dostáváme

$$\{\boldsymbol{\varphi}(a_j), \boldsymbol{\varphi}(a_{j+1})\} \subset \overline{M} \setminus M \subset (M \cup \{\boldsymbol{\psi}(\alpha_j), \boldsymbol{\psi}(\alpha_{j+1})\}) \setminus M \subset \{\boldsymbol{\psi}(\alpha_j), \boldsymbol{\psi}(\alpha_{j+1})\}$$

a máme (17.1.2).

Teď už si stačí jen uvědomit, že $\boldsymbol{\varphi}$ je C^1-křivka na $[a_j, a_{j+1}]$ (od začátku víme, že se jedná o po částech C^1-křivku na $[a_j, a_{j+1}]$, a teď jsme zjistili, že v intervalu (a_j, a_{j+1}) není žádný dělící bod). Navíc $\{[a_j, a_{j+1}]\}_{j=0}^{m-1}$ je pokrytí intervalu $[a, b]$, které má po dvou disjunktní vnitřky (disjunktnost vnitřků je jasná, pokrytí hraničních bodů bylo uděláno v důkazu (17.1.2)). $\square$

17.1.4 Křivkový integrál a potenciálnost vektorového pole

V minulém díle skript jsme si představili pojem *potenciál* a zkoumali jeho základní vlastnosti. Nyní uvidíme, že existence potenciálu může značně urychlit výpočet křivkových integrálů druhého druhu. Připomeňme, že to, co budeme dělat, je dobře známé studentům, kteří v rámci mechaniky hmotného bodu studovali pohyb v konzervativním poli.

Věta 17.1.16 (O výpočtu křivkového integrálu pomocí potenciálu)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\mathbf{T} \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$ má na Ω potenciál U. Pak pro každou regulární po částech C^1-křivku $(\boldsymbol{\varphi}, [a, b])$ splňující $\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle \subset \Omega$ platí*

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{T} \cdot \, \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = U(\boldsymbol{\varphi}(b)) - U(\boldsymbol{\varphi}(a)).$$

Důkaz. Podle řetízkového pravidla a definice potenciálu máme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(\boldsymbol{\varphi}(t)) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial x_i}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \varphi_i'(t) = \sum_{i=1}^{N} T_i(\boldsymbol{\varphi}(t)) \varphi_i'(t) = \mathbf{T}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t).$$

Pokud $\boldsymbol{\varphi}$ je C^1-křivka, dostáváme z Newtonovy formule a předchozího výpočtu

$$U(\boldsymbol{\varphi}(b)) - U(\boldsymbol{\varphi}(a)) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(\boldsymbol{\varphi}(t)) \, \mathrm{d}t = \int_a^b \mathbf{T}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t) \, \mathrm{d}t = \int_{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{T} \cdot \, \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}.$$

Pokud je $\boldsymbol{\varphi}$ jen po částech C^1-křivka, předchozí postup aplikujeme na jednotlivých intervalech, kde $\boldsymbol{\varphi}$ je C^1-křivka, a výsledné vzorce vysčítáme. Přitom se díky spojitosti potenciálu a zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ odečtou příspěvky ve vnitřních dělících bodech. $\square$

Z poslední věty plyne, že pro dvě regulární po částech C^1-křivky, jejichž obrazy leží v Ω a mají stejné počáteční a koncové body, získáme integrací potenciálního pole totéž. Pro uzavřenou regulární po částech C^1-křivku pak získáme integrací nulu.

To nás vede k následující definici.

Definice 17.1.17 (Nezávislost integrálu na cestě)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\boldsymbol{T} \in C(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Řekneme, že křivkový integrál druhého druhu z pole $\boldsymbol{T}$ *nezávisí na cestě* v Ω, jestliže

$$\int_\varphi \mathbf{T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = \int_{\boldsymbol{\psi}} \boldsymbol{T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\psi},$$

kdykoliv $(\boldsymbol{\varphi},[a,b]),(\boldsymbol{\psi},[\alpha,\beta])$ jsou regulární po částech C^1-křivky takové, že platí $\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle,\langle\boldsymbol{\psi}\rangle \subset \Omega$, $\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\psi}(\alpha)$ a $\boldsymbol{\varphi}(b) = \boldsymbol{\psi}(\beta)$.

Věta 17.1.18 (O charakterizaci nezávislosti na cestě)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\mathbf{T} \in C(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.*
(i) *křivkový integrál druhého druhu z pole $\mathbf{T}$ nezávisí na cestě v Ω*
(ii) *křivkový integrál druhého druhu z pole $\boldsymbol{T}$ je nulový pro každou uzavřenou regulární po částech C^1-křivku ležící v Ω.*

Důkaz. Pokud platí (ii) a křivky $\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}$ jsou jako v předchozí definici, stačí vzít křivku $\boldsymbol{\varphi} \oplus (\ominus\boldsymbol{\psi})$ a uvědomit si, že je uzavřená. Pokud naopak platí (i) a $\boldsymbol{\varphi}$ je uzavřená regulární po částech C^1-křivka v Ω, pak

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} \boldsymbol{T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = \int_{\boldsymbol{\varphi}\oplus\boldsymbol{\varphi}} \boldsymbol{T} \cdot \mathrm{d}(\boldsymbol{\varphi} \oplus \boldsymbol{\varphi}) = 2\int_{\boldsymbol{\varphi}} \boldsymbol{T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$$

(levá rovnost využívá (i) a pravá definici symbolu $\oplus$). Odtud plyne $\int_{\boldsymbol{\varphi}} \boldsymbol{T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = 0$. □

Nezávislost na cestě je dokonce postačující podmínkou pro existenci potenciálu.

Věta 17.1.19 (O vztahu nezávislosti na cestě a existence potenciálu)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená souvislá množina a $\boldsymbol{T} \in C(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Jestliže křivkový integrál druhého druhu z pole $\boldsymbol{T}$ nezávisí na cestě v Ω, pak $\boldsymbol{T}$ má v Ω potenciál.*

Důkaz. Zafixujme bod $x_0 \in \Omega$. Pro každý jiný bod $x \in \Omega$ pak díky souvislosti Ω (Definice 12.3.2) existuje lomená čára s konečným počtem segmentů konečné délky, která leží v Ω. Tu můžeme parametrizovat třeba tak, každý její bod bude odpovídat vzdálenosti, kterou urazíme po naší lomené čáře mezi uvedeným bodem a bodem x_0. Takto zparametrizovanou lomenou čáru označme $(\boldsymbol{\varphi}_x,[0,l_x])$. Definujme ještě funkci

$$U(x) := \int_{\boldsymbol{\varphi}_x} \boldsymbol{T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_x \qquad \text{pro všechna } x \in \Omega.$$

Díky nezávislosti na cestě je tato definice jednoznačná pro všechna $x \in \Omega$. Ověřme, že U je skutečně potenciálem pole $\boldsymbol{T}$ v Ω. Zvolme $x \in \Omega$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $\mathcal{U}_\delta(x) \subset \Omega$. Zafixujme ještě $i \in \{0,\dots,N\}$. Definujme křivku $\boldsymbol{\psi}(s) := x + s\mathbf{e}_i$ pro $s \in [0,\delta)$. Pro každé $t \in (0,\delta)$ pak platí (nezávislosti na cestě vděčíme za třetí z následujících rovností)

$$\begin{aligned}
\frac{U(x+t\mathbf{e}_i)-U(x)}{t} &= \frac{1}{t}\Big(\int_{\boldsymbol{\varphi}_{x+t\mathbf{e}_i}} \boldsymbol{T}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_{x+t\mathbf{e}_i} - \int_{\boldsymbol{\varphi}_x} \boldsymbol{T}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_x\Big)\\
&= \frac{1}{t}\int_{(\ominus\boldsymbol{\varphi}_x)\oplus\boldsymbol{\varphi}_{x+t\mathbf{e}_i}} \boldsymbol{T}\cdot\,\mathrm{d}((\ominus\boldsymbol{\varphi}_x)\oplus\boldsymbol{\varphi}_{x+t\mathbf{e}_i})\\
&= \frac{1}{t}\int_{\boldsymbol{\psi}} \boldsymbol{T}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\psi} = \frac{1}{t}\int_0^t \boldsymbol{T}(x+s\mathbf{e}_i)\cdot\mathbf{e}_i\,\mathrm{d}s\\
&= \frac{1}{t}\int_0^t T_i(x+s\mathbf{e}_i)\,\mathrm{d}s \overset{t\to 0}{\to} T_i(x).
\end{aligned}$$

Analogicky pracujeme s $t \in (-\delta, 0)$. □

Poznámka 17.1.20. (i) Pokud má Ω více komponent, můžeme proces popsaný v důkazu provést na jednotlivých komponentách.
(ii) Z důkazu předchozí věty je vidět, že k tomu, aby pole bylo v dané otevřené množině potenciální, stačí ověřit, že křivkový integrál druhého druhu daného pole nezávisí na cestě v dané množině pouze pro křivky tvořené lomenými čarami. Toto pozorování bude hrát důležitou roli na konci této kapitoly.
(iii) Pokud je Ω navíc konvexní, nezávislost na cestě je ekvivalentní tomu, ze je nulový křivkový integrál druhého druhu přes obvod každého trojúhelníka ležícího v Ω. Jedna implikace je triviální, u druhé je třeba si uvědomit, že v případě konvexní množiny můžeme libovolné body v Ω spojovat s ostatními body pomocí úseček ležících v Ω. Fixujme tedy bod $x_0 \in \Omega$ a definujme funkci $U(x)$ jako ve Větě o vztahu nezávislosti na cestě a existence potenciálu (Věta 17.1.19) s tím rozdílem, že místo libovolné křivky volíme úsečku spojující body x_0 a x. Je potřeba ukázat, že $\nabla U = \boldsymbol{T}$ v Ω, což dokážeme stejně jako v důkazu věty zmíněné výše. Je ale nutné si uvědomit, že hodnota $U(x + t\mathbf{e}_i)$ se dá také spočítat pomocí integrálu přes úsečky z x_0 do x a z x do $x + t\mathbf{e}_i$. To je důsledkem toho, že integrál přes libovolný trojúhelník je nulový. Nezávislost integrálu na cestě přes libovolnou křivku pak plyne z Věty o výpočtu křivkového integrálu pomocí potenciálu (Věta 17.1.16). Také toto pozorování bude hrát důležitou roli na konci této kapitoly.

Příklad 17.1.21. (i) Nechť $(\boldsymbol{\varphi}, [a, b])$ je křivka na $\mathbb{R}^2$ splňující $\boldsymbol{\varphi}(a) = (A_1, A_2)$ a $\boldsymbol{\varphi}(b) = (B_1, B_2)$. Spočítejme křivkový integrál druhého druhu $I := \int_{\boldsymbol{\varphi}} x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$. Ze zadání vidíme, že se jedná o integraci pole $\boldsymbol{T}(x, y) = (x, y)$. Snadno se nalezne potenciál $U(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ (aditivní konstantou se zabývat nemusíme, protože se v závěrečném výpočtu vyruší). Odtud

$$I = U(B_1, B_2) - U(A_1, A_2) = \frac{1}{2}(B_1^2 + B_2^2 - A_1^2 - A_2^2).$$

(ii) Když jsme se zabývali potenciálem vektorového pole v kapitole o funkcích více proměnných, představili jsme si vektorové pole

$$\boldsymbol{T}(x, y) = \Big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\Big).$$

Toto pole splňuje $\boldsymbol{T} \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}; \mathbb{R}^2)$ a ukázali jsme si o něm, že nemá potenciál na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Nyní máme k dispozici novou metodu důkazu této vlastnosti. Zvolme uzavřenou regulární C^1-křivku

$$\boldsymbol{\varphi}(t) := (\cos t, \sin t) \qquad \text{pro } t \in [0, 2\pi].$$

Pak

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\varphi}} \boldsymbol{T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} &= \int_0^{2\pi} \Big(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(\cos t) \Big) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}t = 2\pi \neq 0.\end{aligned}$$

Proto $\boldsymbol{T}$ nemůže mít potenciál na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Pokud bychom pracovali s křivkami tvaru $t \mapsto (r\cos t, r\sin t)$, kde $r > 0$, opět bychom dostali nenulové integrály, a proto neexistuje potenciál na žádné otevřené množině, která obsahuje nějaké prstencové okolí počátku. Na druhou stranu, třeba na množině $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ je potenciálem funkce $U(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ (ověří se zderivováním). Proto všechny uzavřené regulární po částech C^1-křivky ležící v pravé polorovině dávají nulový integrál.

17.2 Klasická teorie plošného integrálu

Plochou v $\mathbb{R}^N$ pro nás bude k-dimenzionální množina, kde $k \in \mathbb{N} \cap [1, N-1]$. Na rozdíl od křivek, kde jsme pod křivkou rozuměli spíše zobrazení (neboli parametrizaci) nežli množinu (té jsme říkali obraz křivky), budeme pod pojmem *plocha* rozumět množinu.

17.2.1 k-plochy v $\mathbb{R}^N$

Definice 17.2.1 (k-plocha). Nechť $k, N \in \mathbb{N}$ a $k < N$. Množina $M \subset \mathbb{R}^N$ se nazývá *k-plocha*, jestliže existuje neprázdná otevřená množina $E \subset \mathbb{R}^k$ a zobrazení $\boldsymbol{\varphi} \colon E \to \mathbb{R}^N$ tak, že platí
(i) $\boldsymbol{\varphi}(E) = M$
(ii) $\boldsymbol{\varphi} \in C^1(E; \mathbb{R}^N)$
(iii) hodnost Jacobiho matice zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ je rovna k všude na E.
Zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ se nazývá *parametrizace* plochy M.

Za *0-plochu* považujeme libovolný bod v $\mathbb{R}^N$. Plocha se nazývá *jednoduchá*, jestliže navíc $\boldsymbol{\varphi}$ je prosté na E a $\vec{\varphi}^{-1}$ spojité na $\boldsymbol{\varphi}(E)$.

Poznámka 17.2.2. (i) Je-li $\boldsymbol{\varphi}$ regulární C^1-křivka definovaná na otevřeném intervalu, jejím obrazem je 1-plocha.
(ii) Přestože nás zajímá počítání integrálů přes k-plochy pro $k \geq 2$ (případ $k = 0$ je nezajímavý a případ $k = 1$ jsme již prozkoumali v předchozím oddíle), rozšíření terminologie i na případy $k = 0, 1$ potřebujeme, neboť k hlavním výsledkům naší teorie budou patřit vícerozměrná zobecnění integrace per partes, kde se bude převádět integrace přes k-plochu na integraci přes její „okraj“, což bude typicky $(k-1)$-plocha.

Poznámka 17.2.3. (i) V definici k-plochy jsme sice přímo požadovali, aby bylo $k < N$, ale podmínka na hodnost Jacobiho matice sama o sobě okamžitě vylučuje případ $k > N$.
(ii) Ve vyloučeném případě případě $k = N$ by parametrizace $\boldsymbol{\varphi}$ byla regulárním zobrazením z otevřené množiny $E \subset \mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}^N$. Pak by podle globální verze Věty o inverzi (Věta 12.8.7) byla $M = \boldsymbol{\varphi}(E)$ otevřená množina kladné N-rozměrné Lebesgueovy míry (skutečně, pokud by totiž platilo $\lambda_N(M) = 0$, lokální lipschitzovskost zobrazení $\vec{\varphi}^{-1}$ způsobená vlastností $\vec{\varphi}^{-1} \in C^1(M; \mathbb{R}^N)$ by měla za následek nepravdivý výrok $\lambda_N(E) = 0$).

Další přirozenou otázku nám zodpoví následující výsledek.

Věta 17.2.4 (O korektnosti definice k-plochy)**.** *Nechť $k, l, N \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{R}^N$ je zároveň jednoduchá k-plocha a jednoduchá l-plocha. Pak $k = l$.*

Důkaz. Podle předpokladu je M popsána jako $\boldsymbol{\varphi}(E)$ a $\boldsymbol{\psi}(H)$, kde $E \subset \mathbb{R}^k$ a $H \subset \mathbb{R}^l$ jsou neprázdné otevřené množiny a $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}$ mají vlastnosti z definice jednoduché k-plochy (respektive l-plochy). Pro spor předpokládejme, že $k < l$. Důkaz provedeme v několika krocích.

Krok 1: základní vlastnosti zobrazení $\vec{\eta} := \vec{\psi}^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}$
Předně díky prostotě $\boldsymbol{\psi}$ je zobrazení $\vec{\eta}$ dobře definováno na celém E. Dále platí $H = \vec{\eta}(E)$ a $\vec{\eta}$ je prosté zobrazení.

Krok 2: důkaz, že $\vec{\eta}$ je třídy C^1
Důkaz založíme na Větě o implicitní funkci (Věta 12.4.13). Budeme vycházet z toho, že pro každé $u \in E$ platí

$$\boldsymbol{\psi}(\vec{\eta}(u)) = \boldsymbol{\varphi}(u).$$

Zvolme $u_0 \in E$ a položme $v_0 := \vec{\eta}(u_0) \in H$. Předpoklad o hodnosti Jacobiho matice zobrazení $\boldsymbol{\psi}$ nám zaručuje, že po vynechání vhodné $(N-l)$-tice řádků z Jacobiho matice $D\boldsymbol{\psi}(v_0)$ nám zbude regulární čtvercová matice. Pro jednoduchost dalšího značení předpokládejme, že zbylo prvních l řádků a definujme pomocné funkce

$$F_j(u, v) := \varphi_j(u) - \psi_j(v) \qquad \text{pro } j \in \{1, \dots, l\} \text{ a } (u, v) \in E \times H.$$

Pak vektorové pole $\vec{F} = (F_1, \dots, F_l)\colon E \times H \to \mathbb{R}^l$ splňuje $\vec{F}(u_0, v_0) = 0$, $\vec{F} \in C^1(E \times H; \mathbb{R}^l)$ a $\vec{F}(u, \vec{\eta}(u)) = 0$ pro všechna $u \in E$ (tato vlastnost nám umožní přenést výsledky získané prostřednictvím Věty o implicitní funkci (Věta 12.4.13) na zobrazení $\vec{\eta}$). Předpoklad o hodnosti Jacobiho matice zobrazení $\boldsymbol{\psi}$ se zde projevuje jako splnění maticové podmínky ve Větě o implicitní funkci, jejíž aplikace nám konečně dává, že $\vec{\eta}$ je C^1-funkce na okolí bodu u_0.

Krok 3: konstrukce pomocného lokálně lipschitzovského zobrazení
Díky tomu, že $\vec{\eta} \in C^1(E, \mathbb{R}^l)$, je $\vec{\eta}$ lokálně lipschitzovské zobrazení. Definujme pomocné zobrazení $\vec{\tilde{\eta}}\colon E \times \mathbb{R}^{l-k} \to \mathbb{R}^l$ předpisem

$$\vec{\tilde{\eta}}(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_l) = \vec{\eta}(u_1, \dots, u_k).$$

Pak $\vec{\tilde{\eta}}$ je zřejmě lokálně lipschitzovské na $E \times \mathbb{R}^{l-k}$. Navíc platí

$$H = \vec{\eta}(E) = \vec{\tilde{\eta}}(E \times \{0\}^{l-k}).$$

Protože $\lambda_l(E \times \{0\}^{l-k}) = 0$, musí platit i $\lambda_l(H) = 0$. To je ve sporu s tím, že $H \subset \mathbb{R}^l$ je neprázdná otevřená množina. $\square$

Poznámka 17.2.5. Pro úplnost si ještě povšimněme, že 0-plocha (jednobodová množina) nemůže být zároveň k-plochou pro nějaké $k \in \mathbb{N}$.

Příklad 17.2.6. (i) Případem 2-plochy v $\mathbb{R}^3$ je třeba jednotková horní polosféra bez nultého poledníku. Ta se dá parametrizovat pomocí sférických souřadnic

$$(\eta, \psi) \mapsto (\cos\psi \cos\eta, \cos\psi \sin\eta, \sin\psi) \qquad \text{kde } \eta \in (0, 2\pi), \psi \in (0, \tfrac{\pi}{2}),$$

nebo pomocí parametrizace

$$(r, \eta) \mapsto (r\cos\eta, r\sin\eta, \sqrt{1-r^2}) \qquad \text{kde } \eta \in (0, 2\pi), r \in (0, 1),$$

nebo

$$(x, y) \mapsto \left(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right) \qquad \text{kde } x, y \in \{x^2+y^2<1\} \setminus ([0,1) \times \{0\}).$$

Ve všech třech případech se snadno výpočtem ověří, že Jacobiho matice má všude hodnost 2. Všimněme si ještě, že parametrizace

$$(x, y) \mapsto \left(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right) \qquad \text{kde } x, y \in \{x^2+y^2<1\},$$

je parametrizací celé horní polosféry (stejně jako výše, kromě „rovníku“).

(ii) Nechť $E \subset \mathbb{R}^{N-1}$ je otevřená množina, $f \in C^1(E)$ a

$$M := \{(t_1, \dots, t_{N-1}, f(t_1, \dots, t_{N-1}))\colon t \in E\}.$$

Nabízí se nám parametrizace

$$\boldsymbol{\varphi}\colon (t_1, \dots, t_{N-1}) \mapsto (t_1, \dots, t_{N-1}, f(t_1, \dots, t_{N-1})).$$

Jacobiho matice zde má tvar (pro zjednodušení zápisu pišme $t := (t_1, \dots, t_{N-1})$)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_{N-1}}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_{N-1}}{\partial t_1}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_{N-1}}{\partial t_{N-1}}(t) \\ \frac{\partial\varphi_N}{\partial t_1}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_N}{\partial t_{N-1}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial t_1}(t) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial t_{N-1}}(t) \end{pmatrix}$$

a správnou hodnost. Z předpisu pro $\boldsymbol{\varphi}$ je vidět, že toto zobrazení je prosté.

(iii) Plochu je možné zadat také implicitně, třeba předpisem $F(x_1, \dots, x_N) = 0$. Věta o implicitní funkci (Věta 12.4.13), splňuje-li $F\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ její předpoklady, pak situaci převede na případ z bodu (ii). Je však nutné pamatovat na to, že plná verze Věty o implicitní funkci pracuje pouze lokálně (poradíme si například s množinou $\{x^2+y^2-1=0\} \cap \{y<0\}$, nikoliv s $\{x^2+y^2-1=0\}$).

17.2.2 Zavedení plošného obsahu a plošného integrálu prvního druhu

Připomeňme si, že délka křivky byla definována pomocí aproximací lomenými čarami. Analogická myšlenka pro počítání obsahu ploch (například aproximovat 2-plochu v $\mathbb{R}^3$ pomocí „lomené plochy" tvořené částmi rovin) nefunguje, jak uvidíme později. Nechme se inspirovat délkou křivky, pro kterou jsme v kapitole o Riemannovu integrálu dostali ekvivalentní vyjádření $\int_{\boldsymbol{\varphi}} 1\,\mathrm{d}s := \int_I \|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|\,\mathrm{d}t$ (křivkový integrál prvního druhu). Budeme postupovat následovně. Nejprve nahradíme činitel $\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|$ jeho zobecněním pro objekty vyšší dimenze, jemuž budeme říkat *plošný element*. Následně zadefinujeme plošný integrál prvního druhu a integrál z jedničky budeme nazývat obsahem plochy. Pak si odvodíme základní vlastnosti tohoto integrálu a na těchto vlastnostech a na příkladech dobře známých ploch si ukážeme, že naše definice obsahu k-plochy má rozumné vlastnosti a známým plochám dává hodnotu obsahu, na kterou jsme zvyklí. Zde bychom rádi čtenáře upozornili, že náš nekonstruktivní přístup neodpovídá tomu, jak se historicky tato oblast matematiky vyvíjela. Zájemcům proto nabídneme zvláštní oddíl, kde budou alespoň stručně shrnuty základní myšlenky získání vzorce pro plošný element založené na geometrických vlastnostech zkoumaných ploch.

Definice 17.2.7 (Gramova matice)**.** Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^N$. *Gramovou maticí* příslušející vektorům $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots \boldsymbol{v}_k$ nazýváme matici

$$\mathbb{G}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k) = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_k) \\ (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k) \end{pmatrix},$$

kde $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)$ značí skalární součin vektorů $\boldsymbol{v}_i$ a $\boldsymbol{v}_j$.

V případě, že $\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ patří do $C^1(E; \mathbb{R}^N)$, bude $D\boldsymbol{\varphi}(t)$ zastupovat Jacobiho matici zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ v bodě $t \in E$ a $\mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}(t))$ bude Gramova matice aplikovaná na vektory dané sloupci Jacobiho matice.

Definice 17.2.8 (Plošný integrál prvního druhu)**.** Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k < N$, $M \subset \mathbb{R}^N$ je jednoduchá k-plocha parametrizovaná zobrazením $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ z otevřené množiny $E \subset \mathbb{R}^k$ a $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na M. Pak definujeme *plošný integrál prvního druhu* předpisem

$$\int_M f\,\mathrm{d}S := \int_E f(\boldsymbol{\varphi}(t))\sqrt{\det \mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}(t))}\,\mathrm{d}t,$$

pokud integrál na pravé straně existuje jako Lebesgueův a je konečný. Číslo

$$S_k(M) := \int_M 1\,\mathrm{d}S$$

nazýváme *k-rozměrným plošným obsahem* k-plochy M.

Poznámka 17.2.9. (i) Pokud $k = 1$ (tedy $M = \langle \boldsymbol{\varphi} \rangle$, kde $\boldsymbol{\varphi}$ je křivka), Gramova matice má jediný prvek $(\boldsymbol{\varphi}'(t), \boldsymbol{\varphi}'(t)) = \|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|^2$, plošný integrál prvního druhu je totožný s křivkovým integrálem prvního druhu a obsah je totéž, co délka křivky.
(ii) Plošný integrál prvního druhu existovat nemusí (už třeba proto, že od funkce f nepožadujeme žádnou vlastnost, která by zaručila měřitelnost funkce $t \mapsto f(\boldsymbol{\varphi}(t))$), ale k-rozměrný plošný obsah existuje vždy neboť v definici k-plochy požadujeme otevřenost množiny M a plošný element je spojitá funkce díky $\boldsymbol{\varphi} \in C^1(E; \mathbb{R}^N)$.
(iii) Všimněme si, že pokud jsou vektory $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, na sebe kolmé, pak

$$\sqrt{\det \mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}(t))} = \prod_{i=1}^{k} \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_i} \right\|.$$

17.2.3 Základní vlastnosti plošného obsahu a plošného integrálu prvního druhu

Začněme tím, že si spočteme obsah několika základních ploch. Parametrizace si zvolíme tak, aby se nám počítalo co nejsnáze. To nám umožňuje následující výsledek.

Věta 17.2.10 (O nezávislosti plošného integrálu prvního druhu na parametrizaci)**.** *Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k < N$ a $M \subset \mathbb{R}^N$ je jednoduchá k-plocha. Nechť $(\boldsymbol{\varphi}, E)$ a $(\boldsymbol{\psi}, F)$ jsou dvě její parametrizace a $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na M. Pak*

$$\int_E f(\boldsymbol{\varphi}(t)) \sqrt{\det \mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}(t))}\, \mathrm{d}t = \int_F f(\boldsymbol{\psi}(s)) \sqrt{\det \mathbb{G}(D\boldsymbol{\psi}(s))}\, \mathrm{d}s,$$

kdykoliv alespoň jeden z Lebesgueových integrálů existuje.

Důkaz této věty je poměrně dlouhý. Proto jsme jej odložili na konec oddílu.

Příklad 17.2.11. (i) Nechť $E \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina a $\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ je na E definováno předpisem

$$\boldsymbol{\varphi}(t_1, t_2, \ldots, t_k) = (t_1, t_2, \ldots, t_k, 0, \ldots, 0).$$

Jacobiho matice a z ní odvozená Gramova matice pak jsou

$$D\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}(t)) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Proto $\sqrt{\det \mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}(t))} \equiv 1$ na E a dostáváme

$$S_k(M) = \int_E 1 \sqrt{\det \mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}(t))}\, \mathrm{d}t = \int_E 1\, \mathrm{d}\lambda_k(t) = \lambda_k(E).$$

(ii) Spočítejme obsah jednotkové sféry (bez jednoho poledníku) popsané pomocí zobrazení

$$\boldsymbol{\varphi}\colon (\eta,\psi)\mapsto(\cos\psi\cos\eta,\cos\psi\sin\eta,\sin\psi)\qquad \text{kde } (\eta,\psi)\in E:=(0,2\pi)\times(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}).$$

Jacobiho matice a z ní odvozená Gramova matice pak jsou

$$D\boldsymbol{\varphi}(\eta,\psi)=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\psi}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\psi}\\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial\eta} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial\psi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cos\psi\sin\eta & -\sin\psi\cos\eta\\ \cos\psi\cos\eta & -\sin\psi\sin\eta\\ 0 & \cos\psi\end{pmatrix},$$

a

$$\mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}(\eta,\psi))=\begin{pmatrix}\cos^2\psi & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Odtud máme

$$\sqrt{\det\mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}(\eta,\psi))}=\sqrt{\cos^2\psi}=|\cos\psi|=\cos\psi,$$

a proto

$$\begin{aligned}S_2(M)&=\int_E 1\sqrt{\det\mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}(\eta,\psi))}\,\mathrm{d}\lambda_2(\eta,\psi)=\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\eta\\ &=\int_0^{2\pi}[\sin\psi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}\eta=4\pi.\end{aligned}$$

Otázkou přidání chybějícího poledníku se budeme zabývat později, až si představíme takzvané zobecněné k-plochy.

(iii) Spočítejme obsah válcové plochy popsané pomocí

$$\boldsymbol{\varphi}\colon (\eta,h)\mapsto(\cos\eta,\sin\eta,h),\qquad \text{kde } (\eta,h)\in E:=(0,2\pi)\times(0,1).$$

Jacobiho matice a z ní odvozená Gramova matice pak jsou

$$D\boldsymbol{\varphi}(\eta,h)=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial h}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial h}\\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial\eta} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial h}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\eta & 0\\ \cos\eta & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

a

$$\mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}(\eta,h))=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Odtud máme

$$S_2(M)=\int_E 1\sqrt{\det\mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}(\eta,h))}\,\mathrm{d}\lambda_2(\eta,h)=\int_0^{2\pi}\int_0^1 1\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}\eta=2\pi.$$

(iv) Spočítejme obsah kuželové plochy popsané pomocí

$$\boldsymbol{\varphi}\colon (\eta,h)\mapsto(h\cos\eta,h\sin\eta,h),\qquad \text{kde } (\eta,h)\in E:=(0,2\pi)\times(0,1).$$

Jacobiho matice a z ní odvozená Gramova matice pak jsou

$$D\boldsymbol{\varphi}(\eta,h)=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} & \frac{\partial\varphi_1}{h}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta} & \frac{\partial\varphi_2}{h}\\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial\eta} & \frac{\partial\varphi_3}{h}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-h\sin\eta & \cos\eta\\ h\cos\eta & \sin\eta\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

a

$$\mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}(\eta,h))=\begin{pmatrix}h^2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Odtud máme

$$S_2(M)=\int_E 1\sqrt{\det\mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}(\eta,h))}\,\mathrm{d}\lambda_2(\eta,h)=\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{2}h\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}\eta=\sqrt{2}\pi.$$

Věta 17.2.12 (Základní vlastnosti plošného obsahu)**.** *k-rozměrný plošný obsah se zachovává při translaci a rotaci. Při α-násobném roztažení, pro $\alpha\geq 0$, je výsledný k-rozměrný plošný obsah roven α^k-násobku původní hodnoty.*

Důkaz. Translace odpovídá tomu, že se původní parametrizace φ zobrazující $E\subset\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^N$ nahradí zobrazením $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}\colon t\mapsto\boldsymbol{\varphi}(t)+x_0$, kde $x_0\in\mathbb{R}^N$. Tento proces nemění prvky Gramovy matice. Při rotaci původní parametrizaci $\boldsymbol{\varphi}$ nahradíme zobrazením $t\mapsto\mathbb{A}(\boldsymbol{\varphi}(t))$, kde $\mathbb{A}$ je ortogonální matice. Ortogonální matice zachovávají skalární součin, a proto se prvky Gramovy matice opět nezmění (třebaže se změní vektory, z nichž se tyto prvky počítají). Při roztažení přecházíme k zobrazení $t\mapsto\alpha(\boldsymbol{\varphi}(t))$. Všechny původní vektory, z nichž se počítají prvky Gramovy matice, budou proto vynásobeny číslem α, proto budou nové prvky α^2-násobkem prvků původních, tedy výsledný plošný element bude α^k-násobkem původního plošného elementu. $\square$

Nyní se budeme zabývat tím, jak blízký je plošný obsah definovaný pomocí Gramovy matice naší intuitivní geometrické představě o povrchu plochy. Začněme definicí pomocného pojmu.

Definice 17.2.13 (k-rovnoběžnostěn)**.** Nechť $k,N\in\mathbb{N}$, $k\leq N$, $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k\in\mathbb{R}^N$ jsou lineárně nezávislé vektory a $x_0\in\mathbb{R}^N$. Pak množinu

$$P(x_0,\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k):=\left\{x_0+\sum_{i=1}^k t_i\boldsymbol{v}_i\colon(t_1,\dots t_k)\in[0,1]^k\right\}$$

nazýváme *k-rovnoběžnostěn* určený bodem x_0 a vektory $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k$.

Věta 17.2.14 (O plošném obsahu k-rovnoběžnostěnu)**.** *Nechť $k,N\in\mathbb{N}$, $k\leq N$. Pak pro libovolný k-rovnoběžnostěn se shoduje plošný obsah definovaný pomocí plošného integrálu prvního druhu (tedy pomocí $\sqrt{\det\mathbb{G}(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k)}$) se standardní geometrickou definicí.*

Důkaz. Předně změnou ortonormální báze můžeme dosáhnout toho, že vektory $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k$ mají nulové všechny $(k+1)$-té až N-té složky. Z hlediska geometrické definice plošného obsahu se nic nestalo. Z hlediska Gramovy matice přechod k jiné bázi také nic nezměnil, neboť násobení ortogonální maticí zachovává skalární součin. Dostali jsme se do situace analogické tomu, že pracujeme v $\mathbb{R}^k$ a počítáme k-rozměrnou Lebesgueovu míru zadaného rovnoběžnostěnu.

Nyní vytvořme matici $\mathbb{A}$ tak, že do ní jako sloupce vyplníme vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$. Podle pravidel pro výpočet součinu matic dostáváme $\mathbb{A}^\top \mathbb{A} = \mathbb{G}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)$. Odtud

$$|\det \mathbb{A}| = \sqrt{\det \mathbb{G}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)}.$$

Teď už si stačí jen vzpomenout, že $|\det \mathbb{A}|$ odpovídá geometrické definici plošného obsahu podle Tvrzení o vztahu determinantu a Lebesgueovy míry rovnoběžnostěnu (Tvrzení 15.12.13). $\square$

Nyní se budeme konečně zabývat nezávislostí plošného integrálu prvního druhu na parametrizaci. Připravíme si nejprve jeden pomocný výsledek.

Lemma 17.2.15 (O charakterizaci regularity Gramovy matice)**.** *Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k \leq N$ a $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^N$. Pak*

$$\det \mathbb{G}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k) = 0 \quad \iff \quad \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \textit{ jsou lineárně závislé.}$$

Důkaz. Nejprve vytvořme matici $\mathbb{A}$ tak, že do ní jako sloupce vyplníme vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$. Pak podle pravidel pro výpočet součinu matic dostáváme identitu $\mathbb{A}^\top \mathbb{A} = \mathbb{G}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)$.

Pokud jsou nyní $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ lineárně závislé, má $\mathbb{A}$ lineárně závislé sloupce, a proto existuje netriviální vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^k$ takový, že (vektor $\vec{u}$ v následujícím píšeme do sloupce)

$$\mathbb{A}\vec{u} = \mathbf{0}$$

(zde i v dalším symbol $\mathbf{0}$ značí triviální vektor v $\mathbb{R}^N$). Odtud

$$\mathbb{G}\vec{u} = \mathbb{A}^\top \mathbb{A}\vec{u} = \mathbb{A}^\top \mathbf{0} = \vec{0}.$$

Proto $\mathbb{G}$ nemůže být regulární.

Pokud naopak $\mathbb{G}$ není regulární, existuje netriviální vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^k$ takový, že $\mathbb{G}\vec{v} = \vec{0}$. Odtud (připomeňme, že $\|\vec{v}\|$ značí eukleidovskou velikost vektoru $\vec{v}$)

$$0 = \vec{v}^\top \cdot (\mathbb{G}\vec{v}) = \vec{v}^\top \cdot \mathbb{A}^\top \mathbb{A}\vec{v} = (\mathbb{A}\vec{v})^\top \cdot (\mathbb{A}\vec{v}) = \|\mathbb{A}\vec{v}\|^2.$$

Následně $\mathbb{A}\vec{v}$ je triviální vektor, a proto $\mathbb{A}$ musí mít lineárně závislé sloupce. $\square$

Důkaz Věty o nezávislosti plošného integrálu prvního druhu na parametrizaci. (Věta 17.2.10) Důkaz je podobný důkazu analogického výsledku pro křivkový integrál, ale je méně přehledný vlivem práce se složitějšími objekty. I tentokrát si zavedeme pomocné zobrazení $\vec{\eta} := \vec{\varphi}^{-1} \circ \boldsymbol{\psi}$. O tomto zobrazení ukážeme, že je regulární na F, a pak použijeme Větu o substituci pro Lebesgueův integrál (Věta 15.12.1).

Krok 1: korektnost definice zobrazení $\vec{\eta}$ a jeho základní vlastnosti.
Definice $\vec{\eta}$ je korektní díky tomu, že zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ je prosté na E. Zobrazení $\vec{\eta}$ je

definované na F a $\vec{\eta}(F) = E$. Navíc z toho, že plocha M je jednoduchá, plyne, že $\vec{\eta}$ je spojité na F. Dále je toto zobrazení zřejmě prosté.

Krok 2: spojitá diferencovatelnost $\vec{\eta}$ získaná pomocí Věty o implicitní funkci (Věta 12.4.13).
Pro každé $s \in F$ platí

$$\boldsymbol{\varphi}(\vec{\eta}(s)) = \boldsymbol{\psi}(s).$$

Zvolme $s_0 \in F$, položme $t_0 = \vec{\eta}(s_0) \in E$. Předpoklad o hodnosti Jacobiho matice zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ zaručuje, že po vynechání $N-k$ řádků z matice $D\boldsymbol{\varphi}(t_0)$ nám zůstane regulární čtvercová matice. Pro jednoduchost dalšího značení předpokládejme, že zbylo prvních k řádků a definujme pomocné funkce

$$H_j(s,t) := \psi_j(s) - \varphi_j(t) \qquad \text{pro } j \in \{1, \dots, k\} \qquad \text{a } (s,t) \in F \times E.$$

Pak vektorové pole $\vec{H} := (H_1, \dots, H_k)\colon F \times E \to \mathbb{R}^k$ splňuje $\vec{H}(s_0, t_0) = 0$, $\vec{H}(s, \vec{\eta}(s)) = 0$ pro všechna $s \in F$ (tato vlastnost nám umožní přenést výsledky získané z Věty o implicitní funkci (Věta 12.4.13). na zobrazení $\vec{\eta}$). Předpoklad o hodnosti Jacobiho matice zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ se zde projevuje jako splnění maticové podmínky ve Větě o implicitní funkci. Aplikace Věty o implicitní funkci nám dává, že $\vec{\eta}$ je C^1-funkce na okolí bodu t_0.

Krok 3: klíčová maticová rovnost $\mathbb{G}(D\boldsymbol{\psi}) = (D\vec{\eta})^\top \mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}) D\vec{\eta}$.
Díky řetízkovému pravidlu máme pro všechna $s \in F$ pro Jacobiho matice $D\boldsymbol{\psi}$, $D\boldsymbol{\varphi}$ a $D\vec{\eta}$ rovnost

$$D\boldsymbol{\psi}(s) = D\boldsymbol{\varphi}(\vec{\eta}(s)) D\vec{\eta}(s).$$

Navíc podle definice Gramovy matice máme (pro větší přehlednost v dalším vynecháme argumenty)

$$\mathbb{G}(D\boldsymbol{\psi}) = (D\boldsymbol{\psi})^\top D\boldsymbol{\psi} \qquad \text{a} \qquad \mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}) = (D\boldsymbol{\varphi})^\top D\boldsymbol{\varphi}.$$

Z předešlých rovností proto dostáváme

$$\begin{aligned}\mathbb{G}(D\boldsymbol{\psi}) &= (D\boldsymbol{\psi})^\top D\boldsymbol{\psi} = (D\boldsymbol{\varphi} D\eta)^\top D\boldsymbol{\varphi} D\vec{\eta} = (D\vec{\eta})^\top (D\boldsymbol{\varphi})^\top D\boldsymbol{\varphi} D\vec{\eta} \\ &= (D\vec{\eta})^\top \mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}) D\vec{\eta}.\end{aligned}$$

Krok 4: nenulovost jakobiánu a aplikace Věty o substituci (Věta 15.12.1).
Dokázaná klíčová rovnost dává pro odpovídající determinanty

$$\begin{aligned}\det \mathbb{G}(D\boldsymbol{\psi}) &= \det(D\vec{\eta})^\top \det \mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}) \det(D\vec{\eta}) = \det \mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}) \mathrm{det}^2(D\vec{\eta}) \\ &= \det \mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}) |\mathrm{J}_{\vec{\eta}}|^2.\end{aligned}$$

Protože $\det \mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}) \neq 0$ všude na E a $\det \mathbb{G}(D\boldsymbol{\psi}) \neq 0$ všude na F, dostáváme, že $\det(D\eta) \neq 0$ všude na F. Zároveň jsme tak dostali poslední vlastnost potřebnou k tomu, aby $\vec{\eta}$ bylo regulární zobrazení na F. Můžeme proto použít Větu o substituci (Věta 15.12.1), která spolu s výše uvedenou rovností pro determinanty dává

$$\begin{aligned}\int_E f(\boldsymbol{\varphi}(t))\sqrt{\det \mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}(t))}\,\mathrm{d}t &= \int_F f(\boldsymbol{\varphi}(\vec{\eta}(s)))\sqrt{\det \mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}(\vec{\eta}(s))}|\mathrm{J}_{\vec{\eta}}(s)|\,\mathrm{d}s\\ &= \int_F f(\boldsymbol{\varphi}(\vec{\eta}(s)))\sqrt{\det \mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}(\vec{\eta}(s))|\mathrm{J}_{\vec{\eta}}(s)|^2}\,\mathrm{d}s\\ &= \int_F f(\boldsymbol{\psi}(s))\sqrt{\det \mathbb{G}(D\boldsymbol{\psi}(s))}\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

□

17.2.4 Tečný prostor, tečná rovina a vektorový součin v $\mathbb{R}^N$

V teorii křivkového integrálu sehrál důležitou roli pojem tečného vektoru. V případě k-plochy v $\mathbb{R}^N$ bude mít podobnou roli tečný prostor. Navíc pro $k = N-1$ bude důležitý také pojem normálového vektoru k ploše. Zmíněné pojmy si nyní postupně zavedeme.

Definice 17.2.16 (Tečný prostor a tečná rovina)**.** Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k \le N$, $M \subset \mathbb{R}^N$ je jednoduchá k-plocha parametrizovaná zobrazením $\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ z otevřené množiny $E \subset \mathbb{R}^k$ a $\tau \in E$. *Tečným prostorem* k ploše M v bodě $x = \boldsymbol{\varphi}(\tau)$ nazýváme prostor

$$T_xM := \operatorname{span}\Big\{\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t_1}(\tau), \dots, \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t_k}(\tau)\Big\}.$$

Tečnou rovinou k ploše M v bodě $x = \boldsymbol{\varphi}(\tau)$ nazýváme množinu

$$R\Big(x; \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t_1}(\tau), \dots, \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t_k}(\tau)\Big) := \Big\{x + \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t_i}(\tau)\colon \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Poznámka 17.2.17. (i) Díky předpokladu na hodnost Jacobiho matice v definici k-plochy je tečný prostor vždy k-rozměrný podprostor $\mathbb{R}^N$.
(ii) Tečná rovina je jen posunutý tečný prostor. Vždy se jedná o k-plochu.

Definice 17.2.18 (Vektorový součin)**.** Nechť $N \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^{N-1} \in \mathbb{R}^N$ jsou lineárně nezávislé vektory. Jejich *vektorovým součinem* nazveme vektor

$$[v^1, \dots, v^{N-1}] := \det\begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_1^{N-1} & \mathbf{e}_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ v_N^1 & \cdots & v_N^{N-1} & \mathbf{e}_N\end{pmatrix}$$

(souřadnice vektorů v^j jsou zapsány do sloupců a jednotlivé sčítance figurující v determinantu chápeme jako vektory vzniklé součinem $(N-1)$-tice reálných čísel a jednoho vektoru ze sloupce úplně napravo).

Příklad 17.2.19. Nechť $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Pak

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] &= \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & \mathbf{e}_1 \\ u_2 & v_2 & \mathbf{e}_2 \\ u_3 & v_3 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \\ &= u_1 v_2 \mathbf{e}_3 + u_3 v_1 \mathbf{e}_2 + u_2 v_3 \mathbf{e}_1 - u_3 v_2 \mathbf{e}_1 - u_1 v_3 \mathbf{e}_2 - u_2 v_1 \mathbf{e}_3 \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}.\end{aligned}$$

Vektorový součin má následující vlastnosti.

Věta 17.2.20 (O vlastnostech vektorového součinu)**.** *Nechť $N \in \mathbb{N}$ a nechť vektory $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^{N-1} \in \mathbb{R}^N$ jsou lineárně nezávislé. Pak $\boldsymbol{v} := [\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^{N-1}]$ je vektor splňující*
(i) *$\boldsymbol{v}$ je ortogonální ke všem vektorům $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^{N-1}$*
(ii) *platí $\|\boldsymbol{v}\|_2^2 = \det \mathbb{G}(\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^{N-1})$*
(iii) *determinant matice, do jejíž sloupců napíšeme vektory $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^{N-1}, \boldsymbol{v}$, je kladný.*

V důkazu Věty o vlastnostech vektorového součinu použijeme následující zobecnění pravidla pro výpočet determinantu součinu čtvercových matic.

Věta 17.2.21 (Cauchy–Binetovy formule)**.** *Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k \leq N$, $\mathbb{A}$ je matice o k řádcích a N sloupcích a $\mathbb{B}$ je matice o N řádcích a k sloupcích. Pak*

$$\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \sum_J \det \mathbb{A}(J) \det \mathbb{B}(J),$$

kde J probíhá všechny k-tice indexů $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq N$ a $\mathbb{A}(J)$ je čtvercová matice získaná z matice $\mathbb{A}$ vynecháním sloupců, jejichž pořadová čísla neleží v J a analogicky $\mathbb{B}(J)$ se získala z $\mathbb{B}$ vynecháním řádků, jejichž pořadová čísla neleží v J.

Důkaz. Nejprve si maticový součin vyjádříme pomocí prvků jednotlivých matic a pak využijeme toho, že determinant je multilineární

$$\begin{aligned}\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) &= \det \begin{pmatrix} \sum_{i_1=1}^N a_{1i_1} b_{i_1 1} & \cdots & \sum_{i_k=1}^N a_{1i_k} b_{i_k k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i_1=1}^N a_{ki_1} b_{i_1 1} & \cdots & \sum_{i_k=1}^N a_{ki_k} b_{i_k k} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^N b_{i_1 1} \dots b_{i_k k} \det \begin{pmatrix} a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ki_1} & \cdots & a_{ki_k} \end{pmatrix} \\ &=: \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^N b_{i_1 1} \dots b_{i_k k} \det \mathbb{A}(i_1, \dots, i_k).\end{aligned}$$

Determinant pod sumou úplně napravo je nenulový, jen pokud použitá k-tice indexů obsahuje samá různá čísla. Takové indexy lze psát jako permutace uspořádaných k-tic ze znění věty.

Nechť v dalším je vždy $i_1, \dots, i_k$ přípustná k-tice (s neopakujícími se indexy), τ je permutace na k prvcích, která tuto k-tici převede na uspořádanou k-tici $J = \{j_1, \dots, j_k\}$, a σ je inverzní permutace k τ. Pak

$$\begin{aligned}
\det(\mathbb{AB}) &= \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k=1 \\ \text{po dvou různé}}}^{N} b_{i_1 1} \dots b_{i_k k} \det \mathbb{A}(i_1, \dots, i_k) \\
&= \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k=1 \\ \text{po dvou různé}}}^{N} b_{i_1 1} \dots b_{i_k k} \operatorname{sign}(\tau) \det \mathbb{A}(J) \\
&= \sum_J \sum_\sigma b_{\sigma(j_1)1} \dots b_{\sigma(j_k)k} \operatorname{sign}(\sigma) \det \mathbb{A}(J) \\
&= \sum_J \det \mathbb{A}(J) \sum_\sigma \operatorname{sign}(\sigma) b_{\sigma(j_1)1} \dots b_{\sigma(j_k)k} \\
&= \sum_J \det \mathbb{A}(J) \det \mathbb{B}(J).
\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. □

Příklad 17.2.22. Uvažujme matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Přímý výpočet dává

$$\det(\mathbb{AB}) = \det \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} = 196 - 100 = 96.$$

Přístup přes Cauchy–Binetovu formuli zahrnuje práci se čtvercovými submaticemi zadaných matic a dává

$$\begin{aligned}
\det(\mathbb{AB}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} &+ \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\
&+ \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\
= (-4)^2 + (-8)^2 + (-4)^2 = 16 + 64 + 16 = 96.
\end{aligned}$$

Důkaz věty o základních vlastnostech vektorového součinu (Věta 17.2.20). První vlastnost se dá snadno dokázat z toho, že podle definice vektorového součinu pro libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$ platí

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \det \begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_1^{N-1} & u_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_N^1 & \cdots & v_N^{N-1} & u_N \end{pmatrix}. \tag{17.2.1}$$

Položíme-li za $\mathbf{u}$ kterýkoliv z vektorů $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{N-1}$, počítáme determinant z matice, která má dva stejné sloupce, a proto je uvedený determinant nulový.

Dokažme druhou vlastnost. Nejprve vytvořme matici $\mathbb{A}$ tak, že do ní jako sloupce vyplníme vektory $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{N-1}$. Pokračujeme tím, že provedeme rozvoj determinantu z definice vektorového součinu podle posledního sloupce. Dostáváme (povšimněte si, že matice z definice vektorového součinu je jen rozšířená matice $\mathbb{A}$ o poslední sloupec)

$$[\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{N-1}] = ((-1)^{N-1} \det \mathbb{V}_1, (-1)^{N-2} \det \mathbb{V}_2, \dots, \det \mathbb{V}_N), \tag{17.2.2}$$

kde $\mathbb{V}_i$ jsou matice získané vyškrtnutím i-tého řádku z matice $\mathbb{A}$. Odtud díky Cauchy–Binetově formuli (Věta 17.2.21) a vztahu matice $\mathbb{A}$ ke Gramově matici konečně dostáváme

$$\begin{aligned}\det \mathbb{G}(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{N-1}) &= \det(\mathbb{A}^\top \mathbb{A}) = \det \mathbb{V}_1^\top \det \mathbb{V}_1 + \dots + \det \mathbb{V}_N^\top \det \mathbb{V}_N \\ &= (\det \mathbb{V}_1)^2 + \dots + (\det \mathbb{V}_N)^2 = \|[\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{N-1}]\|^2,\end{aligned}$$

což jsme chtěli ukázat.

Dokažme třetí tvrzení. Použijeme-li vzorec (17.2.1), dostáváme

$$\det \begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_1^{N-1} & v_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_N^1 & \cdots & v_N^{N-1} & v_N \end{pmatrix} = (\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|^2 \geq 0.$$

Podle již dokázané druhé části a Lemmatu o charakterizaci regularity Gramovy matice (Lemma 17.2.15) navíc dostáváme, že $\|\mathbf{v}\|^2 \neq 0$. □

Příklad 17.2.23. (i) Podle druhé části Věty o vlastnostech vektorového součinu (Věta 17.2.21) je pro $k = N-1$ možné plošný element vyjádřit pomocí vektorového součinu vektorů generujících tečný prostor $(N-1)$-plochy, tedy

$$\int_M f \, \mathrm{d}S = \int_E f(\boldsymbol{\varphi}(t)) \Big\| \Big[\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_{N-1}}(t) \Big] \Big\| \, \mathrm{d}t.$$

(ii) Při explicitním zápisu plochy, kterým jsme se zabývali ve druhé části Příkladu 17.2.6, se dá podle tvaru Jacobiho matice nahlédnout, že

$$\Big[\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_{N-1}}(t) \Big] = \Big(-\frac{\partial f}{\partial t_1}(t), \dots, -\frac{\partial f}{\partial t_{N-1}}(t), 1 \Big)$$

a odtud

$$\Big\| \Big[\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_{N-1}}(t) \Big] \Big\| = \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial f}{\partial t_1}(t) \Big)^2 + \dots + \Big(\frac{\partial f}{\partial t_{N-1}}(t) \Big)^2}.$$

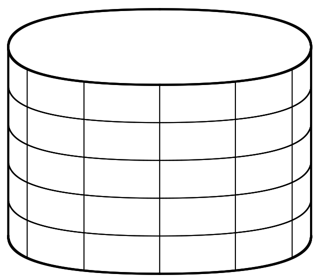
(iii) Je-li plocha zadána implicitně předpisem $F(x_1, \dots, x_N) = 0$ a jsou-li splněny předpoklady Věty o implicitní funkci (Věta 12.4.13) pro vyjádření poslední proměnné pomocí proměnných zbývajících, plošný element má podle předchozí části tohoto příkladu tvar

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\frac{\partial F}{\partial x_i})^2}}{|\frac{\partial F}{\partial x_N}|}.$$

17.2.5 Geometrické úvahy vedoucí k zavedení plošného obsahu pomocí Gramovy matice

V tomto oddíle si jednak ukážeme, že zatímco délka křivky definovaná na základě aproximace lomenými čarami je dobře fungující pojem, přirozeně se nabízející analogie v $\mathbb{R}^3$, tedy počítat obsahy (zakřivených) ploch pomocí lokálního nahrazení rovinnými útvary, fungovat nemůže.

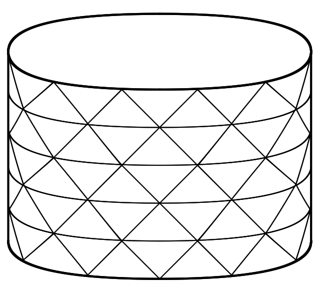
Příklad 17.2.24. Pokusme se nahradit válcovou plochu $\{x^2 + y^2 = 1, z \in [0,1]\}$ nejprve malými obdélníky jako na Obrázku 17.2.



Obrázek 17.2: Aproximace válcové plochy pomocí obdélníčků.

Pokud budeme rozměry obdélníků zmenšovat (zejména jejich šířku), budeme se blížit správné hodnotě povrchu (což souvisí s definicí délky kružnice pomocí lomených čar).

Zkusme naši válcovou plochu naopak aproximovat pomocí trojúhelníků. Válcovou plochu rozdělíme na vodorovné pásy a ty pak nahradíme trojúhelníky stejných rozměrů jako na Obrázku 17.3.



Obrázek 17.3: Aproximace válcové plochy pomocí trojúhelníčků.

Upřesněme, že aproximující trojúhelníky jsou umístěny tak, že vrcholy těchto trojúhelníků leží na válcové ploše zatímco zbytek trojúhelníku leží uvnitř válce. Povšimněme si, že pokud zachováme počet trojúhelníků na jednotlivých pásech a budeme zvyšovat počet pásů, obsahy jednotlivých trojúhelníků nepoklesnou pod polovinu součinu délky vodorovné hrany trojúhelníku a vzdálenosti středu této hrany od válcové plochy (jinými slovy: pokud pouze ztenčujeme pásy, trojúhelníky se postupně natáčejí kolmo k válcové ploše a jejich plochy nejdou do nuly). Odtud je zřejmé, že pokud budeme pomalu zvyšovat počet trojúhelníků v jednotlivých pásech a zároveň budeme počty pásů zvyšovat „mnohem“ rychleji, dostaneme aproximace s trojúhelníky, jejichž průměr jde do nuly a součet ploch jde do nekonečna. Konkrétně, pokud válec o výšce 1 a poloměru podstavy 1 rozdělíme na m stejných pásů a v každém pásu zkonstruujeme $2n$ stejných trojúhelníků, má každý trojúhelník plošný obsah

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{n}\right)\sqrt{\tfrac{1}{m^2}+\left(1-\cos\left(\tfrac{\pi}{n}\right)\right)^2}$$

($2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ je velikost základny trojúhelníka a $\sqrt{\frac{1}{m^2}+\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2}$ je jeho výška). Součet jejich obsahů je

$$P(m,n) := 2mn\sin\left(\tfrac{\pi}{n}\right)\sqrt{\tfrac{1}{m^2}+\left(1-\cos\left(\tfrac{\pi}{n}\right)\right)^2}$$

a je vidět, že hodnota výrazu $P(m,n)$ pro m,n rostoucí nade všechny meze závisí na tom, jaký je vzájemný vztah mezi m a n. Například pro $m = qn^2$ je

$$\lim_{n\to\infty} P(qn^2,n) = 2\pi\sqrt{1+\frac{\pi^4}{4}q}$$

a ke správné hodnotě vede jen $q = 0$, což odpovídá $m = o(n^2)$ pro $n \to \infty$. Naopak, je-li $n = o(\sqrt{m})$, je příslušná limita rovna ∞.

Nyní jsme již připraveni uvést geometrickou interpretaci našeho vztahu pro plošný obsah respektive pro plošný integrál prvního druhu. Nejprve předpokládejme, že studujeme k-rozměrný objekt E, který je rovinný. Pokud si připomeneme Příklad 17.2.11, vidíme, že vhodným otočením a translací převedeme příslušnou rovinu na $R(0;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_k)$ a určíme $\lambda_k(\widetilde{E})$, kde $\widetilde{E}$ je otočený a posunutý útvar E.

Pokud útvar není rovinný, ale je zakřivený, nahradíme lokálně plochu tečnými rovnoběžnostěny $P(\boldsymbol{\varphi}(t), \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t_1}\Delta t_1, \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t_2}\Delta t_2,\dots,\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t_k}\Delta t_k)$, jejich plochu spočteme pomocí determinantu Gramovy matice a součtem jejich ploch aproximujeme obsah dané plochy. Analogicky si můžeme představit plošný integrál prvního druhu alespoň pro hladké funkce f.

Příklad 17.2.25. Zatímco předchozí příklad spíše ukazoval, že je třeba jisté opatrnosti při správné volbě „elementárního povrchu“ a ne každá volba vede ke správnému výsledku, v tomto příkladu si ukážeme, že výše zavedený pojem k-rozměrného plošného obsahu, alespoň pro případ $k = N-1$, je rozumný.

Nechť M je jednoduchá $N-1$-plocha v $\mathbb{R}^N$, parametrizovaná pomocí zobrazení $\boldsymbol{\varphi}\colon D \subset \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}^N$. Z technických důvodů (i když je příliš nebudeme vysvětlovat) předpokládejme, že $\boldsymbol{\varphi} \in C^2(D;\mathbb{R}^N)$, kde D je omezená a otevřená. Označme $\boldsymbol{\nu} =$

$\frac{\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}}{\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}\|}$ jednotkový normálový vektor k ploše M, kde $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_1}, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_2}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_{N-1}}\right]$. Označme

$$V_h := \Big\{x \in \mathbb{R}^N : x = \boldsymbol{\varphi}(t) + \varrho\boldsymbol{\nu}(t), t \in D, \varrho \in (0,h)\Big\}$$

a ukažme, že platí $\lim_{h\to 0+} \frac{\lambda_N(V_h)}{h} = S_{N-1}(M)$. Tento výsledek se někdy nazývá věta o námraze.

Požadavek $\boldsymbol{\varphi} \in C^2(D;\mathbb{R}^N)$ zaručuje, že pro dostatečně malé $h > 0$ je zobrazení $\boldsymbol{\psi}(t,\varrho) := \boldsymbol{\varphi}(t) + \varrho\boldsymbol{\nu}(t)$ prosté regulární zobrazení množiny $D \times (-h,h) \to V_h \cup V_{-h} \cup M$, to ale nebudeme ověřovat. Všimněme si, že

$$\begin{aligned}
\Big|\det \frac{D\boldsymbol{\psi}}{D(t,\varrho)}\Big| &= \Big|\det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_1} + \varrho\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_{N-1}} + \varrho\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial t_{N-1}}, \boldsymbol{\nu}\Big)\Big| \\
&= \Big|\boldsymbol{\nu}\cdot\Big[\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_{N-1}}\Big]\Big| + \varrho K(t,\varrho) \\
&= \|\boldsymbol{\nu}\|\Big\|\Big[\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_{N-1}}\Big]\Big\| + \varrho K(t,\varrho),
\end{aligned}$$

kde $K(t,\varrho)$ je omezená funkce na $D \times (0,h)$. Proto

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_N(V_h)}{h} &= \frac{1}{h}\int_{D\times(0,h)} \Big|\det \frac{D\boldsymbol{\psi}}{D(t,\varrho)}\Big| \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varrho \\
&= \frac{1}{h}\int_{D\times(0,h)} \|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}\| \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varrho + \frac{1}{h}\int_{D\times(0,h)} \varrho K(t,\varrho)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varrho.
\end{aligned}$$

Máme tedy

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\lambda_N(V_h)}{h} = \int_D \|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}\|\,\mathrm{d}t = \int_D \Big\|\Big[\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_{N-1}}\Big]\Big\|\,\mathrm{d}t = S_{N-1}(M).$$

17.2.6 Plošný integrál prvního druhu přes zobecněné k-plochy

Naše dosavadní terminologie nás přiváděla do podivných situací, kdy jsme kupříkladu uměli spočítat povrch jednotkové sféry po vynechání jednoho poledníku, ale povrch celé jednotkové sféry jsme spočítat nedokázali. Zde podobný typ problémů odstraníme.

Definice 17.2.26 (Zobecněná k-plocha)**.** Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k < N$ a $M \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že M je *zobecněná k-plocha*, jestliže existuje $m \in \mathbb{N}$ a množiny $M_1, \dots, M_m$ takové, že

(i) $M = \bigcup_{i=1}^m M_i$

(ii) pro každé $i \in \{1,\dots,m\}$ je M_i k_i-plocha, kde $0 \le k_i \le k$

(iii) existuje alespoň jedno $i \in \{1,\dots,m\}$ takové, že $k_i = k$

(iv) pro každé $i \in \{1,\dots,m\}$ splňující $k_i = k$ je M_i jednoduchá

(v) pro každé $i \in \{1,\dots,m\}$ splňující $k_i = k$ platí $M_i \cap \bigcup_{\{j\in\{1,\dots,m\}:\, j\neq i\}} \overline{M}_j = \emptyset$.

Systém $\{M_i\}$ s vlastnostmi uvedenými výše se nazývá *rozklad* zobecněné k-plochy M a jednotlivým množinám M_i budeme říkat *(k_i-dimenzionální) komponenty.*

Definice 17.2.27 (Plošný integrál prvního druhu přes zobecněnou k-plochu)**.** Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k < N$, $M \subset \mathbb{R}^N$ je zobecněná k-plocha, $M_1, \dots, M_m$ je její rozklad a $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na M. Pak definujeme *plošný integrál prvního druhu* z f přes M jako

$$\int_M f \,\mathrm{d}S := \sum_{\{i \in \{1,\dots,m\}\colon\, k_i = k\}} \int_{M_i} f \,\mathrm{d}S,$$

pokud má pravá strana smysl, a *k-rozměrným plošným obsahem* nazýváme

$$S_k(M) := \sum_{\{i \in \{1,\dots,m\}\colon\, k_i = k\}} S_{k_i}(M_i).$$

Příklad 17.2.28. Jednotková sféra v $\mathbb{R}^3$ se dá rozložit na nám již dobře známou sféru bez jednoho poledníku, poledník bez pólů a dva póly. Celkově tedy máme jednu jednoduchou 2-plochu, jednu jednoduchou 1-plochu a dvě 0-plochy, přičemž dvourozměrný plošný obsah ovlivňuje jen první z uvedených množin. První z uvedených množin se týkají podmínky (iv) a (v) z definice zobecněné k-plochy a zřejmě jsou splněny.

Povšimněte si, že zde podmínka

$$M_i \cap \bigcup_{\{j \in \{1,\dots,4\}\colon\, j \neq i\}} \overline{M}_j = \emptyset$$

platí pouze pro $i = 1$.

Předchozí definice jsou rozumné v tom smyslu, že zavedené veličiny nezávisí na rozkladu.

Věta 17.2.29 (O nezávislosti na rozkladu)**.** *Plošný integrál prvního druhu přes zobecněnou k-plochu nezávisí na rozkladu.*

Důkaz. Nechť na M máme dva rozklady $M_1, \dots, M_m$ a $N_1, \dots, N_n$, kde množiny $\{M_i\}_{i=1}^m$ jsou parametrizovány pomocí $\{(\boldsymbol{\varphi}_i, E_i)\}_{i=1}^m$ a množiny $\{N_j\}_{j=1}^n$ jsou parametrizovány pomocí $\{(\boldsymbol{\psi}_j, F_j)\}_{j=1}^n$ (definice 0-ploch sice parametrizaci nepoužívá, ale pro sjednocení zápisu se třeba domluvme, že zde parametrizujeme přiřazením našeho bodu číslu $0 \in \mathbb{R}$; uvedené zobrazení nemá otevřený definiční obor a další standardní vlastnosti, ale my s ním stejně pracovat nebudeme). Nechť navíc čísla $\{k_i\}_{i=1}^m$ a $\{l_j\}_{j=1}^n$ mají ten význam, že M_i je k_i-plocha a N_j je l_j-plocha.

Pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ a $j \in \{1, \dots, n\}$ dále definujme množiny

$$P_{i,j} := M_i \cap N_j.$$

Takovéto množiny umíme parametrizovat dvěma způsoby. Jednak pomocí parametrizace $(\boldsymbol{\varphi}_i, E_{i,j})$, kde $E_{i,j} := \boldsymbol{\varphi}_i^{-1}(P_{i,j})$, a jednak pomocí $(\boldsymbol{\psi}_j, F_{i,j})$, kde $F_{i,j} := \boldsymbol{\psi}_j^{-1}(P_{i,j})$. Naším cílem je ukázat, že

$$\begin{aligned}\sum_{\{i \in \{1,\dots,m\}\colon\, k_i = k\}} \int_{M_i} f \,\mathrm{d}S &= \sum_{\{i \in \{1,\dots,m\}, j \in \{1,\dots,n\}\colon\, k_i = k, l_j = k\}} \int_{P_{i,j}} f \,\mathrm{d}S \\ &= \sum_{\{j \in \{1,\dots,n\}\colon\, l_j = k\}} \int_{N_j} f \,\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

Dále si v několika krocích dokážeme první rovnost. Druhá rovnost pak bude platit analogicky. Nejprve si povšimněme, že pokud pro nějaké $i \in \{1, \dots, m\}$ platí $k_i < k$, jemu odpovídající sčítanci jsou vynecháni na obou stranách dokazované rovnosti. Proto nám stačí pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ splňující $k_i = k$ dokázat

$$\int_{M_i} f \,\mathrm{d}S = \sum_{\{j \in \{1,\dots,n\}:\ l_j = k\}} \int_{P_{i,j}} f \,\mathrm{d}S. \tag{17.2.3}$$

Krok 1: případ $l_j = k$.
Zde dokážeme, že $P_{i,j}$ je jednoduchá k-plocha parametrizovaná pomocí $(\boldsymbol{\varphi}_i, E_{i,j})$, kdykoliv $P_{i,j} \neq \emptyset$. Nejprve potřebujeme ukázat, že $E_{i,j}$ je otevřená množina. Pro spor předpokládejme, že tomu tak není. Pak existuje prvek $t \in E_{i,j}$, který není vnitřním bodem $E_{i,j}$. Protože zároveň máme $E_{i,j} \subset E_i$ a E_i je otevřená, je možné sestrojit posloupnost $\{t_k\} \subset E_i \setminus E_{i,j}$ takovou, že $t_k \to t$. To však znamená, že $\boldsymbol{\varphi}_i(t) \in P_{i,j} \subset N_j$ a

$$\{\boldsymbol{\varphi}_i(t_k)\} \subset \bigcup_{p \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j\}} P_{i,p} \subset \bigcup_{p \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j\}} N_p.$$

Navíc $\boldsymbol{\varphi}_i$ je spojité na E_i a proto $\boldsymbol{\varphi}_i(t_k) \to \boldsymbol{\varphi}(t)$. Odtud

$$\boldsymbol{\varphi}(t) \in \overline{\bigcup_{p \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j\}} N_p} = \bigcup_{p \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j\}} \overline{N}_p,$$

čímž jsme dostali spor s požadavkem (v) z definice zobecněné k-plochy. Ostatní vlastnosti jednoduché k-plochy (C^1-parametrizace, regularita Jacobiho matice, prostota a spojitost inverze) ihned plynou z toho, že parametrizujeme $P_{i,j}$ pomocí restrikce zobrazení φ na $E_{i,j}$, přičemž $\boldsymbol{\varphi}$ má požadované vlastnosti na $E_i \supset E_{i,j}$.

Krok 2: případ $l_j < k$.
V tomto případě platí $E_{i,j} = \vec{\varphi}_i^{-1}(P_{i,j}) = \vec{\varphi}_i^{-1}(\boldsymbol{\psi}_j(F_{i,j}))$. Díky Větě o implicitní funkci (Věta 12.4.13) je $\vec{\varphi}_i^{-1} \circ \boldsymbol{\psi}_j \in C^1(F_{i,j}; \mathbb{R}^k)$ (podrobné odvození lze převzít z druhého kroku důkazu Věty o nezávislosti plošného integrálu prvního druhu na parametrizaci, tedy Věty 17.2.10). Pomocí tohoto zobrazení definujme zobrazení $\vec{\eta}\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ splňující $\vec{\eta} \in C^1(F_{i,j} \times \mathbb{R}^{k-l_j}; \mathbb{R}^k)$ tak, že se na první l_j-tici proměnných vypustí zobrazení $\vec{\varphi}_i^{-1} \circ \boldsymbol{\psi}_j$ a s ostatními proměnnými zobrazení nepracuje. Následně $\vec{\eta}$ je lokálně lipschitzovské (stejně jako $\vec{\varphi}_i^{-1} \circ \boldsymbol{\psi}_j$) a $E_{i,j} = \eta(F_{i,j} \times \{(0, \dots, 0)\})$. Protože $\lambda_k(F_{i,j} \times \{(0, \dots, 0)\}) = 0$, Důsledek o míře obrazu při lipschitzovském zobrazení (Důsledek 15.12.9) nám dává $\lambda_k(E_{i,j}) = 0$.

Krok 3: závěrečný výpočet.
Díky výsledkům získaným v předchozích krocích máme

$$\begin{aligned}
\int_{M_i} f \,\mathrm{d}S &= \int_{E_i} f(\boldsymbol{\varphi}_i(t)) \sqrt{\det \mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}_i(t))} \,\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{n} \int_{E_{i,j}} f(\boldsymbol{\varphi}_i(t)) \sqrt{\det \mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}_i(t))} \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{\{j \in \{1,\dots,n\}:\ l_j = k\}} \int_{E_{i,j}} f(\boldsymbol{\varphi}_i(t)) \sqrt{\det \mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}_i(t))} \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{\{j \in \{1,\dots,n\}:\ l_j = k\}} \int_{P_{i,j}} f \,\mathrm{d}S.
\end{aligned}$$

Tím jsme dokázali (17.2.3) a jsme hotovi. □

Příklad 17.2.30 („Sférická“ Fubiniho věta)**.** Nechť $R > 0$, $B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená koule a $f \in C(B_R(0)) \cap L^1(B_R(0))$. Ukažme, že platí

$$\int_{B_R(0)} f \, \mathrm{d}\lambda_3 = \int_0^R \Big(\int_{\partial B_r(0)} f \, \mathrm{d}S \Big) \, \mathrm{d}\lambda_1(r).$$

Nejprve si upravíme levou stranu pomocí sférických souřadnic

$$\boldsymbol{\varphi} \colon (r, \psi, \eta) \mapsto (r \cos\psi \cos\eta, r \cos\psi \sin\eta, r \sin\psi),$$

kde $r \in (0, \infty)$, $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a $\eta \in (0, 2\pi)$. Snadno se spočítá, že $|\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}| = r^2 \cos\psi$. Díky tomu, Větě o substituci se standardním vynecháním množiny nulové míry a Fubiniho větě dostáváme

$$\int_{B_R(0)} f \, \mathrm{d}\lambda_3 =$$

$$\int_0^R \Big(\int_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi)} f(r \cos\psi \cos\eta, r \cos\psi \sin\eta, r \sin\psi) r^2 \cos\psi \mathrm{d}\lambda_2(\psi, \eta) \Big) \, \mathrm{d}\lambda_1(r).$$

Zbývá vysvětlit, že pro každé pevné $r \in (0, R)$ máme

$$\int_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi)} f(r \cos\psi \cos\eta, r \cos\psi \sin\eta, r \sin\psi) r^2 \cos\psi \mathrm{d}\lambda_2(\psi, \eta) = \int_{\partial B_r(0)} f \, \mathrm{d}S.$$

Sféru $\partial B_r(0)$ zde vnímáme jako zobecněnou 2-plochu, jejíž jediná dvojdimenzionální komponenta je parametrizována pomocí

$$\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(\psi, \eta) := (r \cos\psi \cos\eta, r \cos\psi \sin\eta, r \sin\psi),$$

kde $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a $\eta \in (0, 2\pi)$. Jacobiho matice a z ní odvozená Gramova matice pak jsou

$$D\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(\psi, \eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \widetilde{\varphi}_1}{\partial \psi} & \frac{\partial \widetilde{\varphi}_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \widetilde{\varphi}_2}{\partial \psi} & \frac{\partial \widetilde{\varphi}_2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \widetilde{\varphi}_3}{\partial \psi} & \frac{\partial \widetilde{\varphi}_3}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin\psi \cos\eta & -r \cos\psi \sin\eta \\ -r \sin\psi \sin\eta & r \cos\psi \cos\eta \\ r \cos\psi & 0 \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbb{G}(D\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(\psi, \eta)) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \cos^2\psi \end{pmatrix}.$$

Odtud máme

$$\sqrt{\det G(D\widetilde{\varphi}(\psi, \eta))} = \sqrt{r^4 \cos^2\psi} = r^2 |\cos\psi| = r^2 \cos\psi,$$

což jsme chtěli ukázat.

Analogicky je možné postupovat pro libovolnou dimenzi $N \geq 2$.

17.3 Integrální věty

17.3.1 Gauss–Ostrogradského věta a její důsledky

V dalším se budeme zabývat vícerozměrnými analogiemi Newtonova vzorce. Základní myšlenka našich konstrukcí bude založena na zkombinování jednorozměrné Newtonovy formule s Fubiniho větou (Věta 15.11.2). Ukažme si ji na jednoduchém příkladu, kde budeme pro $x \in \mathbb{R}^N$ používat značení $x = (x', x_N)$ (tedy $x' = (x_1, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$).

Příklad 17.3.1. Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, $\Omega := (-1,1)^N$ a $F \in C^1(\overline{\Omega})$. Pak máme díky Fubiniho větě (Věta 15.11.2)

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x_N}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{(-1,1)^{N-1}} \int_{(-1,1)} \frac{\partial F}{\partial x_N}(x', x_N)\,\mathrm{d}x_N\,\mathrm{d}x' \\ &= \int_{(-1,1)^{N-1}} \big(F(x',1) - F(x',-1)\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{(-1,1)^{N-1}\times\{1\}} F\,\mathrm{d}S - \int_{(-1,1)^{N-1}\times\{-1\}} F\,\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

Povšimněme si ještě, že pokud ke každému bodu každé $(N-1)$-dimenzionální komponenty $\partial\Omega$ přiřadíme jeho jednotkový normálový vektor $\boldsymbol{\nu}$ mířící v tomto bodě ven z množiny Ω, na horní podstavě dostáváme normálový vektor $\boldsymbol{\nu} = (0, \dots, 0, 1)$, na dolní podstavě $\boldsymbol{\nu} = (0, \dots, 0, -1)$ a na zbývajících stěnách má normálový vektor nulovou poslední složku. Proto můžeme námi získaný výsledek psát jako (připomeňme, že při integraci přes zobecněnou k-plochu se nehledí na komponenty nižší dimenze, než je k)

$$\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x_N}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} F\nu_N\,\mathrm{d}S.$$

Takový výsledek samozřejmě platí i pro libovolný kvádr. Navíc zobecňuje Newtonovu formuli pro $F \in C^1([a,b])$, neboť pravou stranu rovnosti

$$\int_{(a,b)} F'\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

lze interpretovat jako integrály z funkce F přes množiny $\{a\}$ a $\{b\}$ vzhledem k aritmetické míře a roli normálového vektoru zde přebírají jednorozměrné vektory -1 a 1 mířící v odpovídajících hraničních bodech ven z intervalu (a,b).

V případě složitější množiny bude mít vnější normálový vektor významnější roli, než jen jednotlivým komponentám přiřazovat čísla z množiny $\{-1, 0, 1\}$. Nejprve si jej řádně zadefinujme.

Definice 17.3.2 (Vnější normálový vektor k zobecněné $(N-1)$-ploše)**.** Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je množina, pro niž je $\partial\Omega$ zobecněná $(N-1)$-plocha. Nechť $x \in \partial\Omega$ je bodem nějaké $(N-1)$-dimenzionální komponenty množiny $\partial\Omega$ a $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^N$ je vektor.

Řekneme, že $\boldsymbol{\nu}$ je *normálový vektor* k $\partial\Omega$ v bodě x, jestliže $\boldsymbol{\nu}$ je normálovým vektorem k tečné rovině uvedené komponenty v bodě x.

Jestliže navíc $\|\boldsymbol{\nu}\| = 1$, řekneme, že $\boldsymbol{\nu}$ je *jednotkový normálový vektor*.

Dále řekneme, že $\boldsymbol{\nu}$ je *vnější normálový vektor* k $\partial\Omega$ v bodě x, jestliže $\boldsymbol{\nu}$ je normálový vektor k $\partial\Omega$ v bodě x a existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\{x + t\boldsymbol{\nu} \colon t \in (0, \delta)\} \cap \Omega = \emptyset.$$

Podle definice jednoduché k-plochy a našich výsledků z oddílu o vektorovém součinu máme v předešlé situaci na každé $(N-1)$-dimenzionální komponentě množiny $\partial\Omega$ k dispozici normálový vektor (zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ parametrizuje naši komponentu)

$$\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}} := \Big[\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t_{N-1}}(t)\Big].$$

Připomeňme ještě, že při explicitním zadání plochy pomocí zobrazení

$$\boldsymbol{\varphi} \colon (t_1, \dots, t_{N-1}) \mapsto (t_1, \dots, t_{N-1}, f(t_1, \dots, t_{N-1}))$$

nám vyšlo

$$\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}} = \Big(-\frac{\partial f}{\partial t_1}(t), \dots, -\frac{\partial f}{\partial t_{N-1}}(t), 1\Big).$$

Nyní můžeme přistoupit k hlavnímu výsledku tohoto oddílu.

Věta 17.3.3 (Gauss–Ostrogradského věta)**.** *Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená otevřená množina, jejíž hranice je zobecněná $(N-1)$-plocha splňující $S_{N-1}(\partial\Omega) < \infty$, a pro kterou v každém bodě x každé její $(N-1)$-dimenzionální komponenty existuje jednotkový vnější normálový vektor $\boldsymbol{\nu}(x)$. Dále nechť $i \in \{1, \dots, N\}$ a $F \in C(\overline{\Omega})$ je taková, že $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ existuje všude v Ω a dá se spojitě rozšířit na $\overline{\Omega}$. Pak*

$$\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} F\nu_i\,\mathrm{d}S.$$

Poznámka 17.3.4. Spojité rozšíření zmíněné ve větě znamená, že existuje $H \in C(\overline{\Omega})$ splňující $H = \frac{\partial F}{\partial x_i}$ na Ω.

Důkaz Gauss–Ostrogradského věty je velice dlouhý a technický. Odložíme jej na konec oddílu a budeme se věnovat poznámkám, příkladům a důsledkům. Přesto si neodpustíme ukázat, že u množin typu koule, polokoule, válce, kuželu, atd., lze důkaz získat jen drobnou modifikací postupu z úvodního příkladu.

Důkaz Gauss–Ostrogradského věty (Věta 17.3.3) pro „hezké“ množiny. Předpokládejme, že $i = N$, a pro množinu Ω platí

$$\Omega = \{(x', x_N) \colon x' \in E, g(x') < x_N < h(x')\},$$

kde $E \subset \mathbb{R}^{N-1}$ je omezená otevřená množina, jejíž hranice je zobecněná $(N-2)$-plocha, $g, h \in C^1(E) \cap C(\overline{E})$ a platí $g < h$ na E.

Hranici $\partial\Omega$ nyní můžeme popsat jako

$$\partial\Omega = M \cup P \cup U_1 \cup \cdots \cup U_m \cup V,$$

kde $M := \{(x', h(x'))\colon x' \in E\}$, $P := \{(x', g(x'))\colon x' \in E\}$, množiny U_j, $j = 1, \ldots, m$, jsou části pláště odpovídající $(N-2)$-dimenzionálním komponentám množiny ∂E (bez bodů na grafech funkcí g a h) a V obsahuje zbylé části hranice (podrobnější popis těchto množin je uveden v závěrečné části důkazu).

Potom díky Fubiniho větě (Věta 15.11.2) dostáváme

$$\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x_N}\,\mathrm{d}x = \int_E \int_{g(x')}^{h(x')} \frac{\partial F}{\partial x_N}\,\mathrm{d}x_N\,\mathrm{d}x' = \int_E F(x', h(x'))\,\mathrm{d}x' - \int_E F(x', g(x'))\,\mathrm{d}x'.$$

Nyní u plochy M zadané explicitně grafem funkce h máme normálový vektor $\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}}{\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}\|}$, kde $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}} = (-\frac{\partial h}{\partial t_1}(t), \ldots, -\frac{\partial h}{\partial t_{N-1}}(t), 1)$, a díky roli normálového vektoru v plošném elementu $\det \mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}) = \|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}\|^2$ dostáváme

$$\begin{aligned}\int_E F(x', h(x'))\,\mathrm{d}x' &= \int_E F(x', h(x')) \frac{1}{\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(x')\|} \|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(x')\|\,\mathrm{d}x' \\ &= \int_E F(x', h(x'))\nu_N(x')\sqrt{\det \mathbb{G}(D\boldsymbol{\varphi}(x'))}\,\mathrm{d}x' = \int_M F\nu_N\,\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

Analogický výsledek platí pro P, ale s obráceným znaménkem (jednotkový vnější normálový vektor zde má poslední složku $\frac{-1}{\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(x')\|}$). Proto z předchozího dostáváme

$$\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x_N}\,\mathrm{d}x = \int_M F\nu_N\,\mathrm{d}S + \int_P F\nu_N\,\mathrm{d}S.$$

Zbývá dokázat

$$\int_V F\nu_N\,\mathrm{d}S = 0 \qquad \text{a} \qquad \int_{U_j} F\nu_N\,\mathrm{d}S = 0 \quad \text{pro všechna } j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Pak totiž budeme mít

$$\int_{\partial\Omega} F\nu_N\,\mathrm{d}S = \int_M F\nu_N\,\mathrm{d}S + \int_P F\nu_N\,\mathrm{d}S.$$

Zafixujme $j \in \{1, \ldots, m\}$ a zabývejme se integrálem přes množinu

$$U_j := \{(x', x_N)\colon x' \in E_j, g(x') < x_N < h(x')\},$$

kde $E_j \subset \partial E$ je jednoduchá $(N-2)$-plocha. Existuje proto její parametrizace

$$\vec{\varphi}_j\colon (t_1, \ldots, t_{N-2}) \in A_j \mapsto \vec{\varphi}_j(t_1, \ldots, t_{N-2}) \in E_j$$

pomocí otevřené množiny $A_j \subset \mathbb{R}^{N-2}$. Navíc (teď se vypořádáme s tím, že na části E_j se může g rovnat h) zobrazení $t \mapsto h(\boldsymbol{\varphi}(t)) - g(\boldsymbol{\varphi}(t))$ je spojité na A_j, a proto je množina $\widetilde{A}_j := A_j \setminus \{g(\boldsymbol{\varphi}(t)) = h(\boldsymbol{\varphi}_(t))\}$ otevřená. Parametrizaci z množiny $\widetilde{A}_j$ rozšíříme na

$$\boldsymbol{\Phi}_j\colon (t_1,\dots,t_{N-2},t_N) \mapsto (\vec{\varphi}_j(t_1,\dots,t_{N-2}),t_N).$$

Dostáváme (rozmyslete si, co se stalo s Jacobiho maticí a jejím determinantem, a že U_j je obrazem otevřené podmnožiny množiny $\widetilde{A}_j \times \mathbb{R}$), že takto parametrizovaná U_j je jednoduchá $(N-1)$-plocha, můžeme přes ni integrovat, a protože poslední složka normálového vektoru je nulová (při rozšiřování $\vec{\varphi}_j$ na $\boldsymbol{\Phi}_j$ vznikl nový tečný vektor $(0,\dots,0,1)$ a $\boldsymbol{\nu}$ je na něj kolmý), dostáváme nulový integrál.

Zbývá se postarat o množinu V. Ta je tvořena třemi typy podmnožin. Jednak jsou to množiny typu

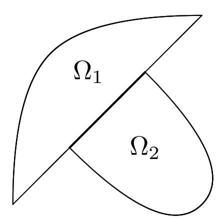
$$V_l := \{(x',x_N)\colon x' \in E_l, g(x') < x_N < h(x')\},$$

kde $E_l \subset \partial E$ je k-plocha s $k < N-2$. Modifikací její parametrizace jako výše se ukáže, že V_l je $k+1$ plocha a její příspěvek do plošné integrálu je proto nulový. Zbytek množiny V je pokryt množinami

$$\{(x',g(x'))\colon x' \in \partial E)\} \qquad \text{a} \qquad \{(x',h(x'))\colon x' \in \partial E)\}.$$

Snadno se nahlédne, že díky předpokladům na ∂E se jedná o zobecněné $(N-2)$-plochy (k parametrizacím kousků ∂E přidáváme N-tou složku závislou na ostatních souřadnicích), příspěvek do plošného integrálu je proto opět nulový. $\square$

Poznámka 17.3.5. Množiny, pro které bylo možné použít uvedený důkaz Gauss–Ostrogradského věty (Věta 17.3.3), je možně „slepovat“ jako na Obrázku 17.4.



Obrázek 17.4: Ilustrace ke slepování množin a Gauss–Ostrogradského větě.

V úseku, kde se hranice množin překrývají, budou mít množiny na obrázku vzájemně opačný normálový vektor, a proto se plošné integrály přes tuto část hranice vyruší. Novou množinu Ω zde však nemůžeme definovat jako $\Omega_1 \cup \Omega_2$, ale musíme přidat i onu „překrývající se“ část hranice, jinak bychom zde neměli vnější normálový vektor. Jedná se zde o přidání množiny nulové N-rozměrné Lebesgueovy míry, což nebude mít vliv na $\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x$.

Dále se budeme věnovat důsledkům Gauss–Ostrogradského věty (Věta 17.3.3). První se týká *divergence* vektorového pole $\boldsymbol{T}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, která je definována předpisem (pokud existují zúčastněné parciální derivace)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{T} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial T_i}{\partial x_i}.$$

Věta 17.3.6 (Věta o divergenci)**.** *Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená otevřená množina, jejíž hranice je zobecněná $(N-1)$-plocha splňující $S_{N-1}(\partial\Omega) < \infty$ a pro kterou v každém bodě x každé její $(N-1)$-dimenzionální komponenty existuje jednotkový vnější normálový vektor $\boldsymbol{\nu}(x)$. Nechť $\boldsymbol{T} \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ je takové vektorové pole, že pro všechna $i \in \{1, \dots, N\}$ všude v Ω existuje $\frac{\partial T_i}{\partial x_i}$ a dá se spojitě rozšířit na $\overline{\Omega}$. Pak*

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{T} \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{\nu} \, \mathrm{d}S.$$

Důkaz. Na i-tou složku vektorového pole $\boldsymbol{T}$ aplikujeme Gauss–Ostrogradského větu (Věta 17.3.3) s parciální derivací $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Pak už stačí jen vysčítat získané formule přes $i \in \{1, \dots, N\}$. □

Poznámka 17.3.7. (i) Integrálu na pravé straně závěrečné rovnosti ve Větě o divergenci (Věta 17.3.6) se říká *plošný integrál druhého druhu* (plošný integrál prvního druhu přes zobecněnou $(N-1)$-plochu ze skalárního součinu vektorového pole a jednotkového vnějšího normálového vektoru). Reprezentuje tok veličiny $\boldsymbol{T}$ přes plochu $\partial\Omega$ (roli hraje jen průmět do normálového směru k $\partial\Omega$).
(ii) Pro $N = 3$ se používá ještě jeden zápis plošného integrálu druhého druhu

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{\nu} \, \mathrm{d}S =: \int_{\partial\Omega} T_1 \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z + T_2 \, \mathrm{d}z\mathrm{d}x + T_3 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Ukažme si, jak se interpretuje pravá strana. Nechť je $\partial\Omega$ parametrizována zobrazením $\boldsymbol{\varphi}\colon E \to \mathbb{R}^3$. Pak máme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}} &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2} & \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2} & \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_2} & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \\
&= \Big(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}\frac{\partial\varphi_3}{\partial t_2} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2}\frac{\partial\varphi_3}{\partial t_1}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}, \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1} \Big).
\end{aligned}$$

Předpokládejme například, že se jedná o vnější normálový vektor. Pak máme $\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}}{\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}\|}$. Nyní symboly $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ formálně interpretujeme způsobem, který si předvedeme třeba na třetím z nich. Symboly $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ budeme interpretovat jako diferenciály odpovídajících složek zobrazení φ, následně provedeme formální násobení, které se bude řídit pravidly pro práci se sloupci matice uvnitř determinantu ($\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_1 = 0$, $\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_2 = 0$ a $\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1 = -\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2$) a v závěru výpočtu použijeme výše odvozený zápis $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}$ po složkách

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x\mathrm{d}y &:= \Big(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} \, \mathrm{d}t_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2} \, \mathrm{d}t_2 \Big)\Big(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1} \, \mathrm{d}t_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2} \, \mathrm{d}t_2 \Big) \\
&= \Big(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1} \Big) \, \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 = (w_{\boldsymbol{\varphi}})_3 \, \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2
\end{aligned}$$

(jinými slovy, výše naznačený kalkulus se symboly typu $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ odpovídá počítání vektorového součinu). Analogicky se upraví ostatní složky integrandu a dostáváme

$$T_1\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + T_2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + T_3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\nu}\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}\|.$$

Napravo nám „přebývá“ plošný element $\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}\|$, na to je nutné u takto zadaných plošných integrálů druhého druhu nezapomínat. Blíže se integrálům tohoto typu budeme věnovat v následující kapitole věnované diferenciálním formám.

(iii) Plošný integrál druhého druhu je možné zavést i u jednoduchých ploch, které nejsou hranicí nějaké nějaké množiny. Pak se nám ovšem ve všech bodech plochy nabízí dvojice vzájemně opačných jednotkových normálových vektorů. Je nutné vybrat spojité pole těchto jednotkových normálových vektorů a tím plochu *orientovat*. Více bude této problematice věnováno v oddíle o Stokesově větě a v úvodní části důkazu obecné verze Gauss–Ostrogradského věty (Věta 17.3.3), případně v další kapitole věnované diferenciálním formám.

Věta o divergenci se dá použít také k počítání míry množiny.

Důsledek 17.3.8 (O výpočtu míry množiny pomocí integrace přes hranici)**.** *Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená otevřená množina, jejíž hranice je zobecněná $(N-1)$-plocha splňující $S_{N-1}(\partial\Omega) < \infty$ a pro kterou v každém bodě x každé její $(N-1)$-dimenzionální komponenty existuje jednotkový vnější normálový vektor $\nu(x)$. Nechť $\boldsymbol{T} \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ je takové vektorové pole, že pro všechna $i \in \{1,\dots,N\}$ všude v Ω existuje $\frac{\partial T_i}{\partial x_i}$ a dá se spojitě rozšířit na $\overline{\Omega}$. Jestliže navíc platí $\operatorname{div}\boldsymbol{T} \equiv 1$ na Ω, pak*

$$\lambda_N(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}S.$$

Poznámka 17.3.9. Požadavek $\operatorname{div}\mathbf{T} \equiv 1$ splňují kupříkladu pole $(x_1,\dots,x_N) \mapsto (x_1,0,\dots,0)$, $(x_1,\dots,x_N) \mapsto (0,x_2,0,\dots,0)$, atd., nebo i pole $(x_1,\dots,x_N) \mapsto (\frac{x_1}{N},\dots,\frac{x_N}{N})$.

Příklad 17.3.10. Uvažme pole $\boldsymbol{T}\colon (x_1,\dots,x_N) \mapsto (\frac{x_1}{N},\dots,\frac{x_N}{N})$ a množinu $\Omega = B_1(0)$, tedy jednotkovou kouli. Její hranice je jednotková sféra, kterou pro případ $N=3$ parametrizujeme pomocí sférických souřadnic

$$\boldsymbol{\varphi}\colon (\eta,\psi) \mapsto (\cos\psi\cos\eta, \cos\psi\sin\eta, \sin\psi), \qquad \text{kde } \eta \in (0,2\pi), \psi \in (-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}).$$

Tečný prostor je určen vektory

$$(-\cos\psi\sin\eta, \cos\psi\cos\eta, 0) \qquad \text{a} \qquad (-\sin\psi\cos\eta, -\sin\psi\sin\eta, \cos\psi).$$

Jejich vektorovým součinem dostáváme normálový vektor

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}} &= \det\begin{pmatrix} -\cos\psi\sin\eta & -\sin\psi\cos\eta & \mathbf{e}_1 \\ \cos\psi\cos\eta & -\sin\psi\sin\eta & \mathbf{e}_2 \\ 0 & \cos\psi & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \\ &= (\cos^2\psi\cos\eta, \cos^2\psi\sin\eta, \cos\psi\sin\psi) = \cos\psi(\cos\psi\cos\eta, \cos\psi\sin\eta, \sin\psi).\end{aligned}$$

Dostali jsme očekávaný výsledek, že jednotková vnější normála v bodě $x \in \partial B_1(0)$ je rovna x, tedy polohovému vektoru. Proto

$$\begin{aligned}\lambda_3(B_1(0)) &= \int_{\partial B_1(0)} \frac{(x_1,x_2,x_3)}{3} \cdot (x_1,x_2,x_3)\,\mathrm{d}S = \frac{1}{3}\int_{\partial B_1(0)} \|x\|^2\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{3}\int_{\partial B_1(0)} 1\,\mathrm{d}S = \frac{1}{3}S_2(\partial B_1(0)) = \frac{4}{3}\pi.\end{aligned}$$

Pro případ $N \geq 4$ či $N = 2$ bychom mohli postupovat analogicky, využitím Příkladu 16.1.8. Důkaz toho, že normálový vektor k S_{N-1} je x, by byl technicky komplikovaný. Lze ale postupovat jinak. Uvažujme funkci $f(x) = \|x\|^2$. Tato funkce je konstantní podél jednotkové sféry, tudíž její derivace ve směru libovolného vektoru tečné roviny k S_{N-1} je v libovolném bodě této sféry nulová. Proto má gradient tohoto pole, tedy $2(x_1 \dots, x_N)$, směr normály. Jednotkový vektor vnější normály je proto zřejmě vektor $(x_1, \dots, x_N)$.

Můžeme tedy zopakovat výpočet z případu $N = 3$ a dostáváme

$$\begin{aligned}\lambda_N(B_1(0)) &= \int_{\partial B_1(0)} \frac{(x_1,\dots,x_N)}{N} \cdot (x_1,\dots,x_N)\,\mathrm{d}S = \frac{1}{N}\int_{\partial B_1(0)} \|x\|^2\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{N}\int_{\partial B_1(0)} 1\,\mathrm{d}S = \frac{1}{N}S_{N-1}(\partial B_1(0)).\end{aligned}$$

Proto máme

$$S_{N-1}(\partial B_1(0)) = \begin{cases} \frac{2^{\frac{N+1}{2}}\pi^{\frac{N-1}{2}}}{1\cdot 3\cdot 5\dots(N-2)} & \text{pro } N \text{ liché} \\ \frac{N\pi^{\frac{N}{2}}}{(\frac{N}{2})!} & \text{pro } N \text{ sudé.} \end{cases}$$

Příklad 17.3.11. Připomeňme, že pro $C^2(\mathbb{R}^N)$-funkci u je Laplaceův operátor $\Delta u = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Potom

$$\operatorname{div} \nabla u = \Delta u \qquad \text{a} \qquad \operatorname{div}(u\nabla u) = u\Delta u + \|\nabla u\|^2.$$

Pro libovolnou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ splňující předpoklady Věty o divergenci (Věta 17.3.6) tedy platí

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu\,\mathrm{d}S = \int_\Omega \Delta u\,\mathrm{d}x \qquad \text{a} \qquad \int_{\partial\Omega} u\nabla u \cdot \nu\,\mathrm{d}S = \int_\Omega (u\Delta u + \|\nabla u\|^2)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 17.3.12. Pomocí Věty o divergenci (Věta 17.3.6) spočtěme

$$I := \int_{\mathbb{R}\times(0,\infty)} \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y).$$

Předně díky Lebesgueově větě o monotonní konvergenci (Věta 15.7.6) máme

$$I \leftarrow I_n := \int_{B_n(0)\cap\{y>0\}} \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y).$$

Podle Věty o divergenci pak platí

$$\begin{aligned}I_n &= J_{1,n} + J_{2,n}\\ &:= \int_{M_{1,n}} \Big(0, -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2+y^2}\Big) \cdot \boldsymbol{\nu} \,\mathrm{d}S + \int_{M_{2,n}} \Big(0, -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2+y^2}\Big) \cdot \boldsymbol{\nu} \,\mathrm{d}S,\end{aligned}$$

kde $M_{1,n} := (-n, n) \times \{0\}$ a $M_{2,n} := \partial B_n(0) \cap \{y > 0\}$. Platí

$$\begin{aligned}J_{1,n} &= \int_{(-n,n)\times\{0\}} \Big(0, -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2+y^2}\Big) \cdot (0,-1) \,\mathrm{d}S\\ &= \int_{-n}^{n} \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[\arctan x]_{-n}^{n} \to \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}|J_{2,n}| &\leq \int_{\partial B_n(0)\cap\{y>0\}} \Big|\Big(0, -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2+y^2}\Big)\Big| |\boldsymbol{\nu}| \,\mathrm{d}S\\ &\leq \int_{\partial B_n(0)\cap\{y>0\}} \frac{1}{2}\frac{1}{1+n^2} \cdot 1 \,\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\frac{1}{1+n^2} S_1(\partial B_n(0) \cap \{y > 0\})\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+n^2}\pi n \to 0.\end{aligned}$$

Celkově $I = \frac{\pi}{2}$.

Poznámka 17.3.13. Pokud bychom použili Fubiniho větu (Věta 15.11.2), měli bychom

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \Big[-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2+y^2}\Big]_0^\infty \,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[\arctan x]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Věta 17.3.14 (O integraci per partes)**.** *Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená otevřená množina, jejíž hranice je zobecněná $(N-1)$-plocha splňující $S_{N-1}(\partial\Omega) < \infty$ a pro kterou v každém bodě x každé její $(N-1)$-dimenzionální komponenty existuje jednotkový vnější normálový vektor $\boldsymbol{\nu}(x)$. Dále nechť $i \in \{1,\dots,N\}$ a $U, V \in C(\overline{\Omega})$ jsou takové, že $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ a $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ existují všude v Ω a dají se spojitě rozšířit na $\overline{\Omega}$. Pak*

$$\int_\Omega U\frac{\partial V}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} UV\nu_i \,\mathrm{d}S - \int_\Omega V\frac{\partial U}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Položme $F := UV$. Protože

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial (UV)}{\partial x_i} = U\frac{\partial V}{\partial x_i} + V\frac{\partial U}{\partial x_i},$$

snadno se ověří, že funkce F splňuje předpoklady Gauss–Ostrogradského věty (Věta 17.3.3). Proto máme

$$\int_\Omega \Big(U\frac{\partial V}{\partial x_i} + V\frac{\partial U}{\partial x_i}\Big)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} F\nu_i\,\mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega} UV\nu_i\,\mathrm{d}S,$$

odkud dostaneme jednoduchou úpravou požadovaný vzorec. □

Poznámka 17.3.15. Věta o integraci per partes (Věta 17.3.14) hraje klíčovou roli v moderních metodách (založených na hlubší teorii Lebesgueova integrálu a metrických prostorů) důkazu existence a jednoznačnosti řešení parciálních diferenciálních rovnic. Podobně jako při důkazu Picard–Lindelöfovy existenční věty (Věta 11.10.1), kde byl prvním krokem přechod od diferenciální rovnice

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

k jejímu integrálnímu tvaru

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t,$$

i zde se pracuje s vhodnou integrální identitou. Předveďme si její odvození u rovnice

$$\Delta u(x) = f(x, u(x)) \quad \text{na } \Omega, \qquad u(x) = 0 \quad \text{na } \partial\Omega$$

pro Ω splňující předpoklady Gauss–Ostrogradského věty (Věta 17.3.3) a $f \in C(\Omega\times\mathbb{R})$, přičemž od řešení budeme požadovat, aby $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$. Nejprve zvolíme testovací funkci $h \in \mathcal{D}(\Omega)$ (nekonečně hladká funkce s kompaktním nosičem v Ω), vynásobíme s ní naši diferenciální rovnici a integrujeme přes Ω

$$\int_\Omega \big(\Delta u(x)h(x) - f(x,u(x))h(x)\big)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Nyní na první člen levé strany aplikujeme Větu o integraci per partes (Věta 17.3.14) a využijeme toho, že $h = 0$ na $\partial\Omega$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta u h\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)h\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^N \Big(\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}h\nu_i\,\mathrm{d}S - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x\Big)\\ &= -\sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla h\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Celkově dostáváme pro libovolné $h \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega \big(\nabla u(x)\cdot\nabla h(x) + f(x,u(x))h(x)\big)\,\mathrm{d}x = 0.$$

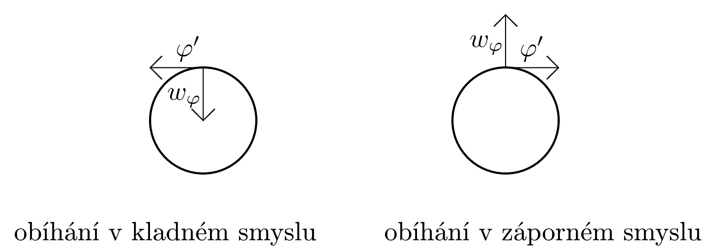
17.3.2 Greenova věta

V případě $N = 2$ se v Gauss–Ostrogradského větě (Věta 17.3.3) dá na integrál přes $\partial\Omega$ nahlížet jako na křivkový integrál. Zde se budeme zabývat jeho zápisem jakožto křivkového integrálu druhého druhu. Čeká nás však jedna překážka: znaménko křivkového integrálu druhého druhu závisí na směru obíhání křivky. Věnujme se proto nejprve nalezení směru obíhání, který bude kompatibilní s orientací vnějšího normálového vektoru.

Příklad 17.3.16. Uvažujme křivku $\boldsymbol{\varphi}\colon \psi \mapsto (\cos\psi, \sin\psi)$, kde $\psi \in [0, 2\pi]$ (jednotková kružnice obíhaná proti směru hodinových ručiček). Pak dostáváme tečný vektor tvaru $\boldsymbol{\varphi}' = (-\sin\psi, \cos\psi)$ a normálový vektor

$$\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}} = \det\begin{pmatrix} -\sin\psi & \mathbf{e}_1 \\ \cos\psi & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = (-\cos\psi, -\sin\psi)$$

míří dovnitř kruhu (obecně vychází $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}} = (-\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}, \frac{\partial\varphi_1}{\partial t})$). Pokud bychom probíhali kružnici v obráceném směru pomocí parametrizace $\boldsymbol{\eta}\colon \psi \mapsto (\sin\psi, \cos\psi)$, kde $\psi \in [0, 2\pi]$, dostali bychom normálový vektor $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}} = (\sin\psi, \cos\psi)$ mířící ven z kruhu. Prvnímu případu se říká *obíhání v kladném smyslu* (množina je nalevo od tečného vektoru), druhému *obíhání v záporném smyslu.*



Obrázek 17.5: Ilustrace k obíhání v kladném smyslu a v záporném smyslu.

V dalším odvozování budeme používat následující jen zdánlivě zřejmý výsledek.

Věta 17.3.17 (Jordanova věta)**.** *Nechť $\boldsymbol{\varphi}$ je Jordanova křivka v $\mathbb{R}^2$. Pak existují souvislé množiny* $\operatorname{Int}\boldsymbol{\varphi}$ *(vnitřek $\boldsymbol{\varphi}$) a* $\operatorname{Ext}\boldsymbol{\varphi}$ *(vnějšek $\boldsymbol{\varphi}$) takové, že platí*
(i) $\operatorname{Int}\boldsymbol{\varphi}$ *je omezená a* $\operatorname{Ext}\boldsymbol{\varphi}$ *je neomezená*
(ii) $\operatorname{Int}\boldsymbol{\varphi} \cup \langle\boldsymbol{\varphi}\rangle \cup \operatorname{Ext}\boldsymbol{\varphi} = \mathbb{R}^2$*, přičemž množiny na levé straně jsou po dvou disjunktní*
(iii) $\partial(\operatorname{Int}\boldsymbol{\varphi}) = \partial(\operatorname{Ext}\boldsymbol{\varphi}) = \langle\boldsymbol{\varphi}\rangle$.

Důkaz zde výjimečně nebudeme uvádět. Jednak nás k tomu vede skutečnost, že se nejedná vyloženě o látku z matematické analýzy. Navíc jsme přesvědčeni, že v aplikacích Gauss–Ostrogradského věty (Věta 17.3.3), kde jsme nuceni pracovat s množinami, přes které se snadno integruje a zároveň se snadno integruje přes jejich hranici, se tvrzení Jordanovy věty snadno ověřuje. Případné zájemce můžeme odkázat do článku [Tv 1980], kde je podán důkaz, který nepoužívá pokročilejší látku než je stejnoměrná konvergence. Jiný důkaz lze nalézt v učebnicích obsahujících teorii funkcí komplexní proměnné, jako například [StSa AnII].

Nyní jsme již dobře připraveni na formulaci a důkaz verze Gauss–Ostrogradského věty v $\mathbb{R}^2$ zahrnující křivkový integrál druhého druhu.

Věta 17.3.18 (Greenova věta)**.** *Nechť* $(\boldsymbol{\varphi};[a,b])$ *je kladně obíhaná regulární Jordanova po částech* C^1*-křivka v* $\mathbb{R}^2$*. Označme* $\Omega := \operatorname{Int}\boldsymbol{\varphi}$*.*
(i) *Nechť* $\boldsymbol{T} \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^2)$ *je vektorové pole, pro které existují* $\frac{\partial T_1}{\partial x_1}$ *a* $\frac{\partial T_2}{\partial x_2}$ *všude v* Ω *a dají se spojitě rozšířit na* $\overline{\Omega}$*. Pak*

$$\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}x = \int_\varphi (-T_2,T_1)\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}.$$

(ii) *Nechť* $\boldsymbol{T} \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^2)$ *je vektorové pole, pro které existují* $\frac{\partial T_2}{\partial x_1}$ *a* $\frac{\partial T_1}{\partial x_2}$ *všude v* Ω *a dají se spojitě rozšířit na* $\overline{\Omega}$*. Pak*

$$\int_\Omega \Big(\frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\Big)\,\mathrm{d}x = \int_{\boldsymbol{\varphi}} \boldsymbol{T}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}.$$

Pro $\boldsymbol{\varphi}$ *obíhanou v záporném smyslu platí věta s tím rozdílem, že ve výsledných formulích napravo změníme znaménko.*

Důkaz. Díky Jordanově větě (Věta 17.3.17) je množina Ω dobře definovaná. Nechť dále $m \in \mathbb{N}$ a $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b$ jsou takové body, že $\boldsymbol{\varphi}$ je C^1-křivka na každém intervalu $[a_j,a_{j+1}]$, kde $j \in \{0,1,\ldots,m-1\}$. Pak 1-dimenzionální komponenty množiny $\partial\Omega$, přes něž se v Gauss–Ostrogradského větě (Věta 17.3.3) integruje, jsou právě obrazy intervalů (a_j,a_{j+1}), kde $j \in \{0,1,\ldots,m-1\}$, neboli $M_j = \boldsymbol{\varphi}((a_j,a_{j+1}))$. Podle Gauss–Ostrogradského věty, předchozích úmluv a definice křivkového integrálu máme

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}S = \sum_{j=0}^{m-1}\int_{M_j}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}S = \sum_{j=0}^{m-1}\int_{M_j}\boldsymbol{T}\cdot\frac{-\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}\circ\vec{\varphi}^{-1}}{\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}\circ\vec{\varphi}^{-1}\|}\,\mathrm{d}S\\
&= \sum_{j=0}^{m-1}\int_{a_j}^{a_{j+1}}\boldsymbol{T}\circ\boldsymbol{\varphi}\cdot\frac{-\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}}{\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}\|}\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}\|\,\mathrm{d}t = -\sum_{j=0}^{m-1}\int_{a_j}^{a_{j+1}}\boldsymbol{T}\circ\boldsymbol{\varphi}\cdot\Big(-\frac{\partial\varphi_2}{\partial t},\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\Big)\,\mathrm{d}t\\
&= \sum_{j=0}^{m-1}\int_{a_j}^{a_{j+1}}\Big(T_1\circ\boldsymbol{\varphi}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} - T_2\circ\boldsymbol{\varphi}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\Big)\,\mathrm{d}t = \int_a^b\Big(T_1\circ\boldsymbol{\varphi}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} - T_2\circ\boldsymbol{\varphi}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\Big)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_{\boldsymbol{\varphi}}(-T_2,T_1)\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}.
\end{aligned}$$

Ve druhém případě díky prvnímu případu máme

$$\int_\Omega\Big(\frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\Big)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \operatorname{div}(T_2,-T_1)\,\mathrm{d}x = \int_{\boldsymbol{\varphi}}(-(-T_1),T_2)\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = \int_\varphi \boldsymbol{T}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}.$$

□

17.3.3 Stokesova věta v $\mathbb{R}^3$

Dalším klasickým výsledkem je Stokesova věta v $\mathbb{R}^3$, která je „zakřivenou“ verzí Greenovy věty na jednoduché 2-ploše v $\mathbb{R}^3$. Budou nás zajímat 2-plochy, jejichž „okraj“ tvoří křivka.

Připomeňme, že v Greenově větě hraje důležitou roli směr obíhání „hraniční křivky“ (jeho změna se projeví změnou znaménka pravé strany ve výsledné rovnosti). I zde musíme umět rozhodnout, zda je křivka obíhána v kladném či záporném smyslu. K tomu nám poslouží zobrazení $\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrizující naši 2-plochu, neboť zobrazení $\vec{\varphi}^{-1}$ převádí křivky v $\mathbb{R}^3$ na křivky v $\mathbb{R}^2$, kde již znaménko směru obíhání umíme určovat.

Dalším problémem bude, že tentokrát, na rozdíl od Gauss–Ostrogradského věty (Věta 17.3.3), naše 2-plocha nemusí být hranicí nějaké množiny, a proto v každém jejím bodě máme dvojici stejně významných jednotkových normálových vektorů.

Přistupme nyní k podrobnému sladění směru obíhání „hraniční“ křivky s orientací normálových vektorů. Nechť $M = \boldsymbol{\varphi}(E)$ je jednoduchá 2-plocha v $\mathbb{R}^3$, kde $E \subset \mathbb{R}^2$ je souvislá otevřená množina. Nechť $(\vec{\psi}, [a,b])$ je regulární Jordanova po částech C^1-křivka splňující $\langle\vec{\psi}\rangle \subset E$. Definujme 2-plochu $\widetilde{M} := \boldsymbol{\varphi}(\operatorname{Int}\vec{\psi})$ a křivku $\boldsymbol{\eta} := \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{\psi}$ nazvěme *okrajem* 2-plochy $\widetilde{M}$. Uvědomme si, že máme $\|\vec{\psi}'(t)\| \le C$ pro všechna $t \in [a,b]$, kde derivace existuje.

Dále si povšimněme, že zobrazení $x \mapsto \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\varphi}^{-1}(x))$ je spojité, a proto je spojité i zobrazení $x \mapsto \frac{\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\varphi}^{-1}(x))}{\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\varphi}^{-1}(x))\|}$. Pokud $\vec{\psi}$ je obíhána v kladném smyslu, položme

$$\boldsymbol{\nu}(x) := \frac{\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\varphi}^{-1}(x))}{\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\varphi}^{-1}(x))\|} \qquad \text{pro } x \in \widetilde{M}$$

a pokud $\vec{\psi}$ je obíhána v záporném smyslu, položme

$$\boldsymbol{\nu}(x) := -\frac{\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\varphi}^{-1}(x))}{\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\varphi}^{-1}(x))\|} \qquad \text{pro } x \in \widetilde{M}.$$

Zbývá ještě pro vektorové pole $\boldsymbol{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které je třídy C^1 na nějaké otevřené množině obsahující $\widetilde{M} \cup \langle\boldsymbol{\eta}\rangle$, zavést diferenciální operátor *rotaci* předpisem

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{T} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & T_1 & \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & T_2 & \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & T_3 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} := \Big(\frac{\partial T_3}{\partial x_2} - \frac{\partial T_2}{\partial x_3}, \frac{\partial T_1}{\partial x_3} - \frac{\partial T_3}{\partial x_1}, \frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\Big).$$

Nyní můžeme zformulovat Stokesovu větu v $\mathbb{R}^3$.

Věta 17.3.19 (Stokesova)**.** *Za předpokladů uvedených výše platí*

$$\int_{\widetilde{M}} \operatorname{rot}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}S = \int_{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{T}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}.$$

Důkaz. Stačí uvažovat jen případ křivky obíhané v kladném smyslu (jinak mají obě strany rovnosti obrácené znaménko). Důkaz provedeme ve dvou krocích. Nejprve se budeme zabývat případem, že parametrizace φ je třídy C^2. Ve druhém kroku ukážeme, jak se na uvedený případ převede případ obecný.

Krok 1: důkaz pro $\boldsymbol{\varphi} \in C^2(\overline{\operatorname{Int}\vec{\psi}})$.
Nejprve si pro pozdější využití vyjádřeme

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}} &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} & \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} & \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_2} & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \\
&= \Big(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_1}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} \Big).
\end{aligned}
\tag{17.3.1}
$$

Teď začneme postupně upravovat pravou stranu dokazované rovnosti. Nejprve použijeme definici křivkového integrálu druhého druhu, pak využijeme toho, že $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{\psi}$, dále použijeme řetízkové pravidlo a následně si výsledný integrál opět vyjádříme jako křivkový integrál druhého druhu (derivace je uvažována jen na otevřených podintervalech intervalu (a, b), kde $\vec{\psi}$ je třídy C^1)

$$
\begin{aligned}
&\int_{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\eta} \\
&= \int_a^b \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\eta}(\tau)) \cdot \boldsymbol{\eta}'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sum_{i=1}^3 \int_a^b T_i(\eta(\tau))\eta_i'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \sum_{i=1}^3 \int_a^b T_i(\boldsymbol{\varphi}(\vec{\psi}(\tau))) \Big(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_1}(\vec{\psi}(\tau))\psi_1'(\tau) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_2}(\vec{\psi}(\tau))\psi_2'(\tau) \Big)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \sum_{i=1}^3 \int_a^b \Big(T_i(\boldsymbol{\varphi}(\vec{\psi}(\tau))) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_1}(\vec{\psi}(\tau)), T_i(\boldsymbol{\varphi}(\vec{\psi}(\tau))) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_2}(\vec{\psi}(\tau)) \Big) \cdot (\psi_1'(\tau), \psi_2'(\tau))\,\mathrm{d}\tau \\
&= \sum_{i=1}^3 \int_{\vec{\psi}} \Big((T_i \circ \boldsymbol{\varphi}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_1}, (T_i \circ \boldsymbol{\varphi}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_2} \Big)\,\mathrm{d}\vec{\psi}.
\end{aligned}
$$

Nyní na jednotlivé integrály úplně napravo použijeme Greenovu větu (druhou formuli) a výsledek postupně upravujeme s využitím záměnnosti druhých parciálních derivací zobrazení φ (použijeme zkrácený zápis, kdy u pole $\boldsymbol{T}$ a jeho parciálních derivací vynecháme argument $\boldsymbol{\varphi}(t)$ a u zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ a jeho parciálních derivací vynecháme argument t)

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{T}\cdot \,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} &= \sum_{i=1}^{3}\int_{\operatorname{Int}\vec{\psi}}\Big(\frac{\partial((T_i\circ\boldsymbol{\varphi})\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_2})}{\partial t_1} - \frac{\partial((T_i\circ\boldsymbol{\varphi})\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_1})}{\partial t_2}\Big)\,\mathrm{d}\lambda_2(t_1,t_2)\\ &= \sum_{i=1}^{3}\int_{\operatorname{Int}\vec{\psi}}\Big(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_2} + (T_i\circ\boldsymbol{\varphi})\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t_1\partial t_2}\\ &\qquad\qquad - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_2}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_1} - (T_i\circ\boldsymbol{\varphi})\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t_2\partial t_1}\Big)\,\mathrm{d}\lambda_2(t_1,t_2)\\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_{\operatorname{Int}\vec{\psi}}\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_2} - \frac{\partial\varphi_j}{\partial t_2}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_1}\Big)\,\mathrm{d}\lambda_2(t_1,t_2).\end{aligned}$$

Dále s využitím (17.3.1) a skutečnosti, že pro $i = j$ platí $\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_2} - \frac{\partial\varphi_j}{\partial t_2}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_1} = 0$, dostáváme

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_2} - \frac{\partial\varphi_j}{\partial t_2}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_1}\Big)\\ &= -\frac{\partial T_1}{\partial x_2}(w_{\boldsymbol{\varphi}})_3 + \frac{\partial T_1}{\partial x_3}(w_{\boldsymbol{\varphi}})_2 + \frac{\partial T_2}{\partial x_1}(w_{\boldsymbol{\varphi}})_3 - \frac{\partial T_2}{\partial x_3}(w_{\boldsymbol{\varphi}})_1 - \frac{\partial T_3}{\partial x_1}(w_{\boldsymbol{\varphi}})_3 + \frac{\partial T_3}{\partial x_2}(w_{\boldsymbol{\varphi}})_1\\ &= \Big(\frac{\partial T_3}{\partial x_2} - \frac{\partial T_2}{\partial x_3}, \frac{\partial T_1}{\partial x_3} - \frac{\partial T_3}{\partial x_1}, \frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\Big)\cdot \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}} = \operatorname{rot}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}.\end{aligned}$$

Celkově proto máme

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{T}\cdot \,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} &= \int_{\operatorname{Int}\vec{\psi}} \operatorname{rot}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\operatorname{Int}\vec{\psi}}\operatorname{rot}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\varphi}(t))\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(t)\|\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{\widetilde{M}}\operatorname{rot}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

Tím je první krok důkazu dokončen.

Krok 2: obecný případ. Důkaz založíme na páté části Věty o vlastnostech zhlazení funkce (Věta 16.5.6), podle níž pro zadané $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že zhlazené zobrazení $\boldsymbol{\varphi}_k$ (zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ jsme zhladili po složkách) splňuje $\|\boldsymbol{\varphi}_k(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\|_{C^1(\overline{\operatorname{Int}\vec{\psi}})} < \varepsilon$ všude na E. Definujme $\boldsymbol{\eta}_k := \boldsymbol{\varphi}_k\circ\vec{\psi}$ a $\widetilde{M}_k := \boldsymbol{\varphi}_k(\operatorname{Int}\vec{\psi})$. Analogicky jako v textu před zněním Stokesovy věty zaveďme také normálové vektory $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}_k}$ a $\boldsymbol{\nu}_k$.

Předně připomeňme, že $\boldsymbol{T}$ je třídy C^1 na nějaké otevřené množině obsahující $\widetilde{M}\cup\langle\boldsymbol{\eta}\rangle$. Je-li k dostatečně velké, pak uvedená otevřená množina obsahuje také $\widetilde{M}_k\cup\langle\boldsymbol{\eta}_k\rangle$ (skutečně, $\widetilde{M}\cup\langle\boldsymbol{\eta}\rangle$ je kompakt jakožto spojitý obraz kompaktu a tudíž má kladnou vzdálenost od doplňku uvedené otevřené množiny). Podle prvního kroku proto máme pro každé $k\in\mathbb{N}$ dost velké

$$\int_{\widetilde{M}_k}\operatorname{rot}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\nu}_k\,\mathrm{d}S = \int_{\boldsymbol{\eta}_k}\boldsymbol{T}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_k.$$

Zbývá ukázat, že

$$\int_{\widetilde{M}_k} \operatorname{rot} \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{\nu}_k \,\mathrm{d}S \to \int_{\widetilde{M}} \operatorname{rot} \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{\nu} \,\mathrm{d}S \qquad \text{a} \qquad \int_{\boldsymbol{\eta}_k} \boldsymbol{T} \cdot \,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_k \to \int_{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{T} \cdot \,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}.$$

Nejprve si povšimněme, že pro stejně stejnoměrně omezené funkce platí

$$f_k \rightrightarrows f, g_k \rightrightarrows g \quad \Longrightarrow \quad f_k g_k \rightrightarrows fg$$

a pro funkce odražené od nuly stejnou konstantou máme

$$f_k \rightrightarrows f \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{f_k} \rightrightarrows \frac{1}{f}.$$

Dále protože $\boldsymbol{\varphi} \in C^1(E; \mathbb{R}^3)$, platí $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_1}, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_2} \in C(E; \mathbb{R}^3)$. Proto z Věty o vlastnostech zhlazení funkce (Věta 16.5.6) plyne (v následujícím máme na mysli stejnoměrnou konvergenci jednotlivých složek)

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_k}{\partial t_1} \rightrightarrows \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_1} \quad \text{a} \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_k}{\partial t_2} \rightrightarrows \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_2} \qquad \text{na kompaktní množině } \operatorname{Int} \vec{\psi} \cup \langle \boldsymbol{\psi} \rangle,$$

neboť pro $m \in \{1, 2\}$ a $i \in \{1, 2, 3\}$ platí podle Věty o derivaci integrálu podle parametru (Věta 15.10.3)

$$\begin{aligned} \omega_k \star \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_m}(t) &= \int_{\mathbb{R}^2} \omega_k(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_m}(t-y) \,\mathrm{d}\lambda_2(y) = \frac{\partial}{\partial t_m} \int_{\mathbb{R}^2} \omega_k(y) \varphi_i(t-y) \,\mathrm{d}\lambda_2(y) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_m}(\omega_k \star \varphi_i). \end{aligned}$$

Aplikaci zmíněných pomocných výsledků na zkoumané integrály rozepsané podle parametrizace přenecháváme čtenáři jako cvičení (není zcela lehké, je nutné si uvědomit, že pracujeme na množině, kde $\boldsymbol{T}$ je stejnoměrně spojité, atd.). □

17.3.4 Potenciálnost vektorového pole v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$

Nejprve si připomeňme, že jsme v textu výše či dříve zavedli několik diferenciálních operátorů. Pro $u \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dotatečně hladké je

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} u &= \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\Big) \\ \Delta u &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i}, \end{aligned}$$

pro $\mathbf{v} \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ dostatečně hladké

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \\ \Delta \mathbf{v} &= \Big(\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_N\Big) \end{aligned}$$

a speciálně pro případ $N = 3$ jsme zavedli

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \Big(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\Big).$$

Zřejmě platí (předpokládáme, že funkce u a $\mathbf{v}$ jsou takové, že všechny uvedené výrazy mají smysl)

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$
$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \mathbf{0},$$

ale platí také

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}.$$

Cvičení 17.3.20. Dokažte podrobně výše uvedené identity!

Připomeňme, že podle Věty o nutné podmínce existence potenciálu (Věta 12.3.5) platí, že jestliže vektorové pole $\boldsymbol{T} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ má potenciál na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, pak

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \quad \text{na } \Omega \qquad \text{pro všechna } i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Pro $N = 2$ poslední podmínka znamená $\frac{\partial T_1}{\partial x_2} = \frac{\partial T_2}{\partial x_1}$ na Ω. Pro $N = 3$ je výše uvedená podmínka ekvivalentní tomu, že

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{T} = \Big(\frac{\partial T_3}{\partial x_2} - \frac{\partial T_2}{\partial x_3}, \frac{\partial T_1}{\partial x_3} - \frac{\partial T_3}{\partial x_1}, \frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\Big) \equiv \mathbf{0} \qquad \text{na } \Omega.$$

Věta o postačující podmínce existence potenciálu (Věta 12.3.6) nám naopak říká, že uvedená záměnnost parciálních derivací nám dává existenci potenciálu na otevřeném kvádru. Zde se pokusíme získat stejný výsledek pro obecnější množiny.

Definice 17.3.21 (Jednoduše souvislá množina)**.** Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ se nazývá *jednoduše souvislá*, jestliže pro každou Jordanovu křivku $\boldsymbol{\varphi} \colon [0,1] \to \Omega$ existují $\boldsymbol{H} \in C([0,1]^2; \Omega)$ a $x \in \Omega$ taková, že

$$\boldsymbol{H}(t, 0) = \boldsymbol{\varphi}(t) \quad \text{pro všechna } t \in [0,1], \quad \boldsymbol{H}(0, s) = \boldsymbol{H}(1, s) \quad \text{pro všechna } s \in [0,1]$$
$$\text{a} \quad \boldsymbol{H}(t, 1) = x \quad \text{pro všechna } t \in [0,1].$$

Poznámka 17.3.22. Podmínku z předchozí definice lze interpretovat tak, že křivku $\boldsymbol{\varphi}$ je možné v Ω spojitě stáhnout do bodu.

Příklad 17.3.23. (i) Kupříkladu pro Jordanovu křivku

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (2\cos(2\pi t), 2\sin(2\pi t), 0), \qquad \text{kde } t \in [0,1],$$

můžeme v množině $B_3(0) \setminus \overline{B}_1(0)$ definovat spojitou funkci

$$\boldsymbol{H}(t, s) = \begin{cases} (2\cos(2\pi t), 2\sin(2\pi t), 4s) & \text{pro } t \in [0,1] \text{ a } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ (4(1-s)\cos(2\pi t), 4(1-s)\sin(2\pi t), 2) & \text{pro } t \in [0,1] \text{ a } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

(s dírou v množině $B_3(0)$ jsme si poradili tak, že jsme nejprve křivku postupně vysouvali ve směru třetí proměnné a pak teprve jsme postupně začali zmenšovat poloměr kružnice).
(ii) Konvexní množina je zřejmě jednoduše souvislá.

Věta 17.3.24 (O existenci potenciálu v $\mathbb{R}^2$)**.** *Nechť $\boldsymbol{T} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá oblast, a*

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_2} = \frac{\partial T_2}{\partial x_1} \quad \textit{na } \Omega.$$

Pak $\boldsymbol{T}$ má v Ω potenciál.

Důkaz. Podle Greenovy věty (Věta 17.3.18) je křivkový integrál pole $\boldsymbol{T}$ přes libovolnou regulární Jordanovu křivku nulový. Speciálně je integrál nulový přes libovolnou uzavřenou lomenou čáru. Díky tomu, že počet segmentů lomené čáry je konečný, lze integrál přes uzavřenou lomenou čáru napsat jako konečný součet integrálů přes jednoduché uzavřené lomené čáry (zkuste si sami rozmyslet, jak se to provede; jednu z možných konstrukcí si později uvedeme v teorii funkcí komplexní proměnné ve čtvrtém díle skript). Díky Poznámce 17.1.20, bod (ii) tedy plyne, že dané pole $\boldsymbol{T}$ je potenciální. □

Věta 17.3.25 (O existenci potenciálu v $\mathbb{R}^3$ pro konvexní množinu)**.** *Nechť $\boldsymbol{T} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je konvexní otevřená množina, a*

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{T} \equiv \mathbf{0} \quad \textit{na } \Omega.$$

Pak $\boldsymbol{T}$ má v Ω potenciál.

Důkaz. Je-li množina Ω konvexní, lze libovolné tři body z Ω spojit úsečkami ležícími v Ω a použitím Stokesovy věty (Věta 17.3.19) dostáváme, že křivkový integrál přes libovolný trojúhelník je nulový. Použitím Poznámky 17.1.20, bodu (iii) pak plyne, že příslušné pole $\boldsymbol{T}$ je potenciální. □

Poznámka 17.3.26. Věta platí i pro $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ jednoduše souvislá oblast. Idea důkazu je následující. Díky Větě o vztahu nezávislosti na cestě a existence potenciálu (Věta 17.1.19) stačí ukázat, že pro každou regulární Jordanovu křivku $\boldsymbol{\varphi}$ platí

$$\int_\varphi \boldsymbol{T} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = 0.$$

Podle definice jednoduše souvislé oblasti však můžeme vyrobit 2-plochu, jejímž okrajem je právě křivka φ a pak podle Stokesovy věty a předpokladu $\operatorname{rot} \boldsymbol{T} \equiv \mathbf{0}$ máme

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} \boldsymbol{T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = \int_{\widetilde{M}} \operatorname{rot} \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{\nu} \, \mathrm{d}S = \int_{\widetilde{M}} 0 \, \mathrm{d}S = 0,$$

což jsme chtěli dokázat. Tento důkaz má ale jednu vadu. Vzhledem k naší definici jednoduše souvislé množiny (Definice 17.3.21) není zřejmé, zda výše zkonstruovaná plocha $\widetilde{M}$ je skutečně jednoduchá 2-plocha. Může se totiž stát, že vzniklá plocha není dostatečně hladká. Řešením tohoto problému (tedy příslušným vhodným zhlazením dané plochy) se nebudeme v těchto skriptech zabývat.

17.4 Dodatek: důkaz Gauss–Ostrogradského věty v plné obecnosti

Samotnému důkazu předchází důkladná příprava zaměřená především na lokální reprezentaci $\partial\Omega$ pomocí grafů funkcí z $\mathbb{R}^{N-1}$ do $\mathbb{R}$. Pro $x \in \mathbb{R}^N$ budeme často používat značení $x = (x', x_N)$, neboli $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$.

Lemma 17.4.1. *Nechť $G_1, G_2, P \subset \mathbb{R}^N$ jsou otevřené množiny, P je souvislá, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ a $P \subset G_1 \cup G_2$. Pak buď $P \subset G_1$ a nebo $P \subset G_2$.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existují $x_1 \in G_1 \cap P$ a $x_2 \in G_2 \cap P$. Díky souvislosti P existuje lomená čára v P spojující x_1 a x_2. Máme tedy spojitou křivku $\boldsymbol{\varphi}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^N$ splňující

$$\boldsymbol{\varphi}(a) = x_1, \qquad \boldsymbol{\varphi}(b) = x_2 \qquad \text{a} \qquad \langle\boldsymbol{\varphi}\rangle \subset P \subset G_1 \cup G_2.$$

Definujme

$$t_0 := \sup\{t \in [a, b]\colon \boldsymbol{\varphi}(t) \in G_1\}.$$

Díky (pravostranné) spojitosti $\boldsymbol{\varphi}$ v bodě a a otevřenosti G_1 musí být $t_0 > a$. Analogicky platí $t_0 < b$. Dále $\boldsymbol{\varphi}(t_0) \notin G_1$, protože jinak by díky spojitosti $\boldsymbol{\varphi}$ a otevřenosti G_1 existovalo $t_1 > t_0$ splňující $\boldsymbol{\varphi}(t_1) \in G_1$, což by byl spor s definicí suprema. Analogicky máme $\boldsymbol{\varphi}(t_0) \notin G_2$. Celkově $\boldsymbol{\varphi}(t_0) \notin G_1 \cup G_2$ a máme spor. □

Lemma 17.4.2. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^N$ je jednoduchá $(N-1)$-plocha a $z \in M$ je bod, ve kterém existuje normálový vektor k M s netriviální poslední složkou. Pak lze plochu M na jistém okolí bodu z parametrizovat explicitně pomocí C^1-zobrazení tvaru*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, f(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})).$$

Speciálně existují $\delta, \Delta > 0$ taková, že pro každé $y' \in \mathbb{R}^{N-1}$ splňující $\|y' - z'\| < \delta$ existuje právě jedno $y_N \in (z_N - \Delta, z_N + \Delta)$ splňující $(y', y_N) \in M$, a pro toto y_N platí $y_N = f(y')$.

Důkaz. Nechť $\boldsymbol{\varphi}\colon E \to \mathbb{R}^N$ je parametrizace plochy M a $a \in E$ je takové, že v bodě $z = \boldsymbol{\varphi}(a)$ má $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}$ (vždy netriviální vektor) nenulovou poslední složku. Pro všechna $i \in \{1, \ldots, N\}$ definujme pomocné funkce

$$F_i(t_1, \ldots, t_{N-1}, x_1, \ldots, x_N) := \varphi_i(t_1, \ldots, t_{N-1}) - x_i,$$

kde $(t_1, \ldots, t_{N-1}) \in E$ a $(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Nyní použijeme Větu o implicitní funkci (Věta 12.4.13). Výchozím bodem je $(a, \boldsymbol{\varphi}(a)) \in \mathbb{R}^{2N-1}$, v němž jsou všechny funkce F_i nulové. Požadovaná hladkost funkcí F_i plyne z definice $(N-1)$-plochy. Zbývá ověřit maticovou podmínku pro vyjádření souřadnic $(t_1, \ldots, t_{N-1}, x_N)$ pomocí souřadnic $(x_1, \ldots, x_{N-1})$. Zajímá nás tedy nenulovost determinantu (počítá se v bodě $(a, \boldsymbol{\varphi}(a)))$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial t_{N-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial t_{N-1}} & \frac{\partial F_N}{\partial x_N} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_{N-1}} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_N}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_N}{\partial t_{N-1}} & -1 \end{pmatrix}$$
$$= -\det\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_{N-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{N-1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{N-1}}{\partial t_{N-1}} \end{pmatrix} \neq 0$$

(poslední determinant je nenulový, neboť je roven poslední složce normálového vektoru $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}$). Díky Větě o implicitní funkci (Věta 12.4.13) proto dostáváme lokálně požadovaný popis. Jednoznačnost jsme však dostali jen pro obrazy jistého okolí bodu $a \in E$. V tom nám pomůže podmínka na spojitost zobrazení φ^{-1} z definice $(N-1)$-plochy, díky níž se do jistého okolí bodu $\boldsymbol{\varphi}(a)$ nemohou zobrazit body, které nejsou dostatečně blízko k a. □

Poznámka 17.4.3. Díky předpokladu na hodnost Jacobiho matice parametrizace v definici $(N-1)$-plochy je vždy alespoň jedna složka normálového vektoru nenulová. Proto lze lokálně explicitně popsat každou $(N-1)$-plochu (vyjadřujeme-li správnou souřadnici pomocí ostatních).

Lemma 17.4.4. *Nechť $M = \boldsymbol{\varphi}(E) \subset \mathbb{R}^N$ je jednoduchá $(N-1)$-plocha, kde $E \subset \mathbb{R}^{N-1}$ je otevřená souvislá množina. Pak*
(i) *na M existují právě dvě spojitá pole jednotkových normálových vektorů a to*

$$x \mapsto \frac{\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\varphi}^{-1}(x))}{\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\varphi}^{-1}(x))\|} \qquad a \qquad x \mapsto -\frac{\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\varphi}^{-1}(x))}{\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\varphi}^{-1}(x))\|},$$

(ii) *jestliže je navíc M je částí hranice nějaké množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\partial\Omega$ je zobecněná $(N-1)$-plocha a v každém bodě M existuje jednotkový vnější normálový vektor k $\partial\Omega$, pak pole těchto vektorů je na M spojité (a podle (i) může mít jen uvedené dvě podoby).*

Důkaz. Dokažme první část. Spojitost zmíněných vektorových polí plyne ze spojitosti dílčích zobrazení (nenulovost jmenovatele plyne z předpokladu o hodnosti matice v definici $(N-1)$-plochy). Ukažme ještě, že žádné jiné spojité pole jednotkových normálových vektorů na M neexistuje. Pokud by tomu tak bylo, pak by šlo reprezentovat jako

$$t \mapsto \frac{\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(t)}{\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(t)\|} \quad \text{na } E_1 \qquad \text{a} \qquad t \mapsto -\frac{\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(t)}{\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(t)\|} \quad \text{na } E_2,$$

kde $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ a $E_1 \cup E_2 = E$. Nejprve ukažme, že E_1 je otevřená. Pokud by tomu tak nebylo, našli bychom $\{t_n\} \subset E_2$ a $t_0 \in E_1$ taková, že $t_n \to t_0$. Díky spojitosti uvažovaného pole by pak platilo

$$-\frac{\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(t_n)}{\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(t_n)\|} \to \frac{\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(t_0)}{\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(t_0)\|}.$$

Zároveň však podle začátku důkazu máme

$$-\frac{\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(t_n)}{\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(t_n)\|} \to -\frac{\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(t_0)}{\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(t_0)\|}.$$

Protože napravo je vektor jednotkové délky, dostáváme spor. Analogicky platí, že E_2 je otevřená. Podle Lemmatu 17.4.1 nyní dostáváme, že buď $E = E_1$ a nebo $E = E_2$, což jsme chtěli ukázat.

Dokažme druhé tvrzení. Zvolme bod $z \in M$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že vnější normálový vektor má v tomto bodě nenulovou N-tou složku. Důkaz rozdělíme do několika kroků.

Krok 1: lokální popis M jako grafu funkce
Podle Lemmatu 17.4.2 existují $\delta, \Delta > 0$ taková, že v otevřeném válci $V := \{x' \in \mathcal{U}_\delta(z'), x_N \in \mathcal{U}_\Delta(z_N)\}$ lze M popsat jako graf C^1-funkce f. Díky páté vlastnosti z definice zobecněné $(N-1)$-plochy můžeme případným zmenšením δ a Δ dosáhnout toho, že $V \cap M = V \cap \partial\Omega$. Případným dalším zmenšením δ lze dosáhnout ještě toho, že f zobrazuje $\mathcal{U}_\delta(z')$ pouze do intervalu $(z_N - \frac{\Delta}{2}, z_N + \frac{\Delta}{2})$.

Krok 2: určení polohy množiny A vzhledem ke grafu funkce f
Označme ještě V^+ jako průnik válce V s nadgrafem funkce f a V^- jako průnik válce V s podgrafem funkce f. Obě množiny jsou zřejmě souvislé (pokud máme například $x, y \in V^-$, lze lomenou čáru, která je spojuje, zkonstruovat tak, že nejprve „svisle“ spojíme úsečkou bod $x = (x', x_N)$ s bodem $(x', z_N - \frac{\Delta}{2})$, pak „vodorovně“ spojíme $(x', z_N - \frac{\Delta}{2})$ s bodem $(y', z_N - \frac{\Delta}{2})$ a pak „svisle“ spojíme $(y', z_N - \frac{\Delta}{2})$ s bodem $y = (y', y_N)$). Pokud nyní aplikujeme Lemma 17.4.1 na rozklady

$$V^- = (V^- \cap \Omega) \cup (V^- \cap (\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega})) \qquad \text{a} \qquad V^+ = (V^+ \cap \Omega) \cup (V^+ \cap (\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega})),$$

snadno dostaneme, že buď $V \cap \Omega = V^-$ a nebo $V \cap \Omega = V^+$. V dalším budeme předpokládat, že nastala první možnost, jinak by se postupovalo podobně.

Krok 3: konstrukce spojitého pole jednotkových normálových vektorů
Označíme-li jako $\boldsymbol{\psi}$ parametrizaci $M \cap V$ pomocí grafu funkce f, pak podle druhé části Příkladu 17.2.23 máme pro všechna $x' \in \mathcal{U}_\delta(z')$ ($\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\psi}}$ zmíněné níže odpovídá bodu $(\vec{\psi}^{-1}(x', f(x')))$)

$$\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\psi}} = \Big(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x'), \ldots, -\frac{\partial f}{\partial x_{N-1}}(x'), 1\Big). \tag{17.4.1}$$

Normalizací získáme spojité pole jednotkových normálových vektorů. Zbývá nám už jen ukázat, že tyto normálové vektory jsou vnější.

Krok 4: zkonstruované normálové vektory jsou vnější
Potřebujeme ukázat, že pro každé $x' \in \mathcal{U}_\delta(z')$ a existuje $h_0 > 0$ tak malé, že pro každé $h \in (0, h_0)$ platí

$$(x', f(x')) + h\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\psi}} \in V^+. \tag{17.4.2}$$

Zafixujme $x' \in \mathcal{U}_\delta(z')$. Předně podle (17.4.1) máme

$$(x', f(x')) + h\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\psi}} = (x' - h\nabla f(x'), f(x') + h),$$

a proto je dokazovaná inkluze (17.4.2) ekvivalentní tomu, že

$$f(x') + h > f(x' - h\nabla f(x')),$$

což si nyní dokážeme. Nejprve si povšimněme, že pro každé dostatečně malé $h > 0$ máme $x' + h\nabla f(x') \in \mathcal{U}_\delta(z')$. Nyní rozepíšeme $f(x' + h\nabla f(x'))$ pomocí definice totálního diferenciálu funkce f v bodě x' (v následujícím výpočtu η zastupuje zbytek splňující $\frac{\eta(\xi)}{\|\xi\|} \to 0$ pro $\xi \to 0$) a pro všechna dostatečně malá $h > 0$ dostáváme

$$\begin{aligned} f(x' - h\nabla f(x')) &= f(x') + \nabla f(x') \cdot (-h\nabla f(x')) + \eta(-h\nabla f(x')) \\ &\le f(x') - h\|\nabla f(x')\|^2 + \frac{h}{2} \le f(x') - 0 + \frac{h}{2} < f(x') + h. \end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. □

Poznámka 17.4.5. (i) V předchozím důkazu jsme navíc zjistili, že je-li $x \in M$, kde M je na okolí bodu x reprezentovatelná explicitně jako graf C^1-funkce z $\mathbb{R}^{N-1}$ do $\mathbb{R}$, zároveň je částí hranice nejaké množiny, která má v každém bodě naší plochy vnější normálový vektor a která má za hranici zobecněnou $(N-1)$-plochu, pak existuje $\Delta > 0$ takové, že právě jedna z úseček $\{x'\} \times (-\Delta, x_N)$ a $\{x'\} \times (x_N, \Delta)$ leží v Ω a právě jedna z těchto množin leží v $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.
(ii) V důkazu jsme také viděli, že je-li plocha M zadaná explicitně jako graf C^1-funkce, zároveň je částí hranice nejaké množiny, která má v každém bodě naší plochy vnější normálový vektor, a uvedená množina leží pod grafem z explicitního vyjádření, pak z normálových vektorů

$$\Big(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x'), \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_{N-1}}(x'), 1\Big) \qquad \text{a} \qquad \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x'), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{N-1}}(x'), -1\Big)$$

je vnějším vektorem ten první (s kladnou poslední složkou).

Lemma 17.4.6. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená otevřená množina, jejíž hranici tvoří zobecněná $(N-1)$-plocha, která má v každém bodě každé své $(N-1)$-dimenzionální komponenty vnější normálový vektor. Nechť P je projekce množiny Ω do nadroviny $\{x_N = 0\} \subset \mathbb{R}^N$, přesněji*

$$P := \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} \colon \textit{existuje } x_N \in \mathbb{R} \textit{ splňující } (x', x_N) \in \Omega\}.$$

Definujme ještě $\widetilde{P} \subset P$ jako množinu takových $x' \in P$, že přímka $p_{x'} := \{x'\} \times \mathbb{R}$ protíná $\partial\Omega$ jen v bodech jejích $(N-1)$-dimenzionálních komponent a N-tá složka jednotkového vnějšího normálového vektoru je v těchto bodech nenulová. Pak
(i) *P a $\widetilde{P}$ jsou otevřené množiny*
(ii) $\lambda_{N-1}(P \setminus \widetilde{P}) = 0$
(iii) *pro každé $x' \in \widetilde{P}$ přímka $p_{x'}$ protíná $\partial\Omega$ v konečném sudém počtu průsečíků*
(iv) *označíme-li uvedené průsečíky jako $v_1(x') < v_2(x') < \dots < v_{2m}(x')$, pak*

$$p_{x'} \cap \Omega = \bigcup_{i=1}^{m} \{x'\} \times (v_{2i-1}(x'), v_{2i}(x'))$$

(v) *funkce* $x' \mapsto v_i(x')$ *jsou definovány na otevřených podmnožinách množiny* $\widetilde{P}$, *jsou na nich třídy* C^1 *a pro každé* $x' \in \widetilde{P}$ *existuje jeho okolí, na němž je počet průsečíků konstantní*
(vi) *je-li* $M = \boldsymbol{\varphi}(E)$ *nějaká* $(N-1)$*-dimenzionální komponenta množiny* $\partial\Omega$ *a definujeme-li*

$$\widetilde{E} := \{t \in E \colon (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{N-1}(t)) \in \widetilde{P}\} \quad a \quad B := E \setminus (\widetilde{E} \cup \{(w_{\boldsymbol{\varphi}}(t))_N = 0\}),$$

pak $\widetilde{E}$ *je otevřená množina a* $\lambda_{N-1}(B) = 0$.

Důkaz. Dokažme nejprve části (iii) a (iv). Pro zafixované $x' \in \widetilde{P}$ je množina $p_{x'} \cap \partial\Omega$ omezená, protože množina $\partial\Omega$ je omezená. Dále je to uzavřená množina, neboť je průnikem dvojice uzavřených množin. Celkově $p_{x'} \cap \partial\Omega$ je kompaktní. Navíc podle Lemmatu 17.4.2 můžeme na okolí každého ze zkoumaných průsečíků popsat $\partial\Omega$ grafem C^1-funkce a díky tomu z první části Poznámky 17.4.5 dostáváme, že existuje okolí našeho průsečíku, kde žádný další průsečík neleží. Uvážíme-li systém takových okolí příslušejících každému bodu množiny $p_{x'} \cap \partial\Omega$, dostáváme otevřené pokrytí této množiny. Díky Borelově pokrývací větě (Věta 11.8.3) lze přejít ke konečnému podpokrytí. Protože v každé otevřené množině z našeho pokrytí leží právě jeden průsečík, průsečíků musí být konečně mnoho.

Dále každá úsečka $\{x'\} \times (v_i(x'), v_{i+1}(x'))$ musí buď ležet celá v otevřené množině Ω a nebo v otevřené množině $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ (jinak by nám přibyl další průsečík mezi $v_i(x')$ a $v_{i+1}(x')$). Polopřímka $\{x'\} \times (-\infty, v_1(x'))$ pak musí ležet právě v jedné z uvedených množin a ta musí být navíc neomezená, jedná se tedy o $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$. Podobně pro polopřímku určenou průsečíkem s nejvyšším pořadovým číslem. Odtud také vidíme, že průsečíků je sudý počet.

Dokažme nyní části (i) a (v). Zafixujme $x' \in \widetilde{P}$ a za pomoci Lemmatu 17.4.2 zkonstruujme okolo každého bodu z $p_{x'} \cap \partial\Omega$ otevřený válec centrovaný v tomto bodě, v němž lze $\partial\Omega$ popsat jako graf C^1-funkce. Protože už víme, že průsečíků je jen konečný počet, snadno se nahlédne, že případným zmenšováním zmíněných válců lze dosáhnout toho, že všechny naše válce mají stejné rozměry (poloměr podstavy značíme δ a výška je 2Δ) a jsou po dvou disjunktní. Okamžitě dostáváme, že pro každé $y' \in \mathcal{U}_\delta(x')$ má množina $p_{y'} \cap \partial\Omega$ po jednom průsečíku v každém ze zmíněných válců.

Ukažme ještě, že případným zmenšením poloměru postavy našich válců je možné dosáhnout také toho, že pro žádné $y' \in \mathcal{U}_\delta(x')$ neexistují jiné body množiny $p_{y'} \cap \partial\Omega$ než body právě popsané. Pokud by tomu tak nebylo, našli bychom posloupnost $\{((y_n)', (y_n)_N)\} \in \partial\Omega$ takovou, že $(y_n)' \to x'$ a body $((y_n)', (y_n)_N)$ neleží v uvedených válcích. Protože $\partial\Omega$ je kompaktní, dostáváme bod $z \in \partial\Omega$ takový, že po případném přechodu k podposloupnosti máme $((y_n)', (y_n)_N) \to z$. Proto $z' = x'$, neboli $z \in p_{x'} \cap \partial\Omega$. Zároveň však všechny členy posloupnosti $\{((y_n)', (y_n)_N)\}$ leží mimo naše otevřené válce, a proto ani bod z v žádném z těchto válců neleží. To je ale ve sporu s tím, že válce jsme zkonstruovali okolo každého bodu z $p_{x'} \cap \partial\Omega$.

Tím jsme dokázali, že pro $\delta > 0$ dostatečně malé máme pro všechna $y' \in \mathcal{U}_\delta(x')$ všechny body množiny $p_{y'} \cap \partial\Omega$ po jednom umístěny v jednotlivých válcích na grafech C^1-funkcí. Tím jsme ukázali (i) (předchozí konstrukce nám dává otevřenost $\widetilde{P}$;

otevřenost P plyne okamžitě z toho, že se jedná o projekci otevřené množiny) a (v).

Dokažme (ii). Podle definice množiny $\widetilde{P}$ máme

$$P \setminus \widetilde{P} = Q_1 \cup Q_2,$$

kde Q_1 je množina tvořená takovými $x' \in P$, že $p_{x'}$ protíná nějakou komponentu množiny $\partial\Omega$, která má dimenzi menší než $N-1$ a Q_2 je tvořena takovými $x' \in P$, že $p_{x'}$ protíná pouze $N-1$-dimenzionální komponenty $\partial\Omega$ a zároveň alespoň v jednom z průsečíků má jednotkový vnější normálový vektor nulovou poslední složku.

Množina Q_1 je jednak tvořena projekcemi konečného počtu 0-ploch (tedy konečně mnoha body), a ty mají nulovou $(N-1)$-rozměrnou Lebesgueovu míru, a jednak konečným počtem projekcí komponent, jejichž dimenze se pohybuje mezi 1 a $N-2$. Nechť M je jedna z těchto komponent a je parametrizována prostřednictvím zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ z otevřené množiny $E \subset \mathbb{R}^k$, kde $1 \leq k \leq N-2$. Zobrazení φ můžeme chápat jako zobrazení z $E \times \{0\}^{N-1-k}$. Díky tomu, že $\lambda_{N-1}(E \times \{0\}^{N-1-k}) = 0$ a zobrazení $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{N-1}(t), 0, \ldots, 0)$ je lokálně lipschitzovské, dostáváme, že projekce odpovídající M má nulovou $(N-1)$-rozměrnou Lebesgueovu míru. Odtud $\lambda_{N-1}(Q_1) = 0$.

Nechť dále M je $(N-1)$-dimenzionální komponenta množiny $\partial\Omega$ parametrizovaná zobrazením $\boldsymbol{\varphi}$ na množině $E \subset \mathbb{R}^{N-1}$ a $x = \varphi(t) \in M$ je takové, že poslední složka jemu odpovídajícího jednotkového vnějšího normálového vektoru je nulová. To podle definice vektorového součinu znamená, že

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_{N-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_{N-1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_{N-1}}{\partial t_{N-1}} \end{pmatrix} = 0.$$

Jinými slovy, pro zobrazení $\tau \in E \mapsto (\varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{N-1}(\tau))$ je t bodem s nulovým jakobiánem. Podle Sardovy věty (Věta 15.12.15) má pak obraz všech takových bodů při uvedeném zobrazení nulovou $(N-1)$-rozměrnou Lebesgueovu míru. Protože uvedené zobrazení odpovídá naší projekci a $(N-1)$-dimenzionálních komponent množiny $\partial\Omega$ je jen konečný počet, dostali jsme $\lambda_{N-1}(Q_2) = 0$.

Dokažme část (vi). Otevřenost $\widetilde{E}$ plyne z otevřenosti $\widetilde{P}$ a spojitosti zobrazení $t \mapsto (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{N-1}(t))$.

Zbývá ukázat, že $\lambda_{N-1}(B) = 0$. Zobrazení $t \in E \mapsto (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{N-1}(t))$ nazývejme $\vec{\Phi}$. Množina B je tvořena takovými body $t \in E$, že přímka $p_{\vec{\Phi}(t)}$ protíná nějakou komponentu nižší dimenze než $N-1$, nebo protíná nějakou komponentu (jinou než je M) v bodě, jehož jednotkový vnější normálový vektor má nulovou poslední souřadnici. Použijeme-li značení z důkazu tvrzení (ii), pak máme

$$\vec{\Phi}(B) \subset Q_1 \cup Q_2 \qquad \text{a} \qquad \lambda_{N-1}(Q_1 \cup Q_2) = 0$$

(druhý výrok jsme dokázali při důkazu (ii)). Odtud dostáváme

$$\lambda_{N-1}(\vec{\Phi}(B)) = 0. \tag{17.4.3}$$

Dále pro každý bod $t \in B$ platí $(w_{\boldsymbol{\varphi}}(t))_N \neq 0$. To podle definice vektorového součinu a definice zobrazení $\vec{\Phi}$ znamená

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_{N-1}}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_{N-1}}{\partial t_1}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_{N-1}}{\partial t_{N-1}}(t) \end{pmatrix} = \mathrm{J}_{\vec{\Phi}}(t).$$

Protože zobrazení $\vec{\Phi}$ je třídy C^1, je jakobián spojitý, a proto platí $\mathrm{J}_{\vec{\Phi}} \neq 0$ na nějakém okolí bodu t. Označme jej $\mathcal{U}_{\delta_t}(t)$. Zmenšením δ_t můžeme navíc dosáhnout toho, že $\vec{\Phi}$ je na $\mathcal{U}_{\delta_t}(t)$ prosté (skutečně, protože $(w_{\boldsymbol{\varphi}}(t))_N \neq 0$, podle Lemmatu 17.4.2 můžeme množinu M na okolí bodu $\boldsymbol{\varphi}(t)$ reprezentovat grafem funkce, proto je projekce zmíněné části množiny do roviny $\{x_N = 0\}$ prostá, a proto je zobrazení $\vec{\Phi}$, které je složením prostého zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ a uvedené projekce, prosté na okolí bodu t). Celkově je $\vec{\Phi}$ na $\mathcal{U}_{\delta_t}(t)$ regulární zobrazení, odtud $\vec{\Phi}^{-1}$ je lokálně lipschitzovské a dostáváme

$$\lambda_{N-1}(B \cap \mathcal{U}_{\delta_t}(t)) = \lambda_{N-1}(\vec{\Phi}^{-1}(\vec{\Phi}(B \cap \mathcal{U}_{\delta_t}(t)))) = \lambda_{N-1}(\vec{\Phi}(B \cap \mathcal{U}_{\delta_t}(t))) = 0,$$

kde poslední rovnost plyne z odhadu (použijeme (17.4.3))

$$\lambda_{N-1}(\vec{\Phi}(B \cap \mathcal{U}_{\delta_t}(t))) \leq \lambda_{N-1}(\vec{\Phi}(B)) = 0.$$

Nyní množina $\bigcup_{t\in B} \mathcal{U}_{\delta_t}(t)$ je otevřená, tedy separabilní (spočetnou hustou podmnožinou je kupříkladu množina jejích bodů s racionálními souřadnicemi), a proto podle Lindelöfovy pokrývací věty (Věta 11.8.2) existuje její spočetné podpokrytí $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_{\delta_{t_n}}(t_n)$. Díku tomu také máme

$$\lambda_{N-1}(B) = \lambda_{N-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B \cap \mathcal{U}_{\delta_{t_n}}(t_n)\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{N-1}(B \cap \mathcal{U}_{\delta_{t_n}}(t_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

a jsme hotovi. $\square$

Důkaz Gauss–Ostrogradského věty (Věta 17.3.3). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $i = N$. Budeme používat značení, které jsme si představili v předchozích lemmatech. Navíc pro zadané $x' \in \widetilde{P}$ budeme počet jemu odpovídajících průsečíků přímky $p_{x'}$ a $\partial\Omega$ značit jako $2m_{x'}$.

Nechť $M_i = \boldsymbol{\varphi}_i(E_i)$, kde $i = 1, \dots, p$, jsou všechny $(N-1)$-dimenzionální komponenty množiny Ω. Nejprve upravíme levou stranu dokazované rovnosti. Fubiniho věta (Věta 15.11.2) spolu s Newtonovou formulí a Lemmatem 17.4.6 (použijeme části (ii), (iii) a (iv)) nám dávají

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x_N}\,\mathrm{d}x &= \int_P \int_{\Omega^{x'}} \frac{\partial F}{\partial x_N}\,\mathrm{d}x_N\,\mathrm{d}x' = \int_{\widetilde{P}} \int_{\Omega^{x'}} \frac{\partial F}{\partial x_N}\,\mathrm{d}x_N\,\mathrm{d}x' \\ &= \int_{\widetilde{P}} \sum_{j=1}^{2m_{x'}} (-1)^j F(x', v_j(x'))\,\mathrm{d}x'. \end{aligned} \tag{17.4.4}$$

V dalším budeme postupně upravovat pravou stranu dokazované rovnosti a dojdeme k stejnému tvaru, jaký je úplně napravo v (17.4.4). Nejprve použijeme definici plošného integrálu pro zobecněné $(N-1)$-polochy (integruje se jen přes komponenty nejvyšší dimenze) a pak použijeme poslední část Lemmatu 17.4.6

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} F\nu_N \,\mathrm{d}S &= \sum_{i=1}^{p} \int_{E_i} F(\boldsymbol{\varphi}_i(t))\nu_N(\boldsymbol{\varphi}_i(t))\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}_i}(t)\|\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{p} \int_{\widetilde{E}_i} F(\boldsymbol{\varphi}_i(t))\nu_N(\boldsymbol{\varphi}_i(t))\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}_i}(t)\|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Dále pro každé $i \in \{1,\dots,p\}$ a $j \in \mathbb{N}$, označme množinu $\widetilde{E}_{i,j}$ jako množinu takových $t \in \widetilde{E}_i$, že bod $\boldsymbol{\varphi}_i(t)$ je j-tým průsečíkem přímky $p_{\boldsymbol{\varphi}_i'(t)}$ s $\partial\Omega$ (průsečíky číslujeme postupně od nejnižší N-té souřadnice jako v Lemmatu 17.4.6; některé množiny $\widetilde{E}_{i,j}$ budou prázdné, což je zapříčiněno nízkým počtem průsečíků nebo jejich příslušností do jiné komponenty hranice, než je naše i-tá komponenta; pozor, čárka ve výrazu $p_{\varphi_i'(t)}$ nemá nic společného s derivací, označuje první $(N-1)$-tici souřadnic). Pak máme

$$\widetilde{E}_{i,j} \cap \widetilde{E}_{i,l} = \emptyset \quad \text{pro } j \neq l \qquad \text{a} \qquad \bigcup_{j=1}^{\infty} \widetilde{E}_{i,j} = \widetilde{E}_i.$$

Při tomto značení naše poslední integrální identita dostává tvar

$$\int_{\partial\Omega} F\nu_N \,\mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\widetilde{E}_{i,j}} F(\boldsymbol{\varphi}_i(t))\nu_N(\boldsymbol{\varphi}_i(t))\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}_i}(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Dále označme $M_{i,j} = \boldsymbol{\varphi}_i(\widetilde{E}_{i,j})$ a nechť $\widetilde{P}_{i,j}$ jsou projekce množin $M_{i,j}$ do nadroviny $\{x_N = 0\}$. Podle páté části Lemmatu 17.4.6 je pak každá množina $M_{i,j}$ explicitně parametrizována pomocí

$$x' \mapsto (x', v_j(x')) \qquad \text{pro } x' \in \widetilde{P}_{i,j}$$

a funkce v_j jsou třídy C^1. Proto podle Věty o nezávislosti plošného integrálu prvního druhu na parametrizaci (Věta 17.2.29) máme pro každé $i \in \{1,\dots,p\}$ a $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{E}_{i,j}} F(\boldsymbol{\varphi}_i(t))\nu_N(\boldsymbol{\varphi}_i(t))\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}_i}(t)\|\,\mathrm{d}t &= \int_{M_{i,j}} F\nu_N\,\mathrm{d}S \\ &= \int_{\widetilde{P}_{i,j}} F(x', v_j(x'))\nu_N(x', v_j(x'))\sqrt{1+\sum_{l=1}^{N-1}\Big(\frac{\partial v_j}{\partial x_l}(x')\Big)^2}\,\mathrm{d}x'.\end{aligned}$$

Dále si vyjádříme $\nu_N(x', v_j(x'))$ pomocí Lemmatu 17.4.4, druhé části Příkladu 17.2.23, druhé části Poznámky 17.4.5 a čtvrté části Lemmatu 17.4.6. Dostáváme

$$\nu_N(x', v_j(x')) = \frac{(-1)^j}{\sqrt{1+\sum_{l=1}^{N-1}\Big(\frac{\partial v_j}{\partial x_l}(x')\Big)^2}}$$

(Lemma 17.4.4 nám dalo dva kandidáty na jednotkový vnější normálový vektor, Příklad 17.2.23 nám dal jejich tvar při explicitním zadání plochy a Lemma 17.4.6 nám ve spolupráci s Poznámkou 17.4.5 vybralo ze dvou vektorů ten správný).

Poslední integrální identita se nám proto zjednodušila na

$$\int_{\widetilde{E}_{i,j}} F(\varphi_i(t))\nu_N(\varphi_i(t))\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}_i}(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_{\widetilde{P}_{i,j}} F(x', v_j(x'))(-1)^j\,\mathrm{d}x'$$

a celkově zatím máme

$$\int_{\partial\Omega} F\nu_N\,\mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\widetilde{P}_{i,j}} F(x', v_j(x'))(-1)^j\,\mathrm{d}x'.$$

Definujme ještě funkce $\theta_j\colon \widetilde{P} \to \mathbb{R}$ jako charakteristické funkce množin $\bigcup_{i=1}^p \widetilde{P}_{i,j}$, neboli množin, pro které má $p_{x'}$ alespoň j průsečíků s $\partial\Omega$. Pak nám důkaz dokončí následující řetězová rovnost, kterou si vysvětlíme za její formulací

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} F\nu_N\,\mathrm{d}S &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\widetilde{P}_{i,j}} F(x', v_j(x'))(-1)^j\,\mathrm{d}x' \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\int_{\bigcup_{i=1}^p \widetilde{P}_{i,j}} F(x', v_j(x'))(-1)^j\,\mathrm{d}x' \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\int_{\widetilde{P}} F(x', v_j(x'))(-1)^j\theta_j(x')\,\mathrm{d}x' \qquad (17.4.5) \\ &= \int_{\widetilde{P}}\sum_{j=1}^{\infty} F(x', v_j(x'))(-1)^j\theta_j(x')\,\mathrm{d}x' \\ &= \int_{\widetilde{P}}\sum_{j=1}^{2m_{x'}} (-1)^j F(x', v_j(x'))\,\mathrm{d}x'.\end{aligned}$$

První rovnost v (17.4.5) jsme už dokázali v předešlé části důkazu. Druhá rovnost plyne z toho, že pro $i \neq l$ platí $\widetilde{P}_{i,j} \cap \widetilde{P}_{l,j} = \emptyset$ (každý bod $\partial\Omega$ leží právě v jedné komponentě a to se týká i j-tého průsečíku $\partial\Omega$ s přímkou $p_{x'}$, a proto se každé $x' \in \widetilde{P}$ může objevit v množině $\widetilde{P}_{i,j}$ při pevném j nejvýše pro jedno i). Ve třetí rovnosti jsme použili definici funkce θ_j a v páté rovnosti jsme použili Lemma 17.4.6 (třetí část nám říká, že průsečíků je jen konečný počet, ze čtvrté části jsme si půjčili značení).

Zbývá nám vysvětlit čtvrtou rovnost. Použijeme Lebesgueovu větu o majorizované konvergenci (Věta 15.8.17) s majorantou

$$x' \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} |F(x', v_j(x'))|\theta_j(x').$$

Její integrovatelnost plyne z toho, že (používáme drobnou modifikaci již zdůvodněných výpočtů; prohození sumy a integrálu nám tentokrát umožňuje Lebesgueova věta o monotonní konvergenci, tedy Věta 15.7.6)

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{P}} \sum_{j=1}^{\infty} |F(x', v_j(x'))| \theta_j(x') \,\mathrm{d}x' &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\widetilde{P}} |F(x', v_j(x'))| \theta_j(x') \,\mathrm{d}x' \\ &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\widetilde{P}_{i,j}} |F(x', v_j(x'))| \,\mathrm{d}x' \\ &= \int_{\partial\Omega} |F| |\nu_N| \,\mathrm{d}S,\end{aligned}$$

kde integrál úplně napravo konverguje díky tomu, že spojitá funkce F je omezená na kompaktu $\partial\Omega$ a ten má navíc konečný plošný obsah podle jednoho z předpokladů věty.

Tím jsme ověřili platnost řetězové rovnosti (17.4.5), která nám spolu s (17.4.4) dává důkaz Gauss–Ostrogradského věty (Věty 17.3.3). □

Kapitola 18

Diferenciální formy a jejich integrace

V této kapitole si představíme abstraktní přístup k problematice křivkového a plošného integrálu, potažmo k integrálním větám, který výsledky z předchozí kapitoly sjednocuje a částečně i rozšiřuje. Nový přístup bude založen na kalkulu pro součin vektorů, který bude obsahovat pravidla převzatá z pravidel pro počítání s determinanty (což jsou také pravidla pro výpočet vektorového součinu, který úzce souvisí s plošným elementem).

Pro množinu $I \subset \{1, \dots, N\}$ zde budeme používat značení $|I| = k$, které bude znamenat, že I obsahuje právě k prvků.

18.1 Vnější algebra na vektorovém prostoru

V této části textu k vektorovému prostoru $\mathbb{R}^N$ přidáme operaci *vnější součin*, která odpovídá práci s determinanty při budování teorie plošného integrálu.

Definice 18.1.1 (Vnější algebra)**.** Nechť $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$ je kanonická báze v $\mathbb{R}^N$ a $k \in \{0, \dots, N\}$. Pak pro libovolnou indexovou množinu $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, N\}$ (v dalším pro snazší značení předpokládejme $i_1 < i_2 < \dots < i_k$), označme

$$\mathbf{e}_I := \begin{cases} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_k} & \text{pro } k \in \{1, \dots, N\} \\ 1 \in \mathbb{R} & \text{pro } k = 0. \end{cases}$$

Vnější algebrou nad $\mathbb{R}^N$ nazýváme množinu (vektorový prostor)

$$\Lambda^*(\mathbb{R}^N) := \Big\{ \sum_{I \subset \{1,\dots,N\}} \alpha_I \mathbf{e}_I : \alpha_I \in \mathbb{R} \Big\},$$

na které je definována operace *sčítání* vektorů splňující

$$\sum_{I \subset \{1,\dots,N\}} \alpha_I \mathbf{e}_I + \sum_{I \subset \{1,\dots,N\}} \beta_I \mathbf{e}_I = \sum_{I \subset \{1,\dots,N\}} (\alpha_I + \beta_I) \mathbf{e}_I$$

a operace *násobení vektoru skalárem* splňující

$$c \sum_{I\subset\{1,\dots,N\}} \alpha_I \mathbf{e}_I = \sum_{I\subset\{1,\dots,N\}} c\alpha_I \mathbf{e}_I.$$

Dále definujeme operaci *vnější součin* jako bilineární operaci splňující

$$\mathbf{e}_I \wedge \mathbf{e}_J := \begin{cases} \mathbf{e}_{I\cup J} \operatorname{sign}\begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix} & \text{pro } I \cap J = \emptyset \\ 0 & \text{pro } I \cap J \neq \emptyset, \end{cases}$$

kde $\operatorname{sign}\begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix}$ je znaménko permutace, která indexy $i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_m$ uspořádá vzestupně podle velikosti.

Pro každé pevné $k \in \{0, \dots, N\}$ dále definujeme vektorový prostor

$$\Lambda^k(\mathbb{R}^N) := \Big\{ \sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,N\} \\ |I|=k}} \alpha_I \mathbf{e}_I \colon \alpha_I \in \mathbb{R} \Big\}$$

a všem jeho prvkům říkáme *k-vektory.*

Poznámka 18.1.2. (i) Pro $k = 0$ se jsme výše zavedli $\mathbf{e}_I$ jako $\mathbf{e}_\emptyset = 1$. Někdy se také tento 0-vektor značí $\mathbf{e}_0$.
(ii) Pokud $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, kde $i_1 < \dots < i_k$, zápis $\mathbf{e}_I = \mathbf{e}_{\{i_1,\dots,i_k\}}$ se obvykle zkracuje na $\mathbf{e}_{i_1\dots i_k}$.
(iii) Povšimněte si, že $\mathbf{e}_\emptyset$ má pro vnější součin roli neutrálního prvku.
(iv) 0-vektory jsou všechna reálná čísla (spadá mezi ně i výsledek vnějšího součinu $\mathbf{e}_I \cap \mathbf{e}_J$ pro $I \cap J \neq \emptyset$), 1-vektory jsou prvky $\mathbb{R}^N$ a k-vektory s $k \geq 2$ jsou složitější objekty s nimiž dosud nemáme žádnou zkušenost (třebaže u bázových $(N-1)$-vektorů lze nalézt souvislost s vektorovým součinem dílčích vektorů, což uvidíme později).
(v) Prostor $\Lambda^*(\mathbb{R}^N)$ má dimenzi 2^N.
(vi) Množina $\Lambda^k(\mathbb{R}^N)$ je uzavřená na sčítání k-vektorů a násobení skalárem.
(vii) Nulový prvek $\mathbf{0} \in \Lambda^*(\mathbb{R}^N)$ leží v každém podprostoru $\Lambda^*(\mathbb{R}^N)$. Proto je smysluplné pro $\boldsymbol{\omega} \in \Lambda^k(\mathbb{R}^N)$ psát

$$\boldsymbol{\omega} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\omega}$$

a jedná se operaci na prvcích $\Lambda^k(\mathbb{R}^N)$.

Příklad 18.1.3. (i) Na $\mathbb{R}^2$ máme

$$\Lambda^0(\mathbb{R}^2) = \operatorname{span}\{\mathbf{e}_0\} = \mathbb{R}, \quad \Lambda^1(\mathbb{R}^2) = \operatorname{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \mathbb{R}^2.$$

Dále zde máme definovaný vnější součin, který pro bázové vektory dává

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_{12}.$$

Prostor 2-vektorů je jednodimenzionální a má tvar $\Lambda^2(\mathbb{R}^2) = \operatorname{span}\{\mathbf{e}_{12}\}$. Celkově

$$\Lambda^*(\mathbb{R}^2) = \Lambda^0(\mathbb{R}^2) \oplus \Lambda^1(\mathbb{R}^2) \oplus \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$$

je čtyřdimenzionální prostor. Bází v $\Lambda^*(\mathbb{R}^2)$ je $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{12}\}$.
(ii) Na $\mathbb{R}^3$ máme

$$\Lambda^0(\mathbb{R}^3) = \operatorname{span}\{\mathbf{e}_0\} = \mathbb{R}, \quad \Lambda^1(\mathbb{R}^3) = \operatorname{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \mathbb{R}^3.$$

Máme zde vnější součin dvojic bázových vektorů

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_{12}, \quad \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_{13}, \quad \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{23}$$

a třídimenzionální prostor 2-vektorů $\Lambda^2(\mathbb{R}^3) = \operatorname{span}\{\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{23}\}$. Dále máme

$$\mathbf{e}_{123} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{12} \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_{23} = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_{12} = -\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 = \ldots.$$

Prostor $\Lambda^3(\mathbb{R}^3) = \operatorname{span}\{\mathbf{e}_{123}\}$ je 1-dimenzionální a prostor $\Lambda^*(\mathbb{R}^3)$ má dimenzi $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$.
(iii) Díky bilinearitě vnějšího součinu můžeme počítat vnější součin i složitějších objektů, než jsou vnější součiny bázových vektorů. Například na $\Lambda^*(\mathbb{R}^3)$ máme

$$\begin{aligned}\Big(\mathbf{e}_{12} + 2\mathbf{e}_2\Big) \wedge \Big(\mathbf{e}_{13} + 2\mathbf{e}_{23}\Big) &= \mathbf{e}_{12} \wedge \mathbf{e}_{13} + 2\mathbf{e}_{12} \wedge \mathbf{e}_{23} + 2\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_{13} + 4\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_{23} \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} + 2\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + \mathbf{0} \\ &= -2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = -2\mathbf{e}_{123}.\end{aligned}$$

Poznámka 18.1.4. Rozmyslete si, že pro po dvou disjunktní množiny $I, J, K \subset \{1, \ldots, N\}$ platí (na prvním řádku uspořádáváme jen indexy z $I \cup J$)

$$\operatorname{sign}\begin{pmatrix} I, J, K \\ I \cup J, K \end{pmatrix} = \operatorname{sign}\begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{sign}\begin{pmatrix} K, I, J \\ K, I \cup J \end{pmatrix} = \operatorname{sign}\begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix}$$

a

$$\operatorname{sign}\begin{pmatrix} I, J, K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix} = \operatorname{sign}\begin{pmatrix} I, J, K \\ I \cup J, K \end{pmatrix} \operatorname{sign}\begin{pmatrix} I \cup J, K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix}.$$

Věta 18.1.5 (O vlastnostech vnějšího součinu)**.** (i) *Vnější součin je asociativní.*
(ii) *Jestliže $\boldsymbol{\omega} \in \Lambda^k(\mathbb{R}^N)$ a $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda^l(\mathbb{R}^N)$, pak*

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\tau} = (-1)^{kl} \boldsymbol{\tau} \wedge \boldsymbol{\omega}.$$

(iii) *Jestliže $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N \in \mathbb{R}^N$, kde $\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^N v_i^j \mathbf{e}_j$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, N\}$, pak*

$$\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_N = \det(v_i^j)_{i,j=1}^N \mathbf{e}_{1\ldots N}.$$

Důkaz. Nejprve dokažme první vlastnost pro bázové vektory, neboli

$$(\mathbf{e}_I \wedge \mathbf{e}_J) \wedge \mathbf{e}_K = \mathbf{e}_I \wedge (\mathbf{e}_J \wedge \mathbf{e}_K).$$

Dokazovaná identita zřejmě platí, pokud nejsou množiny I, J, K po dvou disjunktní. V opačném případě díky definici vnějšího součinu pro levou stranu pomocné rovnosti máme

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_I \wedge \mathbf{e}_J) \wedge \mathbf{e}_K &= \Bigl(\operatorname{sign}\begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix}\mathbf{e}_{I\cup J}\Bigr) \wedge \mathbf{e}_K = \operatorname{sign}\begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix}(\mathbf{e}_{I\cup J}) \wedge \mathbf{e}_K \\ &= \operatorname{sign}\begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix}\operatorname{sign}\begin{pmatrix} I \cup J, K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix}\mathbf{e}_{I\cup J\cup K} \\ &= \operatorname{sign}\begin{pmatrix} I, J, K \\ I \cup J, K \end{pmatrix}\operatorname{sign}\begin{pmatrix} I \cup J, K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix}\mathbf{e}_{I\cup J\cup K} \\ &= \operatorname{sign}\begin{pmatrix} I, J, K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix}\mathbf{e}_{I\cup J\cup K}\end{aligned}$$

a pro pravou stranu platí

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_I \wedge (\mathbf{e}_J \wedge \mathbf{e}_K) &= \mathbf{e}_I \wedge \Bigl(\operatorname{sign}\begin{pmatrix} J, K \\ J \cup K \end{pmatrix}\mathbf{e}_{J\cup K}\Bigr) = \operatorname{sign}\begin{pmatrix} J, K \\ J \cup K \end{pmatrix}\mathbf{e}_I \wedge \mathbf{e}_{J\cup K} \\ &= \operatorname{sign}\begin{pmatrix} J, K \\ J \cup K \end{pmatrix}\operatorname{sign}\begin{pmatrix} I, J \cup K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix}\mathbf{e}_{I\cup J\cup K} \\ &= \operatorname{sign}\begin{pmatrix} I, J, K \\ I, J \cup K \end{pmatrix}\operatorname{sign}\begin{pmatrix} I, J \cup K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix}\mathbf{e}_{I\cup J\cup K} \\ &= \operatorname{sign}\begin{pmatrix} I, J, K \\ I \cup J \cup K \end{pmatrix}\mathbf{e}_{I\cup J\cup K}.\end{aligned}$$

Vidíme, že obě strany pomocné rovnosti se rovnají. Tím je tato rovnost dokázána.

V obecném případě použijeme bilinearitu vnějšího součinu spolu s pomocnou rovností a dostáváme

$$\begin{aligned}\Bigl(\sum_I \alpha_I \mathbf{e}_I \wedge \sum_J \alpha_J \mathbf{e}_J\Bigr) \wedge \sum_K \alpha_K \mathbf{e}_K &= \sum_I \sum_J \sum_K \alpha_I \alpha_J \alpha_K (\mathbf{e}_I \wedge \mathbf{e}_J) \wedge \mathbf{e}_K \\ &= \sum_I \sum_J \sum_K \alpha_I \alpha_J \alpha_K \mathbf{e}_I \wedge (\mathbf{e}_J \wedge \mathbf{e}_K) \\ &= \sum_I \alpha_I \mathbf{e}_I \wedge \Bigl(\sum_J \alpha_J \mathbf{e}_J \wedge \sum_K \alpha_K \mathbf{e}_K\Bigr),\end{aligned}$$

čímž je dokončen důkaz prvního tvrzení věty.

Věnujme se nyní druhému tvrzení. Vzhledem k bilinearitě vnějšího součinu stačí uvažovat případ $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_I$ a $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_J$. Rovnost navíc zřejmě platí, pokud $I \cap J \neq \emptyset$. Uvažujme proto případ $I \cap J = \emptyset$. Pak máme

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_I \wedge \mathbf{e}_J &= \operatorname{sign}\begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix}\mathbf{e}_{I\cup J} = \operatorname{sign}\begin{pmatrix} I, J \\ J, I \end{pmatrix}\operatorname{sign}\begin{pmatrix} J, I \\ I \cup J \end{pmatrix}\mathbf{e}_{I\cup J} \\ &= (-1)^{kl}\operatorname{sign}\begin{pmatrix} J, I \\ I \cup J \end{pmatrix}\mathbf{e}_{I\cup J} = (-1)^{kl}\operatorname{sign}\begin{pmatrix} J, I \\ I \cup J \end{pmatrix}\mathbf{e}_{J\cup I} = (-1)^{kl}\mathbf{e}_J \wedge \mathbf{e}_I.\end{aligned}$$

Tím je dokázána druhá část věty.

Za předpokladů třetí části máme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_N &= \sum_{j_1=1}^{N} v_1^{j_1}\mathbf{e}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \sum_{j_N=1}^{N} v_N^{j_N}\mathbf{e}_{j_N} \\
&= \sum_{j_1,\dots,j_N=1}^{N} v_1^{j_1}\dots v_N^{j_N}\mathbf{e}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{j_N} \\
&= \sum_{\substack{J=(j_1,\dots,j_N) \\ \text{je permutace na } \{1,\dots,N\}}} v_1^{j_1}\dots v_N^{j_N}\mathbf{e}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{j_N} \\
&= \sum_{\substack{J=(j_1,\dots,j_N) \\ \text{je permutace na } \{1,\dots,N\}}} v_1^{j_1}\dots v_N^{j_N} \operatorname{sign}\begin{pmatrix} j_1,\dots,j_N \\ 1,\dots,N \end{pmatrix}\mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_N \\
&= \det(v_i^j)_{i,j=1}^N \mathbf{e}_{1\dots N}
\end{aligned}$$

a jsme hotovi. □

Poznámka 18.1.6. Pokud bychom měli ve třetí části předchozí věty pouze k-tici vektorů $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k$, kde $k < N$, drobná modifikace výpočtu z předchozího důkazu by nám dala vzorec

$$\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k = \sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,N\} \\ |I|=k}} \det \mathbb{V}_I \mathbf{e}_I, \tag{18.1.1}$$

kde $\mathbb{V}_I$ je čtvercová matice vzniklá z matice $(v_i^j)_{i=1,j=1}^{k,N}$ vynecháním řádků, jejichž pořadová čísla nejsou obsažena v I.

Cvičení 18.1.7. Dokažte podrobně formuli (18.1.1).

18.2 Diferenciální formy a jejich přenášení

Při zavádění křivkového a plošného integrálu jsme pracovali s vektorovými poli. Ta byla přirozeně popsána vzhledem k souřadnicím integračního oboru. Samotná integrace se však v praxi prováděla z „narovnaného“ integračního oboru prostřednictvím parametrizace. Zde nám roli vektorových polí převezmou níže definované *diferenciální formy* a roli skládání jejich předpisů s parametrizací převezme *přenášení diferenciálních forem.*

Definice 18.2.1 (Diferenciální forma)**.** Nechť $T^*(\mathbb{R}^N)$ je vektorový prostor s bází $\{\mathbf{d}x_1,\dots,\mathbf{d}x_N\}$ (neboli $T^*(\mathbb{R}^N) = \{\sum_{i=1}^N a_i\,\mathbf{d}x_i\colon a_i \in \mathbb{R}\}$). *Diferenciální formou* na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ nazýváme libovolné zobrazení $\boldsymbol{\omega}$ z množiny Ω do vnější algebry $\Lambda^*(T^*(\mathbb{R}^N))$ popsatelné jako

$$\boldsymbol{\omega}(x) = \sum_{I\subset\{1,\dots,N\}} \omega_I(x)\,\mathbf{d}x_I,$$

kde $\omega_I \in C^\infty(\Omega)$ (pokud $I = \emptyset$, výraz $\omega_I(x)\,\mathbf{d}x_I$ čteme jako $\omega_I(x)$). Množinu všech diferenciálních forem na Ω značíme $E^*(\Omega)$. Pro každé $k \in \{0,\dots,N\}$ dále definujeme množinu *diferenciálních forem k-tého řádu*

$$E^k(\Omega) := \Big\{ \sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,N\}\\ |I|=k}} \omega_I(x)\,\mathbf{d}x_I : \omega_I \in C^\infty(\Omega) \Big\}.$$

Poznámka 18.2.2. (i) Požadavek $\omega_I \in C^\infty(\Omega)$ je velmi silný. Je pro nás pohodlný v tom, že se při budování teorie nebudeme muset starat o hladkost funkcí ω_I (stejně, jako se v integrálních větách pro plošný integrál derivují vektorová pole, my zde budeme derivovat diferenciální formy). Na druhou stranu tento požadavek způsobí, že nepokryjeme část teorie křivkového a plošného integrálu. Poznamenejme ještě, že převážná část následující teorie by si vystačila s předpokladem $\omega_I \in C^1(\Omega)$, zbytek s předpokladem $\omega_I \in C^2(\Omega)$.
(ii) Platí

$$E^*(\Omega) = E^0(\Omega) \oplus E^1(\Omega) \oplus \dots \oplus E^N(\Omega).$$

(iii) Množinu $E^0(\Omega)$ tvoří hladké (skalární) funkce na Ω a množinu $E^1(\Omega)$ tvoří hladká vektorová pole na Ω.
(iv) Prvky množiny $E^1(\Omega)$ se popisují jako

$$\boldsymbol{\omega}(x) = \omega_1(x)\,\mathbf{d}x_1 + \omega_2(x)\,\mathbf{d}x_2 + \dots + \omega_N(x)\,\mathbf{d}x_N,$$

což je stejný zápis jako jsme používali pro totální diferenciál. Některé 1-formy lze skutečně takto chápat (nikoliv všechny, což je způsobeno tím, že existují vektorová pole, která nemají potenciál), čemuž se budeme věnovat níže.
(v) Prvky množiny $E^{N-1}(\Omega)$ se často popisují jako

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}(x) = &-\omega_{2\dots N}(x)\,\mathbf{d}x_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x_N + \omega_{13\dots N}(x)\,\mathbf{d}x_1 \wedge \mathbf{d}x_3 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x_N\\ &+ \dots + (-1)^N \omega_{12\dots N-1}(x)\,\mathbf{d}x_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x_{N-1}.\end{aligned}$$

Někdy se místo důsledného značení $\omega_{2\dots N}(x)$, $\dots$, $\omega_{12\dots N-1}(x)$ používá $\omega_1(x)$, $\omega_N(x)$, aby se zdůraznila podobnost $E^1(\Omega)$ a $E^{N-1}(\Omega)$.
(vi) Prvky množiny $E^N(\Omega)$ lze popsat jako

$$\boldsymbol{\omega}(x) = \omega_{1\dots N}(x)\,\mathbf{d}x_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x_N$$

a označují se jako takzvané pseudoskaláry.
(vii) I v této kapitole budeme zakřivené objekty často parametrizovat. Označení báze jako $\{\mathbf{d}x_1,\dots,\mathbf{d}x_N\}$ či $\{\mathbf{d}t_1,\dots,\mathbf{d}t_N\}$ nám poslouží pro výstižnější znázornění, zda pracujeme v prostoru $\mathbb{R}^N$, kde je zadán studovaný problém, nebo v prostoru, z něhož zakřivené objekty parametrizujeme.

Definice 18.2.3 (Vnější diferenciál)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $k \in \{0,\dots,N\}$. Operaci *vnější diferenciál* definujeme pro libovolnou diferenciální formu $\boldsymbol{\omega} \in E^k(\Omega)$ jako (při zápisu $\boldsymbol{\omega}(x) = \sum_{I\subset\{1,\dots,N\},|I|=k} \omega_I(x)\,\mathbf{d}x_I$)

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{\partial\omega}{\partial x_i}\,\mathbf{d}x_i & \text{pro } k=0\\ \sum_{I\subset\{1,\dots,N\},|I|=k} \mathbf{d}\omega_I(x) \wedge \mathbf{d}x_I & \text{pro } k \in \{1,\dots,N\}.\end{cases}$$

Poznámka 18.2.4. (i) Pokud pro $k \geq 1$ pravou stranu formule definující vnější diferenciál rozderivujeme, dostáváme

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}(x) = \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,N\} \\ |I|=k}} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \omega_I(x)}{\partial x_i} \, \mathbf{d}x_i \wedge \mathbf{d}x_I.$$

(ii) Pokud $\boldsymbol{\omega} \in E^0(\Omega)$, pak platí $\boldsymbol{\omega}(x) = \omega(x) \, \mathbf{d}x_0$. Zároveň je možné vnější diferenciál vyjádřit podobně jako v první části této poznámky

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} \, \mathbf{d}x_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} \, \mathbf{d}x_i \wedge \mathbf{d}x_0.$$

(iii) Pro $k \in \{0, \dots, N-1\}$ je vnější diferenciál zobrazení z $E^k(\Omega)$ do $E^{k+1}(\Omega)$. Pro $\boldsymbol{\omega} \in E^N(\Omega)$ je $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}$ konstantně nulová funkce, což je objekt z $E^*(\Omega)$, který zároveň patří do všech množin $E^k(\Omega)$, kde $k \in \{0, \dots, N\}$.

Příklad 18.2.5. (i) Nechť diferenciální forma $\boldsymbol{\omega} \in E^1(\mathbb{R}^3)$ je dána předpisem $\boldsymbol{\omega}(x) = x_1 \, \mathbf{d}x_1 + x_3 \, \mathbf{d}x_2$. Spočítejme její vnější diferenciál. Máme

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_1}{\partial x_i} \, \mathbf{d}x_i \wedge \mathbf{d}x_1 + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_3}{\partial x_i} \, \mathbf{d}x_i \wedge \mathbf{d}x_2 \\
&= 1 \, \mathbf{d}x_1 \wedge \mathbf{d}x_1 + 0 \, \mathbf{d}x_2 \wedge \mathbf{d}x_1 + 0 \, \mathbf{d}x_3 \wedge \mathbf{d}x_1 \\
&\qquad + 0 \, \mathbf{d}x_1 \wedge \mathbf{d}x_2 + 0 \, \mathbf{d}x_2 \wedge \mathbf{d}x_2 + 1 \, \mathbf{d}x_3 \wedge \mathbf{d}x_2 \\
&= \mathbf{d}x_1 \wedge \mathbf{d}x_1 + \mathbf{d}x_3 \wedge \mathbf{d}x_2 = \mathbf{0} - \mathbf{d}x_2 \wedge \mathbf{d}x_3 = -\mathbf{d}x_2 \wedge \mathbf{d}x_3 = -\mathbf{d}x_{23}.
\end{aligned}$$

(ii) Nechť diferenciální forma $\boldsymbol{\omega} \in E^2(\mathbb{R}^3)$ je dána předpisem $\boldsymbol{\omega}(x) = x_1 \, \mathbf{d}x_{12} + x_1 x_2 \, \mathbf{d}x_{13}$. Spočítejme její vnější diferenciál. Máme

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_1}{\partial x_i} \, \mathbf{d}x_i \wedge \mathbf{d}x_{12} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_1 x_2}{\partial x_i} \, \mathbf{d}x_i \wedge \mathbf{d}x_{13} \\
&= 1 \, \mathbf{d}x_1 \wedge \mathbf{d}x_{12} + 0 \, \mathbf{d}x_2 \wedge \mathbf{d}x_{12} + 0 \, \mathbf{d}x_3 \wedge \mathbf{d}x_{12} \\
&\qquad + x_2 \, \mathbf{d}x_1 \wedge \mathbf{d}x_{13} + x_1 \, \mathbf{d}x_2 \wedge \mathbf{d}x_{13} + 0 \, \mathbf{d}x_3 \wedge \mathbf{d}x_{13} \\
&= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + x_1 \, \mathbf{d}x_2 \wedge \mathbf{d}x_{13} + \mathbf{0} = -x_1 \, \mathbf{d}x_{123}.
\end{aligned}$$

Věta 18.2.6 (O základních vlastnostech vnějšího diferenciálu)**.** *Nechť čísla* $k, l \in \{0, \dots, N\}$ *a* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je otevřená množina. Pak platí*
(i) $\mathbf{d}(\alpha\boldsymbol{\omega} + \beta\boldsymbol{\tau}) = \alpha \, \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} + \beta \, \mathbf{d}\boldsymbol{\tau}$ *kdykoliv* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *a* $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau} \in E^k(\Omega)$
(ii) $\mathbf{d}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\tau} + (-1)^k \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{d}\boldsymbol{\tau}$ *kdykoliv* $\boldsymbol{\omega} \in E^k(\Omega)$ *a* $\boldsymbol{\tau} \in E^l(\Omega)$
(iii) $\mathbf{d}(\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}$ *kdykoliv* $\boldsymbol{\omega} \in E^k(\Omega)$.

Důkaz. První vlastnost plyne okamžitě z definice vnějšího diferenciálu a linearity derivace. Díky již dokázané první vlastnosti stačí druhou vlastnost dokázat ve speciálním případě, že $\boldsymbol{\omega} = \omega_I\,\mathbf{d}x_I$ a $\boldsymbol{\tau} = \tau_J\,\mathbf{d}x_J$, kde $|I| = k$ a $|J| = l$. Máme

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\tau}) &= \mathbf{d}(\omega_I\tau_J\,\mathbf{d}x_I\wedge\,\mathbf{d}x_J) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial(\omega_I\tau_J)}{\partial x_i}\,\mathbf{d}x_i\wedge\mathbf{d}x_I\wedge\mathbf{d}x_J\\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial\omega_I}{\partial x_i}\tau_J\,\mathbf{d}x_i\wedge\mathbf{d}x_I\wedge\mathbf{d}x_J + \sum_{i=1}^N \frac{\partial\tau_J}{\partial x_i}\omega_I\,\mathbf{d}x_i\wedge\mathbf{d}x_I\wedge\mathbf{d}x_J\\ &= \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\tau} + (-1)^k\sum_{i=1}^N \frac{\partial\tau_J}{\partial x_i}\omega_I\,\mathbf{d}x_I\wedge\mathbf{d}x_i\wedge\mathbf{d}x_J = \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\tau} + (-1)^k\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{d}\boldsymbol{\tau}.\end{aligned}$$

I poslední vlastnost stačí díky první vlastnosti dokazovat jen ve speciálním případě $\boldsymbol{\omega} = \omega_I\mathbf{d}x_I$, kde $|I| = k$. Máme

$$\mathbf{d}(\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{d}\Big(\sum_{i=1}^N \frac{\partial\omega_I}{\partial x_i}\,\mathbf{d}x_i\wedge\mathbf{d}x_I\Big) = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2\omega_I}{\partial x_j\partial x_i}\,\mathbf{d}x_j\wedge\mathbf{d}x_i\wedge\mathbf{d}x_I.$$

Výraz úplně napravo je nulový díky tomu, že jednak dvojici stejných indexů i, j odpovídá nulový sčítanec a jednak příspěvek každé dvojice různých indexů se vyruší s příspěvkem dvojice těchto indexů s prohozeným pořadím, neboť $\frac{\partial^2\omega_I}{\partial x_j\partial x_i} = \frac{\partial^2\omega_I}{\partial x_i\partial x_j}$ (záměnnost parciálních derivací plyne z $\omega_I \in C^\infty(\Omega) \subset C^2(\Omega)$) a $\mathbf{d}x_j\wedge\mathbf{d}x_i = -\mathbf{d}x_i\wedge\mathbf{d}x_j$. Tím je důkaz dokončen. □

Představíme si ještě dva další pojmy.

Definice 18.2.7 (Uzavřená diferenciální forma, exaktní diferenciální forma)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $k \in \{0,\ldots,N\}$ a $\boldsymbol{\omega} \in E^k(\Omega)$. Řekneme, že $\boldsymbol{\omega}$ je *uzavřená*, jestliže $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = 0$. Řekneme, že $\boldsymbol{\omega}$ je *exaktní*, jestliže existuje $\boldsymbol{\tau} \in E^{k-1}(\Omega)$ taková, že $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}\boldsymbol{\tau}$.

Podle třetí části předchozí věty vidíme, že každá exaktní diferenciální forma je uzavřená. Obrácené tvrzení neplatí obecně (příklad je možné zkonstruovat za pomoci vektorového pole $(x, y) \mapsto (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$, jemuž se mimo počátek jako potenciál falešně nabízí funkce $\arctan\frac{y}{x}$). Při speciálním tvaru množiny Ω však uzavřenost diferenciální formy její exaktnost implikuje.

Věta 18.2.8 (Poincarého lemma)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená konvexní množina a $k \in \{1,\ldots,N\}$. Pak každá uzavřená forma z $E^k(\Omega)$ je exaktní.*

Důkaz. Pro jednoduchost značení předpokládejme, že $0 \in \Omega$ (v obecném případě si buď posuneme souřadný systém, nebo snadno zmodifikujeme konstrukce uvedené níže). Důkaz provedeme v několika krocích, v nichž hraje roli tvar uzavřené formy $\boldsymbol{\omega} \in E^k(\Omega)$.

Krok 1: případ $\boldsymbol{\omega} = \omega_I\mathbf{d}x_I$, kde $I = \{i_1,\ldots,i_k\} \subset \{1,\ldots,N\}$ a $1 \le k \le N$. Díky konvexitě množiny Ω můžeme definovat

$$\boldsymbol{\tau}(x) := \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1}x_{i_j}\int_0^1 t^{k-1}\omega_I(tx)\,\mathrm{d}t\,\mathbf{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{d}x_{i_{j-1}}\wedge\mathbf{d}x_{i_{j+1}}\wedge\cdots\wedge\mathbf{d}x_{i_k}.$$

Ve zbytku tohoto kroku ověříme, že $\mathbf{d}\boldsymbol{\tau} = \omega_I \mathbf{d}x_I$. Nejprve si povšimněme, že máme

$$\omega_I(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^k\omega_I(tx))\,\mathrm{d}t = \int_0^1 kt^{k-1}\omega_I(tx)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^N \int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_I}{\partial y_i}(tx)x_i\,\mathrm{d}t \tag{18.2.1}$$

a (δ_{ii_j} značí Kroneckerovo delta)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(x_{i_j}\int_0^1 t^{k-1}\omega_I(tx)\,\mathrm{d}t\Big) = \delta_{ii_j}\int_0^1 t^{k-1}\omega_I(tx)\,\mathrm{d}t + x_{i_j}\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_I}{\partial y_i}(tx)\,\mathrm{d}t. \tag{18.2.2}$$

Podle (18.2.2) dále platí

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}\boldsymbol{\tau}(x) &= \sum_{j=1}^k\sum_{i=1}^N (-1)^{j-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(x_{i_j}\int_0^1 t^{k-1}\omega_I(tx)\,\mathrm{d}t\Big) \\
&\qquad \times \mathbf{d}x_i \wedge \mathbf{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x_{i_{j-1}} \wedge \mathbf{d}x_{i_{j+1}} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x_{i_k} \\
&= k\int_0^1 t^{k-1}\omega_I(tx)\,\mathrm{d}t\,\mathbf{d}x_I + \sum_{j=1}^k\sum_{i=1}^N (-1)^{j-1}x_{i_j}\int_0^1 t^k\frac{\partial \omega_I}{\partial y_i}(tx)\,\mathrm{d}t \\
&\qquad \times \mathbf{d}x_i \wedge \mathbf{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x_{i_{j-1}} \wedge \mathbf{d}x_{i_{j+1}} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x_{i_k}.
\end{aligned}$$

Nyní si povšimneme, že první člen na pravé straně se dá vyjádřit pomocí prvního členu pravé strany v (18.2.1), a dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}\boldsymbol{\tau}(x) = \omega_I(x)\,\mathbf{d}x_I &- \sum_{i=1}^N \int_0^1 t^k\frac{\partial \omega_I}{\partial y_i}(tx)x_i\,\mathrm{d}t\,\mathbf{d}x_I \\
&+ \sum_{j=1}^k\sum_{i=1}^N (-1)^{j-1}x_{i_j}\int_0^1 t^k\frac{\partial \omega_I}{\partial y_i}(tx)\,\mathrm{d}t \\
&\times \mathbf{d}x_i \wedge \mathbf{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x_{i_{j-1}} \wedge \mathbf{d}x_{i_{j+1}} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x_{i_k}.
\end{aligned}$$

Je-li nyní ve třetím členu pravé strany $i = i_j$, odpovídající sčítanec se vyruší s jedním ze sčítanců druhého členu. Proto máme

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}\boldsymbol{\tau}(x) &= \omega_I(x)\,\mathbf{d}x_I - \sum_{i\in\{1,\dots,N\}\setminus I}\int_0^1 t^k \frac{\partial\omega_I}{\partial y_i}(tx)x_i\,\mathrm{d}t\,\mathbf{d}x_I \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i\in\{1,\dots,N\}\setminus\{i_j\}}(-1)^{j-1}x_{i_j}\int_0^1 t^k\frac{\partial\omega_I}{\partial y_i}(tx)\,\mathrm{d}t \\
&\quad \times \mathbf{d}x_i\wedge\mathbf{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{d}x_{i_{j-1}}\wedge\mathbf{d}x_{i_{j+1}}\wedge\cdots\wedge\mathbf{d}x_{i_k} \\
&= \omega_I(x)\mathbf{d}x_I - \sum_{i\in\{1,\dots,N\}\setminus I}\int_0^1 t^k \frac{\partial\omega_I}{\partial y_i}(tx)x_i\,\mathrm{d}t\,\mathbf{d}x_I \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i\in\{1,\dots,N\}\setminus I}(-1)^{j-1}x_{i_j}\int_0^1 t^k\frac{\partial\omega_I}{\partial y_i}(tx)\,\mathrm{d}t \\
&\quad \times \mathbf{d}x_i\wedge\mathbf{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{d}x_{i_{j-1}}\wedge\mathbf{d}x_{i_{j+1}}\wedge\cdots\wedge\mathbf{d}x_{i_k}.
\end{aligned}$$

Zbývá vysvětlit, že druhý a třetí člen úplně napravo jsou nulové. Zřejmé je to pro $k = N$, kdy pod sumou sčítající přes index i nezůstanou žádné členy. Jinak využijeme toho, že $\boldsymbol{\omega}$ je uzavřená. Z toho totiž plyne

$$\mathbf{0}\equiv\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\omega_I}{\partial x_i}\,\mathbf{d}x_i\wedge\mathbf{d}x_I = \sum_{i\in\{1,\dots,N\}\setminus I}\frac{\partial\omega_I}{\partial x_i}\,\mathbf{d}x_i\wedge\mathbf{d}x_I.$$

Protože navíc $\{\mathbf{d}x_i\wedge\mathbf{d}x_I\}_{i\in\{1,\dots,N\}\setminus I}$ je lineárně nezávislý systém v $\Lambda^{k+1}(\mathbb{R}^N)$, dostáváme

$$\frac{\partial\omega_I}{\partial x_i}\equiv 0 \qquad \text{pro všechna } i\in\{1,\dots,N\}\setminus I.$$

Odtud již plyne požadovaný výsledek.

Krok 2: případ $\boldsymbol{\omega} = \omega_I\,\mathbf{d}x_I + \omega_P\,\mathbf{d}x_P$, kde $I, P\subset\{1,\dots,N\}$, $|I| = |P| = k$, $1\le k\le N$ a I se od J liší v jediném indexu.
Pro jednoduchost značení budeme uvažovat pouze případ (na ostatní případy lze použít stejný postup, pouze se lehce liší značení)

$$i_1 = p_1,\quad i_2 = p_2,\quad \dots,\quad i_{k-1} = p_{k-1},\quad i_k < p_k.$$

V tomto případě definujeme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}(x) := &\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}x_{i_j}\int_0^1 t^{k-1}\omega_I(tx)\,\mathrm{d}t\,\mathbf{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{d}x_{i_{j-1}}\wedge\mathbf{d}x_{i_{j+1}}\wedge\cdots\wedge\mathbf{d}x_{i_k} \\
&+\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}x_{p_j}\int_0^1 t^{k-1}\omega_P(tx)\,\mathrm{d}t\,\mathbf{d}x_{p_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{d}x_{p_{j-1}}\wedge\mathbf{d}x_{p_{j+1}}\wedge\cdots\wedge\mathbf{d}x_{p_k}.
\end{aligned}$$

Při počítání vnějšího diferenciálu zopakujeme proceduru z předchozího kroku a dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}\boldsymbol{\tau}(x) = \omega_I(x)\,\mathbf{d}x_I + \omega_P(x)\,\mathbf{d}x_P - \sum_{i\in\{1,\dots,N\}\setminus I} \int_0^1 t^k \frac{\partial\omega_I}{\partial y_i}(tx)x_i\,\mathrm{d}t\,\mathbf{d}x_I \\
+ \sum_{j=1}^{k} \sum_{i\in\{1,\dots,N\}\setminus I} (-1)^{j-1} x_{i_j} \int_0^1 t^k \frac{\partial\omega_I}{\partial y_i}(tx)\,\mathrm{d}t \\
\times \mathbf{d}x_i \wedge \mathbf{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x_{i_{j-1}} \wedge \mathbf{d}x_{i_{j+1}} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x_{i_k} \\
- \sum_{i\in\{1,\dots,N\}\setminus P} \int_0^1 t^k \frac{\partial\omega_P}{\partial y_i}(tx)x_i\,\mathrm{d}t\,\mathbf{d}x_P \\
+ \sum_{j=1}^{k} \sum_{i\in\{1,\dots,N\}\setminus P} (-1)^{j-1} x_{p_j} \int_0^1 t^k \frac{\partial\omega_P}{\partial y_i}(tx)\,\mathrm{d}t \\
\times \mathbf{d}x_i \wedge \mathbf{d}x_{p_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x_{p_{j-1}} \wedge \mathbf{d}x_{p_{j+1}} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x_{p_k},
\end{aligned}$$

kde potřebujeme ukázat nulovost posledních čtyř členů. Uzavřenost diferenciální formy ω tentokrát dává

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} \equiv \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial\omega_I}{\partial x_i}\,\mathbf{d}x_i \wedge \mathbf{d}x_I + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial\omega_P}{\partial x_i}\,\mathbf{d}x_i \wedge \mathbf{d}x_P \\
&= \sum_{i\in\{1,\dots,N\}\setminus I} \frac{\partial\omega_I}{\partial x_i}\,\mathbf{d}x_i \wedge \mathbf{d}x_I + \sum_{i\in\{1,\dots,N\}\setminus P} \frac{\partial\omega_P}{\partial x_i}\,\mathbf{d}x_i \wedge \mathbf{d}x_P.
\end{aligned}$$

Nyní využijeme toho, že se I a P liší právě v posledním indexu. Pak totiž předchozí rovnost dává

$$\frac{\partial\omega_I}{\partial x_{p_k}} + \frac{\partial\omega_P}{\partial x_{i_k}} \equiv 0 \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial\omega_I}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial\omega_P}{\partial x_i} \equiv 0 \quad \text{pro všechna } i \in \{1,\dots,N\}\setminus(I\cup P).$$

Díky tomu se opět nadbytečné členy vyruší.

Krok 3: obecný případ.

Pokud $\boldsymbol{\omega} = \omega_I\,\mathbf{d}x_I + \omega_P\,\mathbf{d}x_P$, kde $I, P \subset \{1,\dots,N\}$, $|I| = |P| = k$, $1 \le k \le N$ a I se od J liší alespoň ve dvou indexech, můžeme použít Krok 1, protože nemůže nastat situace z předchozího kroku (tedy že u $\frac{\partial\omega_I}{\partial x_{p_k}}$ a u $\frac{\partial\omega_P}{\partial x_{i_k}}$ stojí stejný prvek z vnější algebry $\Lambda^*(T^*(\mathbb{R}^N))$). Analogicky pak postupujeme u více sčítanců. □

Další část budované teorie bude odpovídat parametrizaci k-ploch. Pro větší pohodlí budeme opět předpokládat nejvyšší hladkost použitých zobrazení.

Definice 18.2.9 (Přenos diferenciální formy)**.** Nechť $N, k, p \in \mathbb{N}$ a $p \le N$. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\boldsymbol{\omega} = \sum_{|I|=p} \omega_I \mathbf{d}x_I \in E^p(\Omega)$. Nechť $U \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina a $\boldsymbol{\varphi} \in C^\infty(U;\mathbb{R}^N)$ zobrazuje U do Ω. Pak *přenosem* diferenciální formy $\boldsymbol{\omega}$ prostřednictvím zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ nazýváme diferenciální formu na U

definovanou pro všechna $u \in U$ předpisem

$$\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega})(u) = \sum_{|I|=p} \omega_I(\boldsymbol{\varphi}(u)) \Big(\sum_{j_1=1}^{k} \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial u_{j_1}} \mathbf{d} u_{j_1} \Big) \wedge \cdots \wedge \Big(\sum_{j_p=1}^{k} \frac{\partial \varphi_{i_p}}{\partial u_{j_p}} \mathbf{d} u_{j_p} \Big).$$

Poznámka 18.2.10. (i) Přenos diferenciální formy se dá psát také ve tvaru

$$\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega})(u) = \sum_{|I|=p} \omega_I(\varphi(u))\, \mathbf{d}\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}\varphi_{i_p}.$$

Využili jsme toho, že například $\sum_{j_1=1}^{k} \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial u_{j_1}} \mathbf{d} u_{j_1}$ je vnějším diferenciálem diferenciální formy $\varphi_{i_1} \in E^0(U)$.
(ii) Definice přenosu diferenciální formy pracuje jen se vzestupně uspořádanými indexy $i_1 < \cdots < i_p$. Povšimněme si však, že pokud jsou indexy různé, ale nejsou uspořádány vzestupně, stále platí

$$\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega})(u) = \sum_{|I|=p} \omega_I(\boldsymbol{\varphi}(u))\, \mathbf{d}\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}\varphi_{i_p}.$$

Před přenosem totiž můžeme symbol $\mathbf{d}x_{i_i} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x_{i_p}$ přeuspořádat, aby indexy byly seřazeny vzestupně, což se projeví vytknutím jisté mocniny čísla -1, a po přenosu provedeme zpětné přeuspořádání na symbol $\mathbf{d}\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}\varphi_{i_p}$, což se projeví vytknutím stejné mocniny čísla -1.

Příklad 18.2.11. Nechť $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y + \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z \in E^2(\mathbb{R}^3)$ a $\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je dáno předpisem $\boldsymbol{\varphi}(u,v) = (u+v, u-v, uv)$. Pak máme

$$\mathbf{d}\varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \mathbf{d}u + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \mathbf{d}v = \mathbf{d}u + \mathbf{d}v.$$

Analogicky dále dostáváme

$$\mathbf{d}\varphi_2 = \mathbf{d}u - \mathbf{d}v \qquad \text{a} \qquad \mathbf{d}\varphi_3 = v\,\mathbf{d}u + u\,\mathbf{d}v.$$

Proto

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega})(u,v) &= (\mathbf{d}u + \mathbf{d}v) \wedge (\mathbf{d}u - \mathbf{d}v) + (\mathbf{d}u - \mathbf{d}v) \wedge (v\,\mathbf{d}u + u\,\mathbf{d}v) \\ &= (-1+u)\,\mathbf{d}u \wedge \mathbf{d}v + (1-v)\,\mathbf{d}v \wedge \mathbf{d}u = (-2+u+v)\,\mathbf{d}u \wedge \mathbf{d}v. \end{aligned}$$

Věta 18.2.12 (O základních vlastnostech přenosu diferenciální formy)**.** *Nechť $N, k, p, q \in \mathbb{N}$ a $p, q \le N$. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $\boldsymbol{\omega} \in E^p(\Omega)$ a $\boldsymbol{\tau} \in E^q(\Omega)$. Nechť $U \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina a $\boldsymbol{\varphi} \in C^\infty(U; \mathbb{R}^N)$ zobrazuje U do Ω. Pak*
(i) $\boldsymbol{\varphi}^*(\alpha\boldsymbol{\omega} + \beta\boldsymbol{\tau}) = \alpha\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega}) + \beta\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\tau})$ *kdykoliv* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *a* $p = q$
(ii) $\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega}) \wedge \boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\tau})$
(iii) $\boldsymbol{\varphi}^*(\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega})$
(iv) *je-li navíc $s \in \mathbb{N}$, $V \subset \mathbb{R}^s$ otevřená množina a $\vec{\psi} \in C^\infty(V; \mathbb{R}^k)$ zobrazuje V do U, pak*

$$(\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{\psi})^*(\boldsymbol{\omega}) = \vec{\psi}^*(\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega}))$$

(v) *je-li* $k = N = p$ *(pak* $\boldsymbol{\omega}(x) = \omega_{1\dots N}(x)\,\mathbf{d}x_{1\dots N}$*), pak na* U *platí*

$$\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega})(u) = \mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(u)\omega_{1\dots N}(\boldsymbol{\varphi}(u))\,\mathbf{d}u_{1\dots N}.$$

Důkaz. První vlastnost plyne okamžitě z definice a linearity v ní použitých operací.

Díky první části stačí druhou vlastnost dokazovat pro $\boldsymbol{\omega} = \omega_I\,\mathbf{d}x_I$ a $\boldsymbol{\tau} = \tau_J\,\mathbf{d}x_J$. Pak máme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\tau})(u) &= \boldsymbol{\varphi}^*(\omega_I\tau_J\,\mathbf{d}x_{i_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{d}x_{i_p}\wedge\mathbf{d}x_{j_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{d}x_{j_q})(u)\\ &= \omega_I(\boldsymbol{\varphi}(u))\tau_J(\boldsymbol{\varphi}(u))\,\mathbf{d}\varphi_{i_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{d}\varphi_{i_p}\wedge\mathbf{d}\varphi_{j_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{d}\varphi_{j_q}\\ &= \boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega})\wedge\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\tau}).\end{aligned}$$

Dokažme třetí vlastnost. Díky linearitě vnějšího diferenciálu a linearitě přenosu diferenciální formy stačí předpokládat, že $\boldsymbol{\omega} = \omega_I\,\mathbf{d}x_I$. Nejprve si povšimněme, že platí

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(\omega_I(\boldsymbol{\varphi}(u))\,\mathbf{d}\varphi_{i_1}) &= \mathbf{d}\Big(\sum_{j=1}^k \omega_I(\boldsymbol{\varphi}(u))\frac{\partial\varphi_{i_1}}{\partial u_j}\,\mathbf{d}u_j\Big)\\ &= \sum_{l=1}^k\sum_{j=1}^k \frac{\partial(\omega_I(\boldsymbol{\varphi}(u))\frac{\partial\varphi_{i_1}}{\partial u_j})}{\partial u_l}\,\mathbf{d}u_l\wedge\mathbf{d}u_j\\ &= \sum_{l=1}^k \frac{\partial(\omega_I(\boldsymbol{\varphi}(u)))}{\partial u_l}\,\mathbf{d}u_l\wedge\Big(\sum_{j=1}^k\frac{\partial\varphi_{i_1}}{\partial u_j}\,\mathbf{d}u_j\Big)\\ &\qquad + \omega_I(\boldsymbol{\varphi}(u))\sum_{l=1}^k\sum_{j=1}^k\frac{\partial\frac{\partial\varphi_{i_1}}{\partial u_j}}{\partial u_l}\,\mathbf{d}u_l\wedge\mathbf{d}u_j\\ &= \sum_{l=1}^k\sum_{i=1}^N\frac{\partial\omega_I}{\partial x_i}(\boldsymbol{\varphi}(u))\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_l}(u)\,\mathbf{d}u_l\wedge\mathbf{d}\varphi_{i_1} + \omega_I(\boldsymbol{\varphi}(u))\,\mathbf{d}(\mathbf{d}\varphi_{i_1})\\ &= \sum_{i=1}^N\frac{\partial\omega_I}{\partial x_i}(\boldsymbol{\varphi}(u))\sum_{l=1}^k\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_l}(u)\,\mathbf{d}u_l\wedge\mathbf{d}\varphi_{i_1} + \mathbf{0}\\ &= \sum_{i=1}^N\frac{\partial\omega_I}{\partial x_i}(\boldsymbol{\varphi}(u))\,\mathbf{d}\varphi_i\wedge\mathbf{d}\varphi_{i_1}.\end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned}\mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega}) &= \mathbf{d}\Big(\omega_I(\boldsymbol{\varphi}(u))\,\mathbf{d}\varphi_{i_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{d}\varphi_{i_p}\Big)\\ &= \mathbf{d}(\omega_I(\boldsymbol{\varphi}(u))\,\mathbf{d}\varphi_{i_1})\wedge\mathbf{d}\varphi_{i_2}\wedge\dots\wedge\mathbf{d}\varphi_{i_p}\\ &\qquad - \omega_I(\boldsymbol{\varphi}(u))\,\mathbf{d}\varphi_{i_1}\wedge\mathbf{d}(\mathbf{d}\varphi_{i_2})\wedge\dots\wedge\mathbf{d}\varphi_{i_p} + \dots\\ &= \mathbf{d}(\omega_I(\boldsymbol{\varphi}(u))\,\mathbf{d}\varphi_{i_1})\wedge\mathbf{d}\varphi_{i_2}\wedge\dots\wedge\mathbf{d}\varphi_{i_p} + \mathbf{0} + \dots + \mathbf{0}\\ &= \sum_{i=1}^N\frac{\partial\omega_I}{\partial x_i}(\boldsymbol{\varphi}(u))\,\mathbf{d}\varphi_i\wedge\mathbf{d}\varphi_{i_1}\wedge\mathbf{d}\varphi_{i_2}\wedge\dots\wedge\mathbf{d}\varphi_{i_p}.\end{aligned}$$

Na druhou stranu máme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}^*(\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\varphi}^*(\mathbf{d}(\omega_I \mathbf{d}x_I)) = \boldsymbol{\varphi}^*\Big(\sum_{i=1}^N \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}\,\mathbf{d}x_i \wedge \mathbf{d}x_I\Big) \\ = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}(\boldsymbol{\varphi}(u))\,\mathbf{d}\varphi_i \wedge \mathbf{d}\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}\varphi_{i_p}.\end{aligned}$$

Proto platí $\mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\varphi}^*(\mathbf{d}\boldsymbol{\omega})$.

Dokažme čtvrtou část. Pokud $\boldsymbol{\omega} \in E^0(\Omega)$ a $v \in V$, pak máme

$$(\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{\psi})^*(\boldsymbol{\omega})(v) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\varphi}(\vec{\psi}(v))) = \vec{\psi}^*(\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega}))(v).$$

Dále pokud $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}x_i \in E^1(\Omega)$, pak platí na jednu stranu

$$(\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{\psi})^*(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{d}(\varphi \circ \vec{\psi})_i = \sum_{l=1}^s \frac{\partial(\varphi \circ \vec{\psi})_i}{\partial v_l}\,\mathbf{d}v_l = \sum_{l=1}^s \sum_{m=1}^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_m}(\vec{\psi}(v))\frac{\partial \psi_m}{\partial v_l}\,\mathbf{d}v_l$$

a na druhou stranu máme

$$\begin{aligned}\vec{\psi}^*(\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega})) = \vec{\psi}^*(\mathbf{d}\varphi_i) = \vec{\psi}^*\Big(\sum_{m=1}^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_m}\,\mathbf{d}u_m\Big) = \sum_{m=1}^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_m}(\vec{\psi}(v))\,\mathbf{d}\psi_m \\ = \sum_{m=1}^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_m}(\vec{\psi}(v)) \sum_{l=1}^s \frac{\partial \psi_m}{\partial v_l}\,\mathbf{d}v_l.\end{aligned}$$

Proto i v tomto případě platí $(\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{\psi})^*(\boldsymbol{\omega}) = \vec{\psi}^*(\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega}))$. V obecném případě použijeme právě získané výsledky spolu s první a druhou částí naší věty.

Pátá část plyne okamžitě ze třetí části Věty o vlastnostech vnějšího součinu (Věta 18.1.5). □

Poznámka 18.2.13. Pátá část předchozí věty se dá snadno převést na situaci, kdy $p = k < N$ (to je případ, který pro nás bude nejdůležitější). Pokud je totiž $\boldsymbol{\omega} \in E^k(\Omega)$ zadaná předpisem

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,N\} \\ |I|=k}} \omega_I\,\mathbf{d}x_I$$

a pro každou zmíněnou indexovou množinu $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, N\}$ zadefinujeme $\vec{\varphi}_I := (\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots, \varphi_{i_k})$ (neboli zobrazení $\vec{\varphi}_I\colon U \to \mathbb{R}^k$ si ze zobrazení $\boldsymbol{\varphi}\colon U \to \mathbb{R}^N$ vzalo jen předepsaných k složek), pak díky páté části předchozí věty okamžitě máme

$$\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,N\} \\ |I|=k}} \omega_I \circ \boldsymbol{\varphi}\mathbf{d}\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}\varphi_{i_k} = \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,N\} \\ |I|=k}} \omega_I \circ \boldsymbol{\varphi}\mathrm{J}_{\vec{\varphi}_I}\,\mathbf{d}u_I.$$

18.2.1 Integrace diferenciálních forem

Nyní si zadefinujeme integrál z diferenciální formy přes množinu. Získáme analogii křivkového a plošného integrálu druhého druhu.

Definice 18.2.14 (Integrál z diferenciální formy)**.** (i) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\boldsymbol{\omega}(x) = \omega_{1\ldots N}(x)\,\mathrm{d}x_{1\ldots N} \in E^N(\Omega)$. Pak definujeme

$$\int_\Omega \boldsymbol{\omega} := \int_\Omega \omega_{1\ldots N}\,\mathrm{d}\lambda_N,$$

pokud Lebesgueův integrál napravo existuje.
(ii) Jestliže $k, N \in \mathbb{N}$, $k < N$, $U \subset \mathbb{R}^k$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ jsou otevřené množiny, $\boldsymbol{\varphi} \in C^\infty(U;\mathbb{R}^N)$ zobrazuje U do Ω a $\boldsymbol{\omega} \in E^k(\Omega)$, pak definujeme

$$\int_{\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle} \boldsymbol{\omega} := \int_U \boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega}),$$

pokud integrál napravo existuje.

Poznámka 18.2.15. (i) Na rozdíl od definice plošného integrálu jsme zde nekladli na $\boldsymbol{\varphi}$ žádnou podmínku zaručující jeho prostotu. Díky tomu může být při integraci nějaká část množiny $\varphi(U)$ započítána vícekrát. Je to jen dočasný stav, později na $\boldsymbol{\varphi}$ budeme klást další požadavky. Na druhou stranu, při dalším budování teorie se dostaneme k analogii integrálu přes zobecněné k-plochy, kdy bude užitečné rychle a pohodlně přiřadit nulu integrálu přes komponenty nižší dimenze, než je k. V takové situaci nám nevadí, když odpovídající integrál nepočítáme, ale pouze odhadujeme jeho absolutní hodnotu shora nulou.
(ii) Je přirozené se ptát, nakolik volba parametrizace $\boldsymbol{\varphi}$ ovlivňuje existenci a hodnotu $\int_{\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle}\boldsymbol{\omega}$. Jinými slovy, zda i zde platí nezávislost na parametrizaci. Tím se budeme zabývat hned po prozkoumání základních vlastností právě zavedeného integrálu.

Příklad 18.2.16. (i) Nechť $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\,\mathbf{d}x_1 + \cdots + \omega_N\,\mathbf{d}x_N \in E^1(\mathbb{R}^N)$ a nechť $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N) \in C^\infty((a,b);\mathbb{R}^N)$ ($\boldsymbol{\varphi}$ je hladká křivka v $\mathbb{R}^N$). Pak máme

$$\begin{aligned}\int_{\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle} \boldsymbol{\omega} &= \int_{(a,b)} \boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega}) = \int_{(a,b)} ((\omega_1 \circ \boldsymbol{\varphi})\,\mathbf{d}\varphi_1 + \cdots + (\omega_N \circ \boldsymbol{\varphi})\,\mathbf{d}\varphi_N)\\ &= \int_{(a,b)} \sum_{i=1}^N \omega_i(\varphi(t))\varphi_i'(t)\,\mathbf{d}t = \int_{(a,b)} \sum_{i=1}^N \omega_i(\varphi(t))\varphi_i'(t)\,\mathrm{d}\lambda_1(t)\\ &= \int_{\boldsymbol{\varphi}} (\omega_1, \ldots, \omega_N)\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}\end{aligned}$$

(dostali jsme křivkový integrál druhého druhu).
(ii) Nechť $\boldsymbol{\omega} = \omega_{23}\mathbf{d}x_{23} \in E^2(\mathbb{R}^3)$, na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^2$ je zadáno hladké zobrazení $\boldsymbol{\varphi}\colon (u_1,u_2) \mapsto (\varphi_1(u_1,u_2), \varphi_2(u_1,u_2), \varphi_3(u_1,u_2))$, jehož Jacobiho matice

má všude na U hodnost rovnou dvěma ($\boldsymbol{\varphi}(U)$ je hladká 2-plocha v $\mathbb{R}^3$). Pak

$$\begin{aligned}\int_{\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle}\boldsymbol{\omega} = \int_U \boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega}) &= \int_U \omega_{23}\circ\boldsymbol{\varphi}\,\mathbf{d}\varphi_2\wedge\mathbf{d}\varphi_3\\ &= \int_U \omega_{23}\circ\boldsymbol{\varphi}\Big(\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\,\mathbf{d}u + \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\,\mathbf{d}v\Big)\wedge\Big(\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\,\mathbf{d}u + \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}\,\mathbf{d}v\Big)\\ &= \int_U \omega_{23}\circ\boldsymbol{\varphi}\Big(\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\frac{\partial\varphi_3}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\Big)\,\mathbf{d}u\wedge\mathbf{d}v\\ &= \int_U \omega_{23}(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\Big(\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\frac{\partial\varphi_3}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\Big)\,\mathrm{d}\lambda_2(u,v).\end{aligned}$$

Připomeňme, že výraz $\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\frac{\partial\varphi_3}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}$ jsme potkávali v teorii plošného integrálu v první složce normálového vektoru $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}$ (jednalo se o vektorový součin tečných vektorů) a původní zadání formy $\boldsymbol{\omega}$ lze číst jako

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{23}\,\mathbf{d}x_{23} + 0\,\mathbf{d}x_{31} + 0\,\mathbf{d}x_{12}.$$

Pod posledním integrálem nám zde vyšel skalární součin

$$\big(\omega_{23}(\boldsymbol{\varphi}(u,v)), -\omega_{13}(\boldsymbol{\varphi}(u,v)), \omega_{12}(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\big)\cdot\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}},$$

což je plošný integrál druhého druhu z vektorového pole $(\omega_{23}, \omega_{31}, \omega_{12})$.

Pokud bychom ve druhé části předchozího příkladu prohodili při integraci pořadí proměnných u a v, změnilo by se nám znaménko integrálu (díky tomu, že $\mathbf{d}u\wedge\mathbf{d}v = -\mathbf{d}v\wedge\mathbf{d}u$). Proto je nutné, stejně jako u plošného integrálu druhého druhu, opatřovat plochy orientací.

Definice 18.2.17 (Difeomorfizmus)**.** Nechť $E, H \subset \mathbb{R}^k$ jsou otevřené množiny. Zobrazení $\vec{\alpha}$ z množiny E do H se nazývá *difeomorfizmus*, jestliže $\vec{\alpha}$ je bijekce, $\vec{\alpha}\in C^1(E;\mathbb{R}^k)$ a $\vec{\alpha}^{-1}\in C^1(H;\mathbb{R}^k)$.

Definice 18.2.18 (Regulární parametrizace, souhlasně orientované parametrizace)**.** Nechť $k, N \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{R}^N$. Jestliže $E \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina a $\boldsymbol{\varphi}\in C^\infty(E;\mathbb{R}^N)$ splňuje $\boldsymbol{\varphi}(E) = M$, pak zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ nazýváme *parametrizace* k-plochy M. Má-li navíc Jacobiho matice $\boldsymbol{\varphi}$ všude na E hodnost rovnu k, hovoříme o *regulární parametrizaci.* O dvou regulárních parametrizacích $\boldsymbol{\varphi}\colon E\to\mathbb{R}^N$ a $\boldsymbol{\psi}\colon H\to\mathbb{R}^N$ říkáme, že jsou *souhlasně orientované*, jestliže existuje difeomorfizmus $\vec{\alpha}$ takový, že $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi}\circ\vec{\alpha}$ a $\vec{\alpha}$ má všude na E kladný jakobián. Pokud je vše jako výše až na to, že $\vec{\alpha}$ má všude na E záporný jakobián, říkáme, že parametrizace jsou *nesouhlasně orientované.*

Poznámka 18.2.19. Nejsou-li parametrizace souhlasně orientované, neznamená to, že jsou orientované nesouhlasně. Představte si třeba nesouvislou plochu tvořenou dvěma komponentami a dvě parametrizace, které mají souhlasnou orientaci na jedné komponentě a nesouhlasnou na komponentě druhé.

Připomeňme, že množina je souvislá, jestliže je možné každé její dva body spojit lomenou čarou, která má jen konečný počet segmentů a celá leží v naší množině.

Lemma 18.2.20. *Nechť $E, H \subset \mathbb{R}^k$ jsou otevřené množiny a $\vec{\alpha}\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ je difeomorfizmus zobrazující E na H. Nechť E je souvislá. Pak H je také souvislá, $\mathrm{J}_{\vec{\alpha}}$ je všude na E nenulový a nemění znaménko.*

Důkaz. Nejprve se zabývejme tvrzením o jakobiánu. Předně protože $\vec{\alpha}^{-1} \circ \vec{\alpha}$ je identické zobrazení na E, máme

$$1 = \mathrm{J}_{\vec{\alpha}^{-1}}(\vec{\alpha}(u))\mathrm{J}_{\vec{\alpha}}(u) \qquad \text{pro všechna } u \in E,$$

a proto $\mathrm{J}_{\vec{\alpha}} \neq 0$ na E. Dále díky $\vec{\alpha} \in C^1(E; \mathbb{R}^k)$ a aritmetice derivace je jakobián spojitý na E. Díky tomu ke každému $u \in E$ najdeme otevřenou kouli centrovanou v u, kde má jakobián konstantní (nenulové) znaménko. Pokud nyní zvolíme libovolné dva body $u_1, u_2 \in E$, s využitím souvislosti E je spojíme lomenou čarou s konečným počtem segmentů, což je kompaktní množina. Díky Borelově pokrývací větě (Věta 11.8.3) nyní dokážeme naši lomenou čáru pokrýt konečným počtem výše zmíněných koulí a dostáváme, že $\operatorname{sign} J_{\vec{\alpha}}(u_1) = \operatorname{sign} J_{\vec{\alpha}}(u_2)$.

Dokažme souvislost H. Zvolme body $v_1, v_2 \in H$. Pak existují $u_1, u_2 \in E$ takové, že $v_1 = \vec{\alpha}(u_1)$ a $v_2 = \vec{\alpha}(u_2)$. Protože E je souvislá, umíme zde zkonstruovat lomenou čáru ležící v E, která spojuje u_1 a u_2. Označme ji L. Pak díky spojitosti α a kompaktnosti L je $\vec{\alpha}(L)$ kompaktní. S využitím otevřenosti množiny H okolo každého bodu množiny $\vec{\alpha}(L)$ zkonstruujme kouli ležící v H. Díky Borelově pokrývací větě (Věta 11.8.3) navíc stačí vybrat jen konečný podsystém těchto koulí, který $\vec{\alpha}(L)$ pokrývá. Přidejme do systému ještě koule centrované ve v_1 a v_2, které leží v H.

Ukážeme dále, jak se nyní zkonstruuje lomená čára spojující v_1 s v_2. Zřejmě pro každou dvojici protínajících se koulí je úsečka spojující jejich středy obsažena v jejich sjednocení a tudíž i v H. Toho využijeme v naší konstrukci. Koule si rozdělíme do několika systémů. Nultý systém tvoří koule centrovaná v bodě v_1. První systém tvoří koule protínající uvedenou kouli. Do druhého systému umístíme koule, které protínají alespoň jednu kouli z prvního systému a ještě nebyly vybrány do systémů předchozích. Odložme na chvíli důkaz toho, že se proces nepřeruší dříve, než budou vyčerpány všechny koule, a naznačme jak se zkonstruuje hledaná lomená čára. Začneme tím, že vezmeme kouli centrovanou ve v_2. Podle předchozí konstrukce musí tato koule protínat nějakou kouli ze systému s o jedna menším pořadovým číslem. Spojíme středy těchto koulí, ke kouli ze systému s menším pořadovým číslem najdeme kouli ze systému zase s o jedna menším pořadovým číslem, kterou proniká, spojíme středy, atd.

Zbývá ukázat, že při postupné konstrukci systémů koulí vybereme všechny koule. Parametrizujme lomenou čáru L prostřednictvím její délky a nechť nulovému parametru odpovídá bod u_1. Máme tedy spojité zobrazení $\vec{\varphi}$ intervalu $[0, l]$ na L. Označme $\widetilde{A} \subset [0, l]$ jako množinu takových bodů $t \in [0, L]$, že $\vec{\alpha}(\vec{\varphi}(t))$ leží v nějaké kouli, kterou se nám podařilo vybrat do některého z konstruovaných systémů. Konstrukci jsme započali od koule obsahující v_1 a navíc díky spojitosti zobrazení $\vec{\varphi}$ a $\vec{\alpha}$ je ve zmíněné kouli obsažen obraz jistého intervalu $[0, t_0]$. Nechť v dalším A je největší možný interval s vlastnostmi $[0, t_0] \subset A \subset \widetilde{A}$. Pro spor předpokládejme, že $A \neq [0, l]$. Označme $a = \sup A$. Zřejmě pak $a \geq t_0 > 0$. Pokud $a \in A$ (zde musí být $a < l$, jinak by platilo $A = [0, l]$), pak $\vec{\alpha}(\vec{\varphi}(a))$ leží v jedné z koulí, které jsme někdy vybrali. Tato koule je otevřená a spojitost $\vec{\alpha} \circ \vec{\varphi}$ nám dává, že jisté pravé okolí bodu a leží také v A, což je ve sporu s definicí suprema. Zbývá pouze možnost, že $a \notin A$. Pak ale $\vec{\alpha}(\vec{\varphi}(a))$ leží v nějaké kouli, kterou se nám nepodařilo vybrat (to znamená, že zmíněná koule neprotíná žádnou z koulí vybraných). Ze spojitosti $\vec{\alpha} \circ \vec{\varphi}$ a otevřenosti zmíněné koule pak dostáváme, že $a > \sup A$, což je opět spor. □

Věta 18.2.21 (O nezávislosti na parametrizaci)**.** *Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $M \subset \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{\varphi}\colon E \to \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{\psi}\colon H \to \mathbb{R}^N$ jsou dvě regulární parametrizace k-plochy M a $\boldsymbol{\omega} \in E^k(\mathbb{R}^N)$.*
(i) *Jsou-li $\boldsymbol{\varphi}$ a $\boldsymbol{\psi}$ souhlasně orientované, pak*

$$\int_{\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle} \boldsymbol{\omega} = \int_{\langle\boldsymbol{\psi}\rangle} \boldsymbol{\omega}$$

pokud alespoň jeden z integrálů existuje.
(i) *Jsou-li $\boldsymbol{\varphi}$ a $\boldsymbol{\psi}$ nesouhlasně orientované, pak*

$$\int_{\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle} \boldsymbol{\omega} = -\int_{\langle\boldsymbol{\psi}\rangle} \boldsymbol{\omega}$$

pokud alespoň jeden z integrálů existuje.

Důkaz. Zabývejme se nejdříve prvním případem a předpokládejme, že existuje integrál napravo. Nechť $\vec{\alpha}$ je difeomorfizmus z definice souhlasně orientovaných parametrizací. V důkazu nejprve použijeme definici integrálu z diferenciální formy, pak použijeme Větu o substituci (Věta 15.12.1) pro Lebesgueův integrál a několikrát ještě Větu o základních vlastnostech přenosu diferenciální formy (Věta 18.2.12). Pro zjednodušení značení budeme pro indexovou množinu $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, N\}$ psát $\vec{\psi}_I := (\psi_{i_1}, \psi_{i_2}, \dots, \psi_{i_k})$ (neboli zobrazení $\vec{\psi}_I\colon H \to \mathbb{R}^k$ si ze zobrazení $\boldsymbol{\psi}\colon H \to \mathbb{R}^N$ vzalo jen předepsaných k složek).

Máme

$$
\begin{aligned}
\int_{\langle\boldsymbol{\psi}\rangle} \boldsymbol{\omega} &= \int_H \boldsymbol{\psi}^*(\boldsymbol{\omega}) = \int_H \boldsymbol{\psi}^*\Big(\sum_{|I|=k} \omega_I \,\mathbf{d}x_I\Big) \\
&= \int_H \sum_{|I|=k} \omega_I \circ \boldsymbol{\psi}\,\mathbf{d}\psi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}\psi_{i_k} = \int_H \sum_{|I|=k} \omega_I \circ \boldsymbol{\psi} \mathrm{J}_{\vec{\psi}_I} \,\mathbf{d}v_{1\ldots k} \\
&= \int_H \sum_{|I|=k} \omega_I(\boldsymbol{\psi}(v)) \mathrm{J}_{\vec{\psi}_I}(v) \,\mathrm{d}\lambda_k(v) \\
&= \int_{\vec{\alpha}^{-1}(H)} \sum_{|I|=k} \omega_I(\boldsymbol{\psi}(\vec{\alpha}(u))) \mathrm{J}_{\vec{\psi}_I}(\vec{\alpha}(u)) |\mathrm{J}_{\vec{\alpha}}(u)| \,\mathrm{d}\lambda_k(u) \\
&= \int_E \sum_{|I|=k} \omega_I(\boldsymbol{\varphi}((u)) \mathrm{J}_{\vec{\psi}_I}(\alpha(u)) \mathrm{J}_{\vec{\alpha}}(u) \,\mathrm{d}\lambda_k(u) \\
&= \int_E \sum_{|I|=k} \omega_I(\boldsymbol{\varphi}(u)) \mathrm{J}_{\vec{\varphi}_I}(u) \,\mathrm{d}\lambda_k(u) \\
&= \int_E \sum_{|I|=k} \omega_I \circ \boldsymbol{\varphi} \mathrm{J}_{\vec{\varphi}_I} \,\mathbf{d}u_{1\ldots k} = \int_E \sum_{|I|=k} \omega_I \circ \boldsymbol{\varphi}\,\mathbf{d}\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}\varphi_{i_k} \\
&= \int_E \boldsymbol{\varphi}^*\Big(\sum_{|I|=k} \omega_I \,\mathbf{d}x_I\Big) = \int_{\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle} \boldsymbol{\omega}.
\end{aligned}
$$

Tím je důkaz dokončen v případě dvojice souhlasně orientovaných parametrizací.

Pokud jsou parametrizace orientované nesouhlasně, použijeme stejný postup. Výpočet se bude lišit pouze tím, že po aplikaci Věty o substituci (Věta 15.12.1) se změní znaménko integrálu, neboť tentokrát $|\mathrm{J}_{\vec{\alpha}}| = -\mathrm{J}_{\vec{\alpha}}$ na E. $\square$

Definice 18.2.22 (Plocha dimenze nejvýše k a regulární plocha dimenze k)**.** Nechť $k, N \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{R}^N$. Jestliže existují neprázdná oblast $E \subset \mathbb{R}^k$ a hladké zobrazení $\boldsymbol{\varphi}\colon E \to \mathbb{R}^N$ takové, že $\boldsymbol{\varphi}(E) = M$, pak řekneme, že M je *plocha dimenze nejvýše k* v $\mathbb{R}^N$.

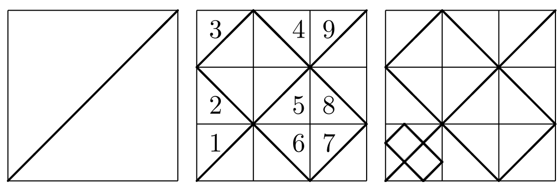
Jestliže dokonce existuje neprázdný otevřený interval $I \subset \mathbb{R}^k$ a hladké zobrazení $\boldsymbol{\varphi}\colon I \to \mathbb{R}^N$ takové, že $\boldsymbol{\varphi}(I) = M$, $\boldsymbol{\varphi}$ je prosté a jeho Jacobiho matice má hodnost k všude na I, pak řekneme, že M je *regulární plocha dimenze k* v $\mathbb{R}^N$.

Poznámka 18.2.23. (i) Definice regulární plochy dimenze k je téměř totožná s definicí k-plochy z teorie křivkového a plošného integrálu (požadujeme zde navíc hladkost parametrizace a za definiční obor interval). U dobře známých ploch (nadrovina, sféra, kuželová polocha, válcová plocha, ...) se typicky za parametrizaci bere jejich „narovnání“ a „otočení“, a dostáváme pro ně přesně takovou dimenzi, jakou intuitivně očekáváme.
(ii) Je-li parametrizace $\boldsymbol{\varphi}$ alespoň třídy C^1, pak je lokálně lipschitzovská, a proto pro $k < N$ je $\lambda_N(I) = 0$ (stačí parametrizaci rozšířit na $I \times \mathbb{R}^{N-k}$ tak, že s přidanými proměnnými nepracuje a pak použít skutečnost, že lokálně lipschitzovský

obraz množiny nulové Lebesgueovy míry má opět nulovou Lebesgueovu míru). Navíc žádná podmnožina $\mathbb{R}^N$ nemůže být regulární plochou dimenze k pro $k > N$ díky podmínce na hodnost Jacobiho matice.

Pokud bychom používali jen spojité parametrizace, z hlediska dimeze bychom se nevyhnuli patologickým jevům, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 18.2.24. Existuje spojité zobrazení intervalu $[0,1]$ na $[0,1]^2$, které se nazývá *Peanova křivka*. Zde si představíme jednu z možných konstrukcí. Výsledná křivka bude definována jako bodová limita následující posloupnosti křivek. První křivka je dána předpisem $\boldsymbol{\varphi}_1(t) = [t,t]$ pro $t \in [0,1]$. Druhou křivku definujeme tak, že interval $[0,1]$ rozdělíme na 9 stejných dílů, čtverec $[0,1]^2$ rozdělíme na 9 stejných dílů a na jednotlivých dílech definujeme křivku afinně jako na obrázku. Interval $[0, \frac{1}{9}]$ je afinně zobrazen na úsečku označenou 1, interval $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$ na úsečku označenou 2, atd. Třetí křivku zkonstruujeme tak, že každou z devíti částí intervalu $[0,1]$ a jí odpovídající malý čtverec rozdělíme na 9 stejných dílů a zopakujeme předchozí proces.



Obrázek 18.1: Znázornění prvních dvou členů posloupnosti konvergující k Peanově křivce a počátku procesu, který z druhého členu vyrobí člen třetí.

Snadno se dá nahlédnout, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $\boldsymbol{\varphi}_n([0,\frac{1}{9}]) \subset [0,\frac{1}{3}]^2$ a podobně pro ostatní čtverce. Tyto jevy mají za následek, že posloupnost spojitých křivek $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}$ konverguje stejnoměrně k nějaké spojité křivce $\boldsymbol{\varphi}$. Snadno také nahlédneme, že $\boldsymbol{\varphi}([0,1])$ je hustá množina v $[0,1]^2$. Zároveň je $\boldsymbol{\varphi}([0,1])$ kompaktní jakožto spojitý obraz kompaktu, a proto $\boldsymbol{\varphi}([0,1]) = [0,1]^2$.

Věta 18.2.25 (O korektnosti definice regulární plochy dimenze k)**.** *Nechť $k, l, N \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{R}^N$ je zároveň regulární plocha dimenze k a regulární plocha dimenze l. Pak $k = l \leq N$.*

Důkaz. Důkaz je analogický důkazu Věty o korektnosti definice k-plochy (Věta 17.2.4). Pro úplnost jej zde uvedeme také.

V předchozí poznámce jsme již vysvětlili, že $k, l \leq N$. Pro spor předpokládejme, že máme $k < l$, prosté regulární parametrizace $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}$ a otevřené intervaly $I \subset \mathbb{R}^k$, $J \subset \mathbb{R}^l$ takové, že $\boldsymbol{\varphi}(I) = \boldsymbol{\psi}(J) = M$.

Díky prostotě $\boldsymbol{\psi}$ je dobře definováno zobrazení $\boldsymbol{\psi}^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}$, obvyklým trikem z teorie křivkového a plošného integrálu (trik je založen na Větě o implicitní funkci, tedy

Větě 12.4.13, a využívá $\boldsymbol{\psi} \in C^1(J;\mathbb{R}^N)$ a hodnost Jacobiho matice zobrazení $\boldsymbol{\psi}$; zmíněný trik alespoň stručně připomeneme na konci důkazu) ukážeme, že $\boldsymbol{\psi}^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi} \in C^1(I,\mathbb{R}^l)$ (a proto se jedná o lokálně lipschitzovské zobrazení). Nyní stačí použít metodu s dodefinováním parametrizace $\boldsymbol{\varphi}$ na parametrizaci $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$ pracující na $I \times \mathbb{R}^{l-k}$ připomenutou v minulé poznámce. Dostáváme

$$\lambda_l(J) = \lambda_l(\boldsymbol{\psi}^{-1} \circ \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(I \times \{0\}^{l-k})) = \lambda_l(I \times \{0\}^{l-k}) = 0$$

a máme spor.

Připomeňme ještě, jak se získá $\boldsymbol{\psi}^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi} \in C^1(I;\mathbb{R}^l)$. Nejprve zafixujme $u_0 \in I$. Nyní definujeme pomocné funkce

$$F_i(u,v) = \varphi_i(u) - \psi_i(v) \qquad \text{pro } u \in I \text{ a } v \in J.$$

Index i zde probíhá l-prvkovou podmnožinu $\{1,\dots,N\}$ odpovídající řádkům, které tvoří regulární čtvercovou submatici Jacobiho matice zobrazení $\boldsymbol{\psi}$ v bodě $v_0 = \boldsymbol{\psi}^{-1}(\boldsymbol{\varphi}(u_0))$. Věta o implicitní funkci (Věta 12.4.13) nám umožní na okolí (u_0,v_0) vyjadřovat v pomocí u. Navíc nám dá hladkost tohoto vyjádření a také jednoznačnost. Díky tomu i zobrazení $\boldsymbol{\psi}^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}$ musí mít stejnou hladkost. □

Poznámka 18.2.26. Povšimněme si, že v důkazu nerovnosti $k \geq l$ jsme potřebovali, aby $\boldsymbol{\varphi}$ byla parametrizace třídy C^1 a $\boldsymbol{\psi}$ byla prostá regulární parametrizace třídy C^1. Předchozí důkaz proto okamžitě dává, že je-li $M \subset \mathbb{R}^N$ regulární plochou dimenze l, pak nemůže být plochou dimenze nejvýše k pro žádné $k < l$.

Věta 18.2.27 (O dvou třídách regulárních parametrizací)**.** *Nechť $k,N \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{R}^N$ je regulární plocha dimenze k. Pak existují právě dvě třídy souhlasně orientovaných regulárních parametrizací této plochy.*

Důkaz. Nechť $(\boldsymbol{\varphi},I)$, $(\boldsymbol{\psi},J)$ jsou dvě regulární parametrizace množiny M. Standardním způsobem založeným na Větě o implicitní funkci (Věta 12.4.13) umíme dokázat, že $\vec{\alpha} := \boldsymbol{\varphi}^{-1} \circ \boldsymbol{\psi}$ je prosté zobrazení splňující $\vec{\alpha} \in C^\infty(J;\mathbb{R}^k)$ a $\vec{\alpha}(J) = I$. Analogický přístup k $\boldsymbol{\psi}^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}$ dává $\vec{\alpha}^{-1} \in C^\infty(I;\mathbb{R}^k)$. Proto je $\vec{\alpha}$ difeomorfizmus a podle Lemmatu 18.2.20 je $\mathrm{J}_{\vec{\alpha}}$ nenulový všude na J a nemění zde znaménko.

Zafixujeme-li jednu parametrizaci jako pevnou, jako první třídu regulární parametrizací definujeme parametrizace s ní souhlasně orientované. Ty jsou souhlasně orientované i vzájemně díky pravidlům pro počítání s determinantem. Do druhé třídy umístíme regulární parametrizace nesouhlasně orientované k $\boldsymbol{\varphi}$. □

Definice 18.2.28 (Orientovaná plocha dimenze k)**.** Nechť $k,N \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{R}^N$ je regulární plocha dimenze k. Říkáme, že M je *orientovaná plocha* dimenze k, jestliže je určena jedna ze dvou tříd regulárních parametrizací z minulé věty a jí příslušející parametrizace jsou označené jako kladně orientované regulární parametrizace plochy M.

Příklad 18.2.29. (i) Úsečku

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in (0,1), y = 2x\}$$

můžeme například parametrizovat pomocí zobrazení $\varphi\colon t \mapsto (t, 2t)$ z otevřeného intervalu $(0,1)$. Je to prosté C^∞-zobrazení. Jacobiho matice má tvar

$$D\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Odtud je $\boldsymbol{\varphi}$ regulární parametrizace. Pokud bychom použili parametrizaci $\boldsymbol{\psi}\colon s \mapsto (-s, -2s)$ pro $s \in (-1, 0)$, na jednu stranu bychom zjistili, že je to opět regulární parametrizace, a na druhou stranu má zobrazení $\alpha := \varphi^{-1} \circ \boldsymbol{\psi}\colon t \mapsto s = -t$ záporný jakobián, a proto $\boldsymbol{\varphi}$ a $\boldsymbol{\psi}$ dávají nesouhlasnou orientaci.
(ii) Nechť

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1, (x, y) \notin [-1, 0] \times \{0\}\}$$

(jednotková sféra v $\mathbb{R}^3$ bez jednoho poledníku). Množinu M je možné hladce parametrizovat třeba pomocí zobrazení

$$\boldsymbol{\varphi}\colon (\tau, \eta) \mapsto (\cos\eta\cos\tau, \cos\eta\sin\tau, \sin\eta) \qquad \text{pro } \tau \in (-\pi, \pi) \text{ a } \eta \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}).$$

Jacobiho matice má tvar

$$D\boldsymbol{\varphi}(\tau, \eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta} \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial\tau} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\eta\sin\tau & -\sin\eta\cos\tau \\ \cos\eta\cos\tau & -\sin\eta\sin\tau \\ 0 & \cos\eta \end{pmatrix}.$$

Snadno se nyní nahlédne, že Jacobiho matice má všude hodnost 2 (kdykoliv $\cos\tau \neq 0$, čtvercová matice tvořená posledními dvěmi řádky má nenulový determinant; pokud naopak platí $\cos\tau = 0$, uvážíme čtvercovou matici tvořenou prvním a třetím řádkem). Proto je M regulární plocha dimenze 2 v $\mathbb{R}^3$. Pokud nyní uvážíme parametrizaci

$$\boldsymbol{\varphi}\colon (\eta, \tau) \mapsto (\cos\eta\cos\tau, \cos\eta\sin\tau, \sin\eta) \qquad \text{pro } \eta \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \text{ a } \tau \in (-\pi, \pi),$$

přechod mezi oběma parametrizacemi nám zajišťuje difeomorfizmus $\vec{\alpha}\colon (s, t) \mapsto (t, s)$ s Jacobiho maticí

$$D\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

která má záporný determinant, a proto zmíněné parametrizace dávají nesouhlasnou orientaci.
(iii) Je-li $k = N - 1$, orientaci můžeme zavést třeba tak, že v nějakém bodě plochy vezmeme bázi tečného prostoru, označme ji $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{N-1}\}$ a zvolíme jeden vektor $\boldsymbol{\nu}$ kolmý k tečnému prostoru. Tím získáme systém $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{N-1}, \boldsymbol{\nu}$ a znaménka jednotlivých parametrizací přiřadíme podle znaménka determinantu matice přechodu mezi nimi.
(iv) Na $\mathbb{R}^N$ se dá orientace zvolit volbou báze nebo třeba volbou nenulového prvku z $\Lambda^N(\mathbb{R}^N)$.

Definice 18.2.30 (Integrál přes orientovanou plochu)**.** Nechť M je orientovaná plocha dimenze k v $\mathbb{R}^N$ a $\boldsymbol{\omega} \in E^k(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je nějaká otevřená množina obsahující M. Nechť $\boldsymbol{\varphi}$ je kladně orientovaná regulární parametrizace plochy M. Pak definujeme

$$\int_M \boldsymbol{\omega} := \int_{\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle} \boldsymbol{\omega}.$$

Věta 18.2.31 (O korektnosti definice integrálu)**.** *Definice $\int_M \boldsymbol{\omega}$ je korektní (nezávisí na volbě parametrizace).*

Důkaz. Protože v definici připouštíme jen kladně orientované parametrizace, libovolná dvojice takovýchto parametrizací je souhlasně orientovaná. Výsledek proto plyne z Věty o nezávislosti na parametrizaci (Věta 18.2.21). □

Dalším krokem je vybudování analogie k pojmu zobecněná k-plocha, která nám pomůže obcházet takové nepříjemnosti, jako je kupříkladu obvyklá parametrizace jednotkové sféry v $\mathbb{R}^3$ vynechávající jeden poledník.

Definice 18.2.32 (Zobecněná plocha dimenze k)**.** Nechť $k, N \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že M je *zobecněná plocha dimenze k* v $\mathbb{R}^N$, jestliže existuje konečný systém množin $\{M_1, \dots, M_n, P\}$ takový, že platí:
(i) $M = \bigcup_{i=1}^n M_i \cup P$
(ii) množiny $M_1, \dots, M_n, P$ jsou po dvou disjunktní
(iii) množiny $M_1, \dots, M_n$ jsou regulární plochy dimenze k
(iv) existuje konečný počet ploch $P_1, \dots, P_m$ dimenze nejvýše $k-1$ takových, že $P \subset P_1 \cup \dots \cup P_m$.

Systém $\{M_1, \dots, M_n, P\}$ se nazývá *rozklad* zobecněné plochy M a orientace M je dána orientacemi regulárních ploch $M_1, \dots, M_n$. Dva rozklady $\{M_1, \dots, M_n, P\}$ a $\{O_1, \dots, O_m, Q\}$ jsou souhlasně orientovány, jestliže pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$ a $j \in \{1, \dots, m\}$ jsou souhlasně orientovány M_i a O_j na $M_i \cap O_j$.

Kladně orientovaný rozklad je takový rozklad, že je souhlasně orientovaný s rozkladem, jehož komponenty $M_1, \dots, M_n$ jsou orientovány kladně.

Definice 18.2.33 (Integrál přes orientovanou zobecněnou plochu dimenze k)**.** Nechť $M \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$, kde M je orientovaná zobecněná plocha dimenze k v $\mathbb{R}^N$ s kladně orientovaným rozkladem $\{M_1, \dots, M_n, P\}$ a Ω je otevřená množina, a $\boldsymbol{\omega} \in E^k(\Omega)$. Pak definujeme

$$\int_M \boldsymbol{\omega} := \sum_{i=1}^n \int_{M_i} \boldsymbol{\omega},$$

má-li pravá strana smysl.

Poznámka 18.2.34. Na rozdíl od Definice zobecněné k-plochy (Definice 17.2.26) zde nepožadujeme, aby byl průnik zobecněných ploch dimenze k s uzávěrem ostatních ploch stejné dimenze prázdný. Hlavní výsledek této kapitoly totiž bude pracovat s mnohem lepšími zobrazeními a mnohem lepšími množinami než integrální věty z klasické teorie plošného integrálu.

Věta 18.2.35 (O korektnosti definice integrálu přes orientovanou zobecněnou plochu)**.** *Integrál přes orientovanou zobecněnou plochu dimenze k nezávisí na volbě rozkladu.*

Důkaz. Nechť $\{M_1, \dots, M_n, P\}$ a $\{O_1, \dots, O_m, Q\}$ jsou dva kladně orientované rozklady orientované zobecněné plochy $M \subset \mathbb{R}^N$, která má dimenzi k. Parametrizace odpovídající zmíněným rozkladům označme $(\boldsymbol{\varphi}_i, I_i)$ a $(\boldsymbol{\psi}_j, J_j)$. Pak platí

$$\begin{aligned} M_i &= (M_i \cap O_1) \cup (M_i \cap O_2) \cup \dots \cup (M_i \cap O_m) \cup (M_i \cap Q) \\ O_j &= (O_j \cap M_1) \cup (O_j \cap M_2) \cup \dots \cup (O_j \cap M_n) \cup (O_j \cap P). \end{aligned}$$

Proto máme (jednotlivé kroky vysvětlíme pod výpočtem)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \int_{M_i} \boldsymbol{\omega} &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\vec{\varphi}_i^{-1}(M_i)} \boldsymbol{\varphi}_i^*(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \int_{\vec{\varphi}_i^{-1}(M_i \cap O_j)} \boldsymbol{\varphi}_i^*(\boldsymbol{\omega}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \int_{\vec{\psi}_j^{-1}(M_i \cap O_j)} (\boldsymbol{\psi}_j)^*(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^{m} \int_{(\vec{\psi}_j)^{-1}(O_j)} (\boldsymbol{\psi}_i)^*(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^{m} \int_{O_j} \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

První rovnost je jen předpis z definice. Než se pustíme do druhé a třetí rovnosti ujasněme si, že

$$\vec{\varphi}_i^{-1}(M_i \cap O_j) \text{ jsou otevřené množiny} \qquad \text{a} \qquad \lambda_k\Big(I_i \setminus \bigcup_{j=1}^{m} \vec{\varphi}_i^{-1}(M_i \cap O_j)\Big) = 0. \tag{18.2.3}$$

Dokažme nejprve otevřenost $\vec{\varphi}_i^{-1}(M_i \cap O_j)$ pro každou zafixovanou dvojici $i \in \{1, \dots, n\}$ a $j \in \{1, \dots, m\}$. Zvolme bod $u_0 \in \vec{\varphi}_i^{-1}(M_i \cap O_j) \subset I_i$. Pak nutně existuje bod $v_0 \in J_j$ takový, že $\boldsymbol{\varphi}_i(u_0) = \boldsymbol{\psi}_j(v_0)$. Definujme funkce

$$F_l(u, v) = (\varphi_i)_l(u) - (\psi_j)_l(v) \qquad \text{pro } l = \{1, \dots, N\}.$$

Standardním postupem založeným na Větě o implicitní funkci (Věta 12.4.13) (potřebujeme vynechat příslušný počet indexů, abychom využili maximální možnou hodnost jakobiánu, postup je stejný jako v důkazu Věty o korektnosti definice k-plochy, tedy Věty 17.2.4) nalezneme okolí bodu u_0 takové, že je každému bodu u z tohoto okolí přiřazen bod $v \in J_j$ splňující $\boldsymbol{\varphi}_i(u) = \boldsymbol{\psi}_j(v)$, což jsme chtěli ukázat.

Každý bod množiny $I_i \setminus \bigcup_{j=1}^{m} \vec{\varphi}_i^{-1}(M_i \cap O_j)$ se dá popsat jako bod $u \in I_i$ pro který platí

$$\boldsymbol{\varphi}_i(u) = \boldsymbol{\psi}_l(v),$$

kde $(\boldsymbol{\psi}_l, J_l)$ je parametrizace jedné z konečného počtu ploch dimenze $s \leq k-1$, které tvoří množinu Q. Obvyklým trikem s dodefinováním $\boldsymbol{\psi}_l$ na funkci $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_l$ pracující s $J_l \times \mathbb{R}^{k-s}$ a užitím Věty o implicitní funkci dostáváme, že $\vec{\varphi}_i^{-1} \circ \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_l$ je lokálně lipschitzovské zobrazení a následně

$$\lambda^k\Big(\vec{\varphi}_i^{-1}(\boldsymbol{\psi}_l(J_l))\Big) = \lambda^k\Big(\vec{\varphi}_i^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_l(J_l \times \{0\}^{k-s}))\Big) = 0.$$

Tím jsou dokázány pomocné výsledky (18.2.3). Z těchto výsledků a toho, že množiny $M_i \cap O_1, \dots, M_i \cap P_m$ jsou po dvou disjunktní, okamžitě plyne druhá rovnost v dokazované řetězové rovnosti. Třetí rovnost plyne z prvního tvrzení v (18.2.3) a Věty o nezávislosti na parametrizaci (Věta 18.2.21). Zbylé rovnosti popisují jen analogické situace k rovnostem již dokázaným. $\square$

18.2.2 Plošný integrál prvního druhu v jazyce diferenciálních forem

Definice 18.2.36 (Skalární součin se signaturou)**.** Nechť $N \in \mathbb{N}$ a $p, q \in \mathbb{N}_0$ splňují $p + q = N$. Pak pro každou dvojici bodů $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_N)$ a $\boldsymbol{y} = (x_1, \dots, x_N)$ definujeme číslo

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := \sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{N} x_i y_i$$

a nazýváme ho *skalární součin* prvků x a y *se signaturou* (p, q).

Příklad 18.2.37. (i) Námi dosud užívaný skalární součin na $\mathbb{R}^N$ je zároveň skalárním součinem se signaturou $(N, 0)$.
(ii) Na Minkowského prostoru ($\mathbb{R}^4$ se souřadnicemi značenými (x_1, x_2, x_3, t)) se zavádí skalární součin se signaturou $(3, 1)$.

Nyní skalární součin se signaturou (p, q) rozšíříme na $\lambda^*(\mathbb{R}^N)$. Nechť $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$ je kanonická báze v $\mathbb{R}^N$. Nechť $I, J \subset \{1, \dots, N\}$. Označme $k := |I|$. Pak definujeme

$$\langle \mathbf{e}_I, \mathbf{e}_J \rangle := \begin{cases} 0 & \text{pro } I \neq J \\ \langle \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_1} \rangle \dots \langle \mathbf{e}_{i_k}, \mathbf{e}_{i_k} \rangle & \text{pro } I = J \end{cases}$$

(s konvencí, že v případě $I = J = \emptyset$ spodní řádek čteme jako jedničku). Na $\lambda^*(\mathbb{R}^N)$ nyní skalární součin se signaturou (p, q) rozšíříme pomocí linearity, což přeneseme na diferenciální formy jako (nechť $\boldsymbol{\omega} = \sum_{I \subset \{1,\dots,N\}} \omega_I \mathbf{e}_I$, $\boldsymbol{\tau} = \sum_{J \subset \{1,\dots,N\}} \tau_J \mathbf{e}_J \in E^*(\Omega)$)

$$\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau} \rangle := \sum_{I,J \subset \{1,\dots,N\}} \omega_I \tau_J \langle \mathbf{e}_I, \mathbf{e}_J \rangle = \sum_{I \subset \{1,\dots,N\}} \omega_I \tau_I \langle \mathbf{e}_I, \mathbf{e}_I \rangle.$$

Definice integrálu bude nyní ještě více připomínat definici plošného integrálu prvního druhu, neboť budeme používat jistou analogii ke Gramově matici.

Definice 18.2.38 (Plošný integrál prvního druhu z diferenciální formy)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}^N$ je regulární plocha dimenze k v $\mathbb{R}^N$, která je parametrizovaná prostřednictvím (φ, I). Definujme matici $\mathbb{G} = \{G_{ij}\}_{i,j=1}^k$ předpisem

$$G_{ij} := \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u_i}, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u_j} \right\rangle \qquad \text{pro všechna } i, j \in \{1, \dots, k\}.$$

Je-li nyní $\boldsymbol{\omega}(x) = \omega_0(x)\, \mathbf{d}x_0 \in E^0(\Omega)$, kde $\Omega \supset M$ je otevřená množina, pak definujeme

$$\int_M \boldsymbol{\omega} \,\mathrm{d}S := \int_I (\omega_0 \circ \boldsymbol{\varphi}) \sqrt{|\det \mathbb{G}|} \,\mathrm{d}\lambda_k,$$

pokud Lebesgueův integrál na pravé straně existuje.

Je-li M zobecněná plocha dimenze k v $\mathbb{R}^N$ s rozkladem $\{M_1, \dots, M_n, P\}$, pak definujeme

$$\int_M \boldsymbol{\omega} \,\mathrm{d}S := \sum_{i=1}^{n} \int_{M_i} \boldsymbol{\omega} \,\mathrm{d}S,$$

má-li pravá strana smysl.

Poznámka 18.2.39. (i) Pravá strana definičního vztahu pro $\int_M \boldsymbol{\omega} \,\mathrm{d}S$ více připomíná integrál z diferenciální formy, pokud definujeme takzvanou *formu objemu*

$$\boldsymbol{\omega}_V := \sqrt{\det \mathbb{G}}\, \mathbf{d}u_1 \wedge \dots \mathbf{d}u_k.$$

(ii) V případě skalárního součinu se signaturou $(N, 0)$ jsme zavedli nám již známý plošný integrál prvního druhu.

Věta 18.2.40 (O nezávislosti integrálu prvního druhu na parametrizaci a rozkladu)**.** *Je-li $M \subset \mathbb{R}^N$ regulární plocha dimenze k, pak $\int_M \boldsymbol{\omega} \,\mathrm{d}S$ nezávisí na parametrizaci. Je-li $M \subset \mathbb{R}^N$ zobecněná plocha dimenze k, pak $\int_M \boldsymbol{\omega} \,\mathrm{d}S$ nezávisí na rozkladu.*

Důkaz. Nejprve uvažujme první případ. Nechť $(\boldsymbol{\varphi}, I)$ a $(\boldsymbol{\psi}, J)$ jsou dvě regulární parametrizace. Označme $\vec{\alpha} := \vec{\varphi}^{-1} \circ \boldsymbol{\psi}$. Standardním způsobem založeným na Větě o implicitní funkci (Věta 12.4.13) umíme dokázat, že α je difeomorfizmus. Díky řetízkovému pravidlu nyní máme (matici příslušející $\boldsymbol{\varphi}$ značíme $\mathbb{G}$ a matici příslušející $\boldsymbol{\psi}$ značíme $\widetilde{\mathbb{G}}$)

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_{ij} &= \Big\langle \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial v_i}, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial v_j} \Big\rangle = \Big\langle \frac{\partial \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{\alpha}}{\partial v_i}, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{\alpha}}{\partial v_j} \Big\rangle = \sum_{l,m=1}^{k} \frac{\partial \alpha_l}{\partial v_i} \frac{\partial \alpha_m}{\partial v_j} \Big\langle \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u_l}, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u_m} \Big\rangle \\ &= \sum_{l,m=1}^{k} \frac{\partial \alpha_l}{\partial v_i} \frac{\partial \alpha_m}{\partial v_j} G_{lm}.\end{aligned}$$

Odtud vidíme, že $\widetilde{\mathbb{G}} = \mathrm{J}_{\vec{\alpha}}^{\top} \mathbb{G} \mathrm{J}_{\vec{\alpha}}$, a proto $\det \widetilde{\mathbb{G}} = (\det \mathrm{J}_{\vec{\alpha}})^2 \det \mathbb{G}$. Díky tomu Věta o substituci (Věta 15.12.1) dává

$$\begin{aligned}\int_I (\omega_0 \circ \boldsymbol{\varphi}) \sqrt{|\det \mathbb{G}|} \,\mathrm{d}\lambda_k &= \int_I (\omega_0 \circ \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{\alpha}) \sqrt{\det(\mathbb{G} \circ \vec{\alpha})} |\mathrm{J}_{\vec{\alpha}}| \,\mathrm{d}\lambda_k \\ &= \int_I (\omega_0 \circ \boldsymbol{\psi}) \sqrt{\det \widetilde{\mathbb{G}}} \,\mathrm{d}\lambda_k.\end{aligned}$$

Při důkazu druhého tvrzení stačí jen mírně zmodifikovat důkaz Věty o korektnosti definice integrálu přes orientovanou zobecněnou plochu (Věta 18.2.35). □

18.3 Zobecněná Stokesova věta

Nyní částečně zobecníme Stokesovu větu (Věta 17.3.19) z teorie plošného integrálu z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^N$. Bude se jednat skutečně jen o částečné zobecnění, neboť stále předpokládáme nekonečnou hladkost objektů, které integrujeme. Stejně tak uvažované integrační obory budou méně obecné než ty, se kterými jsme pracovali v klasické teorii plošného integrálu.

Začneme definicemi pojmů, které nám později nahradí pojem okraj plochy.

Definice 18.3.1 (Řetězec)**.** Nechť $A = \{i_1, \dots, i_m\} \subset \mathbb{N}$ je konečná indexová množina, $(\boldsymbol{\varphi}_i, I_i)$ je pro každé $i \in A$ parametrizace nějaké regulární plochy dimenze k a $n_i \in \mathbb{Z}$ pro všechna $i \in A$. Pak

$$\boldsymbol{c} = \sum_{i \in A} n_i \boldsymbol{\varphi}_i$$

nazýváme *řetězec* dimenze k.

Jestliže $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq N$, $\boldsymbol{c} = \sum_{i \in A} n_i \boldsymbol{\varphi}_i$ je řetězec dimenze k, $\bigcup_{i \in A} \boldsymbol{\varphi}_i(I_i) \subset \Omega$ a $\boldsymbol{\omega} \in E^k(\Omega)$, pak definujeme

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{\omega} := \sum_{i \in A} n_i \int_{\langle \boldsymbol{\varphi}_i \rangle} \boldsymbol{\omega}.$$

Příklad 18.3.2. Položme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}_1(t) &= (t, 0) && \text{pro } t \in (0,1) && \text{a} && n_1 := 1 \\
\boldsymbol{\varphi}_2(t) &= (1, t) && \text{pro } t \in (0,1) && \text{a} && n_2 := 1 \\
\boldsymbol{\varphi}_3(t) &= (t, 1) && \text{pro } t \in (0,1) && \text{a} && n_3 := -1 \\
\boldsymbol{\varphi}_4(t) &= (0, t) && \text{pro } t \in (0,1) && \text{a} && n_4 := -1.
\end{aligned}$$

Pak $\boldsymbol{c} := \boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_3 - \boldsymbol{\varphi}_4$ je řetězec. Při našem značení z teorie křivkového integrálu je navíc

$$\boldsymbol{\varphi}_1 \oplus \boldsymbol{\varphi}_2 \ominus \boldsymbol{\varphi}_3 \ominus \boldsymbol{\varphi}_4$$

křivkou, která obíhá hranici čtverce $[0,1]^2$ proti směru hodinových ručiček (k úplnému pokrytí hranice čtverce $[0,1]^2$ sjednocením obrazů dílčích křivek by bylo potřeba ještě přidat vrcholy čtverce).

Podobně jako v předchozím příkladu je kupříkladu u hranice krychle v $\mathbb{R}^3$ potřeba zparametrizovat jednotlivé stěny a ještě u jednotlivých parametrizací sladit orientaci. O to se nám postará následující definice, která navíc pracuje i se zakřivenými objekty, u nichž se využije toho, že jsou parametrizovány prostřednictvím intervalu v $\mathbb{R}^k$.

Definice 18.3.3 (Řetězec odpovídající hranici)**.** Nechť $k \geq 2$ a $I = (a_1^0, a_1^1) \times \cdots \times (a_k^0, a_k^1) \subset \mathbb{R}^k$ je omezený otevřený interval. Pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ a $l \in \{0, 1\}$ definujme interval

$$J_i := (a_1^0, a_1^1) \times \cdots \times (a_{i-1}^0, a_{i-1}^1) \times (a_{i+1}^0, a_{i+1}^1) \times \cdots \times (a_k^0, a_k^1) \subset \mathbb{R}^{k-1}$$

a zobrazení

$$\vec{I}_{(i,l)} \colon (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_k) \in J_i \mapsto (u_1, \dots, u_{i-1}, a_i^l, u_{i+1}, \dots, u_k).$$

Řetězec odpovídající hranici intervalu I definujeme jako

$$\partial\vec{I} := \sum_{i=1}^{k}(-1)^i(\vec{I}_{(i,0)} - \vec{I}_{(i,1)}) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=0}^{1}(-1)^{i+l}\vec{I}_{(i,l)}.$$

Je-li $M \subset \mathbb{R}^N$ regulární plocha dimenze k a $(\boldsymbol{\varphi}, I)$ je její parametrizace, která je hladká, prostá a regulární na nějaké otevřené množině obsahující $\overline{I}$, pak definujeme

$$\partial M := \langle \boldsymbol{\varphi} \circ \partial\vec{I} \rangle.$$

Je-li $M \subset \mathbb{R}^N$ zobecněná plocha dimenze k s rozkladem $\{M_1, \ldots, M_m, P\}$, kde všechny parametrizace dílčích ploch $M_1, \ldots, M_m$ jsou hladké, prosté a regulární na otevřených množinách obsahujících uzávěry intervalů parametrizujících jednotlivé plochy $M_1, \ldots, M_m$, pak definujeme

$$\partial M := \sum_{j=1}^{m} \partial M_j.$$

Poznámka 18.3.4. Povšimněme si, že u regulárních ploch bylo zapotřebí, aby jejich parametrizace rovněž parametrizovala i jejich „okraj“, což je stejná situace jako u klasické Stokesovy věty (Věta 17.3.19) . V teorii diferenciálních forem se v takové situaci hovoří o *regulárních plochách dimenze k s okrajem* a *zobecněných plochách dimenze k s okrajem.*

Poznámka 18.3.5. Ještě je třeba vysvětlit korektnost předchozí definice, neboli ukázat, že byl skutečně zadefinován řetězec. Potřebujeme, aby předpoklad, že $\boldsymbol{\varphi}$ je prosté, hladké a regulární zobrazení, implikoval prostotu, hladkost a regularitu všech zobrazení $\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(i,l)}$, kde $i \in \{1, \ldots, k\}$ a $l \in \{0, 1\}$. První dvě vlastnosti jsou zřejmé. Zbývá regularita. Jacobiho matice zobrazení φ má N řádků, k sloupců a hodnost k. Jacobiho matice zobrazení $\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(i,l)}$ vznikne z Jacobiho matice zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ odstraněním i-tého sloupce. Protože původní matice měla lineárně nezávislé sloupce, i nová matice má lineárně nezávislé sloupce, což implikuje regularitu.

Doposud jsme integrovali jen přes k-dimenzionální plochy, kde bylo $k \in \mathbb{N}$. Pro úplnost přidejme definici přes 0-dimenzionální objekty.

Definice 18.3.6 (Integrál přes řetězec odpovídající hranici plochy dimenze 1)**.** Nechť $N \in \mathbb{N}$, $\alpha < a_1^0 < a_1^1 < \beta$ a $M \subset \mathbb{R}^N$ je regulární plocha dimenze 1 parametrizovaná prostřednictvím $(\boldsymbol{\varphi}, (a_1^0, a_1^1))$, přičemž $\boldsymbol{\varphi}$ je hladké prosté regulární zobrazení na (α, β), a $\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \, \mathbf{d}x_0 \in E^0(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina obsahující $\boldsymbol{\varphi}([a_1^0, a_1^1])$. Pak definujeme

$$\int_{\partial M} \boldsymbol{\omega} := -(\omega_0(\boldsymbol{\varphi}(a_1^0)) - \omega_0(\boldsymbol{\varphi}(a_1^1))).$$

Analogicky pro zobecněné plochy dimenze 1 s okrajem.

Poznámka 18.3.7. Předchozí definici je přirozené chápat tak, že při integraci přes 0-plochy již nepožadujeme, aby plocha byla parametrizována prostřednictvím otevřeného intervalu a navíc roli Lebesgueovy míry λ_k zde přebírá aritmetická míra.

Následující věta je naším hlavním výsledkem.

Věta 18.3.8 (Zobecněná Stokesova věta)**.** *Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le N$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $M \subset \mathbb{R}^N$ je zobecněná plocha dimenze k s okrajem splňující $\overline{M} \subset \Omega$ a $\boldsymbol{\omega} \in E^{k-1}(\Omega)$. Pak*

$$\int_M \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \int_{\partial M} \boldsymbol{\omega},$$

existuje-li alespoň jeden z integrálů.

Důkaz. Nejprve se budeme zabývat případem $k \ge 2$. Důkaz rozdělíme do několika kroků.

Krok 1: důkaz v případě, že M je N-rozměrný nedegenerovaný interval. V tomto případě je $\boldsymbol{\omega} \in E^{N-1}(\Omega)$ a můžeme ji reprezentovat jako

$$\boldsymbol{\omega}(x) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+1} \omega_{1\dots(j-1)(j+1)\dots N}\, \mathbf{d}x_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x_{j-1} \wedge \mathbf{d}x_{j+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x_N.$$

Pak na jednu stranu máme

$$\begin{aligned}
\int_M \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} &= \int_M \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} (-1)^{j+1} \frac{\partial \omega_{1\dots(j-1)(j+1)\dots N}}{\partial x_l} \\
&\qquad \times \mathbf{d}x_l \wedge \mathbf{d}x_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x_{j-1} \wedge \mathbf{d}x_{j+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x_N \\
&= \int_M \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+1} \frac{\partial \omega_{1\dots(j-1)(j+1)\dots N}}{\partial x_j} \\
&\qquad \times \mathbf{d}x_j \wedge \mathbf{d}x_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x_{j-1} \wedge \mathbf{d}x_{j+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x_N \\
&= \int_M \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \omega_{1\dots(j-1)(j+1)\dots N}}{\partial x_j}\, \mathbf{d}x_{1\dots N}.
\end{aligned}$$

Na druhou stranu platí

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} \boldsymbol{\omega} &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{l=0}^{1} (-1)^{i+l} \int_{\boldsymbol{I}_{(i,l)}(J_i)} \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{l=0}^{1} (-1)^{i+l} \int_{J_i} \boldsymbol{I}^*_{(i,l)}(\boldsymbol{\omega}) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \sum_{l=0}^{1} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{i+l+j+1} \int_{J_i} (\omega_{1\dots(j-1)(j+1)\dots N} \circ \boldsymbol{I}_{(i,l)}) \\
&\qquad \times \mathbf{d}(I_{(i,l)})_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}(I_{(i,l)})_{j-1} \wedge \mathbf{d}(I_{(i,l)})_{j+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}(I_{(i,l)})_N.
\end{aligned}$$

Zde si povšimněme, že

$$\mathbf{d}(I_{(i,l)})_m = \begin{cases} \mathbf{d}x_m & \text{pro } m \in \{1, \dots, i-1\} \\ 0 & \text{pro } m = i \\ \mathbf{d}x_{m-1} & \text{pro } m \in \{i+1, \dots, N\}. \end{cases}$$

Díky tomu se ve výrazu

$$\mathbf{d}(I_{(i,l)})_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}(I_{(i,l)})_{j-1} \wedge \mathbf{d}(I_{(i,l)})_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}(I_{(i,l)})_N$$

vyskytuje nulový činitel, kdykoliv $j \neq i$, a naopak pro $j = i$ uvedený výraz přechází v $\mathbf{d}x_{1\dots(N-1)}$. Proto

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} \boldsymbol{\omega} &= \sum_{l=0}^{1} \sum_{i=1}^{N} (-1)^{2i+l+1} \int_{J_i} (\omega_{1\dots(i-1)(i+1)\dots N} \circ \boldsymbol{I}_{(i,l)})\, \mathbf{d}x_{1\dots(N-1)} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{J_i} \Big(\omega_{1\dots(i-1)(i+1)\dots N}(u_1, \dots, u_{i-1}, a_i^1, u_{i+1}, \dots, u_N) \\
&\qquad - \omega_{1\dots(i-1)(i+1)\dots N}(u_1, \dots, u_{i-1}, a_i^0, u_{i+1}, \dots, u_N) \Big) \\
&\qquad \mathbf{d}u_1 \dots \mathbf{d}u_{i-1}\, \mathbf{d}u_{i+1} \dots \mathbf{d}u_N \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{J_i} \Big(\int_{a_i^0}^{a_i^1} \frac{\partial \omega_{1\dots(i-1)(i+1)\dots N}}{\partial u_i}\, \mathbf{d}u_i \Big)\, \mathbf{d}u_1 \dots \mathbf{d}u_{i-1}\, \mathbf{d}u_{i+1} \dots \mathbf{d}u_N \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{M} \frac{\partial \omega_{1\dots(i-1)(i+1)\dots N}}{\partial u_i}\, \mathbf{d}u_{1\dots N}.
\end{aligned}$$

Tím je ověřena dokazovaná identita v uvažovaném speciálním případě.

Krok 2: důkaz v případě, že M je k-dimenzionální regulární plocha. Nechť $I \subset \mathbb{R}^k$ je otevřený interval a $\boldsymbol{\varphi}\colon I \to \mathbb{R}^N$ parametrizuje M. Díky definici ∂M, prvnímu kroku a skutečnosti, že vnější diferenciál komutuje s přenosem diferenciální formy, máme

$$\int_M \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \int_I \boldsymbol{\varphi}^*(\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}) = \int_I \mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\vec{\partial} I} \boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\partial M} \boldsymbol{\omega}.$$

Krok 3: důkaz v případě, že M je zobecněná plocha dimenze k. Nechť $\{M_1, \dots, M_m, P\}$ je rozklad M. Pak díky předchozímu kroku dostáváme

$$\int_M \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{m} \int_{M_i} \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{m} \int_{\partial M_i} \boldsymbol{\omega} = \int_{\partial M} \boldsymbol{\omega}.$$

Zbývá uvažovat případ $k = 1$. V případě, že M je regulární plocha a $\boldsymbol{\omega}(x) =$

$\omega_0(x)\,\mathbf{d}x_0$, je levá strana dokazované rovnosti rovna

$$\begin{aligned}\int_M \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} &= \int_M \sum_{i=1}^N \frac{\partial\omega_0}{\partial x_i}\,\mathbf{d}x_i = \int_{(a,b)} \boldsymbol{\varphi}^*\Big(\sum_{i=1}^N \frac{\partial\omega_0}{\partial x_i}\,\mathbf{d}x_i\Big)\\ &= \int_{(a,b)} \sum_{i=1}^N \frac{\partial\omega_0}{\partial x_i}\circ\boldsymbol{\varphi}\,\mathbf{d}\varphi_i = \int_{(a,b)} \sum_{i=1}^N \frac{\partial\omega_0}{\partial x_i}\circ\boldsymbol{\varphi}\,\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{d}t\\ &= \int_{(a,b)} \frac{\mathrm{d}(\omega_0\circ\boldsymbol{\varphi})}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{d}t = \omega_0(\boldsymbol{\varphi}(b)) - \omega_0(\boldsymbol{\varphi}(a)),\end{aligned}$$

což se rovná straně pravé, která je tentokrát dána přímo definicí.

V případě zobecněné plochy výsledek opět získáme vysčítáním. □

Zobecněná Stokesova věta (Věta 18.3.8) má poměrně silné předpoklady, jejichž splnění musíme často přizpůsobit postup při výpočtu.

Příklad 18.3.9. Ověřme platnost Zobecněné Stokesovy věty pro diferenciální formu

$$\boldsymbol{\omega}(x,y,z) = x\,\mathbf{d}y$$

a množinu

$$M = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2=z^2, z\in(1,2)\}.$$

Zadanou množinu je přirozené parametrizovat pomocí zobrazení

$$\boldsymbol{\varphi}\colon (h,\psi)\in(1,2)\times(-\pi,\pi)\mapsto(h\cos\psi, h\sin\psi, h)\in\mathbb{R}^3.$$

Zobecněnou Stokesovu větu (Věta 18.3.8) zde však nemůžeme použít přímo, neboť ta by potřebovala, aby zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ bylo možné rozšířit na jistou otevřenou množinu obsahující $[1,2]\times[-\pi,\pi]$ a aby získané zobrazení bylo hladké, prosté a regulární. Máme zde však problém s prostotou (kupříkladu platí $\boldsymbol{\varphi}(h,-\pi)=\boldsymbol{\varphi}(h,\pi)$). Popišme proto M jako zobecněnou plochu dimenze 2 s rozkladem $\{M_1, M_2, P\}$, kde

$$M_1 = \varphi((1,2)\times(-\pi,0)), \qquad M_2 = \varphi((1,2)\times(0,\pi)) \qquad \text{a} \qquad P = M\setminus(M_1\cup M_2).$$

Protože

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y,$$

podle třetí části Věty o základních vlastnostech přenosu diferenciální formy (Věta 18.2.12) máme

$$\begin{aligned}\int_M \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} &= \int_{M_1}\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} + \int_{M_2}\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}\\ &= \int_{(-\pi,0)\times(1,2)} (\cos\psi\,\mathbf{d}h - h\sin\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{\psi})\wedge(\sin\psi\,\mathbf{d}h + h\cos\psi\,\mathbf{d}\psi)\\ &\qquad + \int_{(0,\pi)\times(1,2)} (\cos\psi\,\mathbf{d}h - h\sin\psi\,\mathbf{d}\psi)\wedge(\sin\psi\,\mathbf{d}h + h\cos\psi\,\mathbf{d}\psi)\\ &= \int_{(-\pi,0)\times(1,2)} h\,\mathbf{d}h\wedge\mathbf{d}\psi + \int_{(0,\pi)\times(1,2)} h\,\mathbf{d}h\wedge\mathbf{d}\psi\\ &= \int_{(-\pi,\pi)\times(1,2)} h\,\mathrm{d}\lambda_2(h,\psi) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_1^2 h\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}\psi = 3\pi.\end{aligned}$$

Spočíteme nyní $\int_{\partial M}\boldsymbol{\omega} = \int_{\partial M_1}\boldsymbol{\omega} + \int_{\partial M_2}\boldsymbol{\omega}$. Nejprve potřebujeme interpretovat řetězec ∂M_1. Protože zde máme $I = (1,2)\times(-\pi,0)$, podle definice řetězce odpovídajícího hranici si označme

$$\begin{aligned}
\vec{I}_{(1,0)}&\colon \psi\in(-\pi,0)\mapsto(1,\psi)\in\mathbb{R}^2\\
\vec{I}_{(1,1)}&\colon \psi\in(-\pi,0)\mapsto(2,\psi)\in\mathbb{R}^2\\
\vec{I}_{(2,0)}&\colon h\in(1,2)\mapsto(h,-\pi)\in\mathbb{R}^2\\
\vec{I}_{(2,1)}&\colon h\in(1,2)\mapsto(h,0)\in\mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

a pak máme $\partial\vec{I} = -\vec{I}_{(1,0)} + \vec{I}_{(1,1)} + \vec{I}_{(2,0)} - \vec{I}_{(2,1)}$. Dopočítejme si ještě formule určující $\partial M_1 = \langle\boldsymbol{\varphi}\circ\partial\vec{I}\rangle$. Máme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}\circ\vec{I}_{(1,0)}&\colon \psi\in(-\pi,0)\mapsto(\cos\psi,\sin\psi,1)\\
\boldsymbol{\varphi}\circ\vec{I}_{(1,1)}&\colon \psi\in(-\pi,0)\mapsto(2\cos\psi,2\sin\psi,2)\\
\boldsymbol{\varphi}\circ\vec{I}_{(2,0)}&\colon h\in(1,2)\mapsto(-h,0,h)\\
\boldsymbol{\varphi}\circ\vec{I}_{(2,1)}&\colon h\in(1,2)\mapsto(h,0,h).
\end{aligned}$$

Protože $\partial M_1 = \langle-\boldsymbol{\varphi}\circ\vec{I}_{(1,0)} + \boldsymbol{\varphi}\circ\vec{I}_{(1,1)} + \boldsymbol{\varphi}\circ\vec{I}_{(2,0)} - \boldsymbol{\varphi}\circ\vec{I}_{(2,1)}\rangle$, dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M_1}\boldsymbol{\omega} &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}(-1)^{i+l}\int_{\langle\boldsymbol{\varphi}\circ\vec{I}_{(i,l)}\rangle} x\,\mathbf{d}y\\
&= -\int_{(-\pi,0)}\cos\psi(\cos\psi\,\mathbf{d}\psi) + \int_{(-\pi,0)}2\cos\psi(2\cos\psi\,\mathbf{d}\psi)\\
&\qquad + \int_{(1,2)}-h(0\,\mathbf{d}h) - \int_{(1,2)}h(0\,\mathbf{d}h)\\
&= \int_{-\pi}^{0}3\cos^2\pi\,\mathrm{d}\psi = \frac{3}{2}\pi.
\end{aligned}$$

Analogicky dostaneme, že $\partial M_2 = \langle\boldsymbol{\varphi}\circ\partial\vec{I}\rangle$, kde $I = (1,2)\times(0,\pi)$, a

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}\circ\vec{I}_{(1,0)}&\colon \psi\in(0,\pi)\mapsto(\cos\psi,\sin\psi,1)\\
\boldsymbol{\varphi}\circ\vec{I}_{(1,1)}&\colon \psi\in(0,\pi)\mapsto(2\cos\psi,2\sin\psi,2)\\
\boldsymbol{\varphi}\circ\vec{I}_{(2,0)}&\colon h\in(1,2)\mapsto(h,0,h)\\
\boldsymbol{\varphi}\circ\vec{I}_{(2,1)}&\colon h\in(1,2)\mapsto(-h,0,h).
\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M_2}\boldsymbol{\omega} &= -\int_{(0,\pi)}\cos\psi(\cos\psi\,\mathbf{d}\psi) + \int_{(0,\pi)}2\cos\psi(2\cos\psi\,\mathbf{d}\psi)\\
&\qquad + \int_{(1,2)}h(0\,\mathbf{d}h) - \int_{(1,2)}-h(0\,\mathbf{d}h)\\
&= \int_{0}^{\pi}3\cos^2\pi\,\mathrm{d}\psi = \frac{3}{2}\pi.
\end{aligned}$$

Celkově jsme dostali

$$\int_{\partial M} \boldsymbol{\omega} = \int_{\partial M_1} \boldsymbol{\omega} + \int_{\partial M_2} \boldsymbol{\omega} = 3\pi = \int_{M_1} \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} + \int_{M_2} \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \int_{M} \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}.$$

V dalším si na příkladech ukážeme, že Zobecněná Stokesova věta (Věta 18.3.8) v sobě zahrnuje nejen Stokesovu větu v $\mathbb{R}^3$ (Věta 17.3.19), ale také třeba Greenovu větu v $\mathbb{R}^2$ (Věta 17.3.18) a Gauss–Ostrogradského větu (Věta 17.3.3). Musíme však čtenáře varovat, že naše teorie integrace diferenciálních forem pracuje jen s velmi hezkými zobrazeními a velmi hezkými množinami (veškeré plochy zde parametrizujeme z otevřeného intervalu, zatímco v teorii plošného integrálu jsme parametrizovali z libovolné otevřené množiny). Proto nelze následující příklady chápat tak, že Zobecněná Stokesova věta (Věta 18.3.8) dokáže plně nahradit naše výsledky z klasické teorie křivkového a plošného integrálu.

Z důvodu snazší interpretace integrálu přes řetězec ∂M budeme většinou počítat s konkrétně zvolenými plochami.

Příklad 18.3.10 (Věta o výpočtu křivkového integrálu pomocí potenciálu v $\mathbb{R}^N$ (Věta 17.1.16))**.** Položme $k = 1$ a uvažujme 0-formu $\boldsymbol{\omega}(x) = U(x)\,\mathbf{d}x_0$. Pak máme

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial U}{\partial x_1}\,\mathbf{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_N}\,\mathbf{d}x_N.$$

Nechť množina $M \subset \mathbb{R}^N$ je regulární plocha dimenze 1 parametrizovaná zobrazením $\boldsymbol{\varphi}$ z intervalu (a,b). Pokusme se nyní interpretovat vzorec ze Zobecněné Stokesovy věty (Věta 18.3.8)

$$\int_M \frac{\partial U}{\partial x_1}\,\mathbf{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_N}\,\mathbf{d}x_N = \int_{\partial M} U(x)\,\mathbf{d}x_0.$$

Na levé straně použijeme definici integrálu z diferenciální formy a máme

$$\begin{aligned}\int_M \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial x_i}\,\mathbf{d}x_i &= \int_{(a,b)} \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial x_i} \circ \boldsymbol{\varphi}\,\mathbf{d}\varphi_i = \int_{(a,b)} \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial x_i}(\boldsymbol{\varphi}(t))\varphi_i'(t)\,\mathbf{d}t \\ &= \int_{(a,b)} \nabla U(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\boldsymbol{\varphi}} \nabla U \cdot\, \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}.\end{aligned}$$

Pravá strana se dá upravit do tvaru

$$\int_{\partial M} U(x)\,\mathbf{d}x_0 = U(\boldsymbol{\varphi}(b)) - U(\boldsymbol{\varphi}(a)).$$

Celkově jsme dostali vzorec

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} \nabla U \cdot\, \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = U(\boldsymbol{\varphi}(b)) - U(\boldsymbol{\varphi}(a))$$

z Věty o výpočtu křivkového integrálu pomocí potenciálu (Věta 17.1.16).

Příklad 18.3.11 (Greenova věta (Věta 17.3.18))**.** V Zobecněné Stokesově větě (Věta 18.3.8) uvažujme množinu $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{1}{4} < x_1^2 + x_2^2 < 1, x_2 < 0\}$ (tedy $N = 2$ a $k = 2$) a diferenciální formu $\boldsymbol{\omega} \in E^1(\mathbb{R}^3)$ reprezentovanou jako

$$\boldsymbol{\omega}(x) = T_1(x)\,\mathbf{d}x_1 + T_2(x)\,\mathbf{d}x_2.$$

Pak máme

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\,\mathbf{d}x_{21} + \frac{\partial T_2}{\partial x_1}\,\mathbf{d}x_{12} = \Big(\frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\Big)\,\mathbf{d}x_{12}$$

a Zobecněná Stokesova věta (Věta 18.3.8) dává

$$\int_M \Big(\frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\Big)\,\mathbf{d}x_{12} = \int_{\partial M} T_1(x)\,\mathbf{d}x_1 + T_2(x)\,\mathbf{d}x_2.$$

Pokusme se interpretovat výsledek v řeči klasické teorie křivkového a plošného integrálu. Integrál nalevo je podle definice integrálu z diferenciální formy, podle Věty o základních vlastnostech přenosu diferenciální formy (Věta 18.2.12) a podle Věty o substituci (Věta 15.12.1) roven

$$\begin{aligned}\int_I \Big(\frac{\partial T_2}{\partial x_1}\circ\boldsymbol{\varphi} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\circ\boldsymbol{\varphi}\Big)\,\mathbf{d}\varphi_1\wedge\mathbf{d}\varphi_2 &= \int_I \Big(\frac{\partial T_2}{\partial x_1}\circ\boldsymbol{\varphi} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\circ\boldsymbol{\varphi}\Big)\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathbf{d}u_{12}\\ &= \theta\int_M \Big(\frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\Big)\,\mathrm{d}\lambda_2,\end{aligned}$$

kde $\theta \in \{-1, 1\}$ je znaménko, které má $\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}$ na I (toto znaménko je na celém I stejné díky regularitě parametrizace). Naši množinu (spodní polovina mezikruží) je přirozené parametrizovat prostřednictvím zobrazení (snadno se nahlédne, že je jako parametrizace přípustné)

$$\boldsymbol{\varphi}\colon (r,t) \in (\tfrac{1}{2}, 1)\times(\pi, 2\pi) \mapsto (r\cos t, r\sin t) \in \mathbb{R}^2.$$

Vzhledem k této parametrizaci budeme interpretovat výsledek ze Zobecněné Stokesovy věty (Věta 18.3.8). Předně $\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}} = r$, a proto $\theta = 1$.

Zabývejme se nyní druhým integrálem. Nejprve potřebujeme interpretovat ∂M. Protože $I = (\frac{1}{2}, 1)\times(\pi, 2\pi)$, podle definice řetězce odpovídajícího hranici si označme

$$\begin{aligned}\vec{I}_{(1,0)}&\colon t \in (\pi, 2\pi) \mapsto (\tfrac{1}{2}, t) \in \mathbb{R}^2\\ \vec{I}_{(1,1)}&\colon t \in (\pi, 2\pi) \mapsto (1, t) \in \mathbb{R}^2\\ \vec{I}_{(2,0)}&\colon r \in (\tfrac{1}{2}, 1) \mapsto (r, \pi) \in \mathbb{R}^2\\ \vec{I}_{(2,1)}&\colon r \in (\tfrac{1}{2}, 1) \mapsto (r, 2\pi) \in \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

a pak $\vec{\partial} I = -\vec{I}_{(1,0)} + \vec{I}_{(1,1)} + \vec{I}_{(2,0)} - \vec{I}_{(2,1)}$. Dopočítejme si ještě formule pro $\partial M = \langle\boldsymbol{\varphi}\circ\vec{\partial} I\rangle$. Máme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}\circ\vec{I}_{(1,0)}&\colon t \in (\pi, 2\pi) \mapsto (\tfrac{1}{2}\cos t, \tfrac{1}{2}\sin t)\\ \boldsymbol{\varphi}\circ\vec{I}_{(1,1)}&\colon t \in (\pi, 2\pi) \mapsto (\cos t, \sin t)\\ \boldsymbol{\varphi}\circ\vec{I}_{(2,0)}&\colon r \in (\tfrac{1}{2}, 1) \mapsto (-r, 0)\\ \boldsymbol{\varphi}\circ\vec{I}_{(2,1)}&\colon r \in (\tfrac{1}{2}, 1) \mapsto (r, 0).\end{aligned}$$

Proto je $\partial M = -\langle \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,0)} + \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,1)} + \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(2,0)} - \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(2,1)} \rangle$. Navíc si povšimněme, že $\ominus \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,0)} \oplus \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,1)} \oplus \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(2,0)} \ominus \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(2,1)}$ je křivka, která až na čtyři body obíhá hranici našeho obrazce proti směru hodinových ručiček. Rozšíříme-li zmíněnou křivku o chybějící body a vzniklou parametrizaci nazveme $\boldsymbol{\psi}$ (na intervalu (a, b)), vychází nám

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} \boldsymbol{\omega} &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{l=0}^{1} (-1)^{i+l} \int_{\langle \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(i,l)} \rangle} T_1(x)\, \mathbf{d}x_1 + T_2(x)\, \mathbf{d}x_2 \\
&= \sum_{i=1}^{2} \sum_{l=0}^{1} (-1)^{i+l} \int_{J_i} T_1(\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(i,l)}(u))\, \mathbf{d}(\varphi \circ \vec{I}_{(i,l)})_1 \\
&\qquad\qquad + T_2(\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(i,l)}(u))\, \mathbf{d}(\varphi \circ \vec{I}_{(i,l)})_2 \\
&= \sum_{i=1}^{2} \sum_{l=0}^{1} (-1)^{i+l} \int_{J_i} T_1(\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(i,l)}(u))((\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(i,l)})_1(u))'\, \mathbf{d}u \\
&\qquad\qquad + T_2(\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(i,l)}(u))((\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(i,l)})_2(u))'\, \mathbf{d}u \\
&= \int_{(a,b)} ((T_1 \circ \boldsymbol{\psi})(u) \psi_1'(u) + (T_2 \circ \boldsymbol{\psi})(u) \psi_2'(u))\, \mathbf{d}u \\
&= \int_{(a,b)} (T_1 \circ \boldsymbol{\psi}, T_2 \circ \boldsymbol{\psi}) \cdot (\psi_1', \psi_2')\, \mathbf{d}u = \int_{\boldsymbol{\psi}} (T_1, T_2) \cdot \,\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}.
\end{aligned}$$

Celkově jsme dostali

$$\int_M \Big(\frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \Big)\, \mathrm{d}\lambda_2 = \int_{\boldsymbol{\psi}} (T_1, T_2) \cdot \,\mathrm{d}\boldsymbol{\psi},$$

což je výsledná formule z Greenovy věty (Věta 17.3.18).

Příklad 18.3.12 (Stokesova věta v $\mathbb{R}^3$ (Věta 17.3.19))**.** V Zobecněné Stokesově větě (Věta 18.3.8) uvažujme množinu $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon (x_1, x_2) \in (-1, 1)^2, x_3 = x_1^2\}$ (tedy $N = 3$ a $k = 2$) a diferenciální formu $\boldsymbol{\omega} \in E^1(\mathbb{R}^3)$ reprezentovanou jako

$$\boldsymbol{\omega}(x) = T_1(x)\, \mathbf{d}x_1 + T_2(x)\, \mathbf{d}x_2 + T_3(x)\, \mathbf{d}x_3.$$

Pak máme

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \Big(\frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \Big) \mathbf{d}x_{12} + \Big(\frac{\partial T_3}{\partial x_2} - \frac{\partial T_2}{\partial x_3} \Big) \mathbf{d}x_{23} + \Big(\frac{\partial T_1}{\partial x_3} - \frac{\partial T_3}{\partial x_1} \Big) \mathbf{d}x_{31},$$

a proto Zobecněná Stokesova věta (Věta 18.3.8) dává

$$\begin{aligned}
\int_M \Big(\frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \Big) \mathbf{d}x_{12} + \Big(\frac{\partial T_3}{\partial x_2} - \frac{\partial T_2}{\partial x_3} \Big) \mathbf{d}x_{23} + \Big(\frac{\partial T_1}{\partial x_3} - \frac{\partial T_3}{\partial x_1} \Big) \mathbf{d}x_{31} \\
= \int_{\partial M} T_1(x)\, \mathbf{d}x_1 + T_2(x)\, \mathbf{d}x_2 + T_3(x)\, \mathbf{d}x_3.
\end{aligned}$$

Přirozenou parametrizací, vůči které budeme výsledek Zobecněné Stokesovy věty (Věta 18.3.8) interpretovat (nezávislost na parametrizaci platí opět až na znaménko), je zde

$$\boldsymbol{\varphi}\colon (u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2 \mapsto (u_1,u_2,u_1^2)\in\mathbb{R}^3.$$

Interpretujme nejprve levou stranu. Využijeme

$$\mathbf{d}\varphi_1 = \mathbf{d}u_1, \qquad \mathbf{d}\varphi_2 = \mathbf{d}u_2 \qquad \text{a} \qquad \mathbf{d}\varphi_3 = 2u_1\,\mathbf{d}u_1.$$

Následně máme

$$\mathbf{d}\varphi_1\wedge\mathbf{d}\varphi_2 = \mathbf{d}u_{12}, \qquad \mathbf{d}\varphi_2\wedge\mathbf{d}\varphi_3 = -2u_1\mathbf{d}u_{12} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{d}\varphi_3\wedge\mathbf{d}\varphi_1 = \mathbf{0}.$$

Levá strana se proto rovná

$$\begin{aligned}\int_M (\operatorname{rot} T)_3\,\mathbf{d}x_{12} + (\operatorname{rot} T)_1\,\mathbf{d}x_{23} + (\operatorname{rot} T)_2\,\mathbf{d}x_{31}&\\ = \int_{(-1,1)^2}\Big((\operatorname{rot} T)_3\circ\varphi - 2u_1(\operatorname{rot} T)_1\circ\varphi\Big)\,\mathbf{d}u_{12}&\\ = \int_{(-1,1)^2}(\operatorname{rot}\boldsymbol{T})\circ\boldsymbol{\varphi}\cdot(-2u_1,0,1)\,\mathrm{d}\lambda_2(u_1,u_2).&\end{aligned}$$

To přesně odpovídá levé straně klasické Stokesovy věty (Věta 17.3.19) s orientací danou naší parametrizací, neboť

$$\int_M \operatorname{rot}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}S = \int_{(-1,1)^2}(\operatorname{rot}\boldsymbol{T})\circ\boldsymbol{\varphi}\cdot(-2u_1,0,1)\,\mathrm{d}\lambda_2(u_1,u_2),$$

kde jsme položili

$$\boldsymbol{\nu}(x) := \frac{\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\varphi}^{-1}(x))}{\|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\varphi}^{-1}(x))\|},$$

přičemž

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\varphi}} &= \det\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2} & \mathbf{e}_1\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_2} & \mathbf{e}_2\\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial u_2} & \mathbf{e}_3\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 0 & \mathbf{e}_1\\ 0 & 1 & \mathbf{e}_2\\ 2u_1 & 0 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}\\ &= \mathbf{e}_3 - 2u_1\mathbf{e}_1 = (-2u_1,0,1).\end{aligned}$$

Interpretujme nyní pravou stranu. Nejprve potřebujeme interpretovat ∂M. Protože $I=(-1,1)^2$, podle definice řetězce odpovídajícího hranici si označme

$$\begin{aligned}\vec{I}_{(1,0)}&\colon u_2\in(-1,1)\mapsto(-1,u_2)\in\mathbb{R}^2\\ \vec{I}_{(1,1)}&\colon u_2\in(-1,1)\mapsto(1,u_2)\in\mathbb{R}^2\\ \vec{I}_{(2,0)}&\colon u_1\in(-1,1)\mapsto(u_1,-1)\in\mathbb{R}^2\\ \vec{I}_{(2,1)}&\colon u_1\in(-1,1)\mapsto(u_1,1)\in\mathbb{R}^2\end{aligned}$$

a pak $\partial\vec{I} = -\vec{I}_{(1,0)} + \vec{I}_{(1,1)} + \vec{I}_{(2,0)} - \vec{I}_{(2,1)}$. Dopočítejme si ještě formule určující $\partial M = \langle \boldsymbol{\varphi} \circ \partial\vec{I} \rangle$. Máme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,0)} &: t \in (-1,1) \mapsto (-1,t,1)\\
\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,1)} &: t \in (-1,1) \mapsto (1,t,1)\\
\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(2,0)} &: t \in (-1,1) \mapsto (t,-1,t^2)\\
\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(2,1)} &: t \in (-1,1) \mapsto (t,1,t^2).
\end{aligned}$$

Proto je $\partial M = \langle -\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,0)} + \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,1)} + \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(2,0)} - \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(2,1)} \rangle$. Navíc si povšimněme, že $\ominus\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,0)} \oplus \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,1)} \oplus \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(2,0)} \ominus \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(2,1)}$ je křivka, která až na čtyři body obíhá okraj našeho obrazce. Směr obíhání jsme v teorii křivkového a plošného integrálu určovali ze směru obíhání křivky odpovídající řetězci $\partial\vec{I}$. Tam se jedná o obíhání proti směru hodinových ručiček, čemuž jsme říkali obíhání v kladném smyslu. Nyní se $\int_{\partial M} \boldsymbol{\omega}$ rozloží do čtyř integrálů podle členů tvořících ∂M. Navíc integrand vždy tvoří tři členy. Ukažme si podrobně, jak se integruje člen $T_1 \mathbf{d}x_1$ vůči $\langle \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,0)} \rangle$. Máme

$$\begin{aligned}
-\int_{(-1,1)} T_1 \circ \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,0)} \frac{\mathrm{d}(\varphi_1 \circ I_{(1,0)})}{\mathrm{d}t}\, \mathbf{d}t &= -\int_{(-1,1)} T_1 \circ \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,0)} \Big(0\, \mathbf{d}t\Big)\\
&= -\int_{(-1,1)} T_1(-1,t,1) \cdot 0 \,\mathrm{d}\lambda_1(t) = 0.
\end{aligned}$$

Analogický postup použijeme na ostatní členy integrandu a ostatní integrály a celkově dostaneme

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} \boldsymbol{\omega} = &-\int_{(-1,1)} T_2(-1,t,1)\,\mathrm{d}\lambda_1(t) + \int_{(-1,1)} T_2(1,t,1)\,\mathrm{d}\lambda_1(t)\\
&+ \int_{(-1,1)} (T_1(t,-1,t^2) + 2tT_3(t,-1,t^2))\,\mathrm{d}\lambda_1(t)\\
&- \int_{(-1,1)} (T_1(t,1,t^2) + 2tT_3(t,1,t^2))\,\mathrm{d}\lambda_1(t),
\end{aligned}$$

což se dá chápat jako $\int_{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}$, kde $\boldsymbol{\eta}$ je křivka obíhající okraj M a její geometrický obraz je námi uvažovaná hranice ∂M. Vyšla nám tedy pravá strana výsledné formule z klasické Stokesovy věty (Věta 17.2.12).

Příklad 18.3.13 (Věta o divergenci v $\mathbb{R}^3$ (Věta 17.3.6))**.** V Zobecněné Stokesově větě (Věta 18.3.8) uvažujme množinu $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 < x_1^2 + x_2^2 < 4, x_2 > 0, x_3 \in (0,1)\}$ (tedy $N = 3$ a $k = 3$) a diferenciální formu $\boldsymbol{\omega} \in E^2(\mathbb{R}^3)$ reprezentovanou jako

$$\boldsymbol{\omega}(x) = T_1(x)\,\mathbf{d}x_{23} + T_2(x)\,\mathbf{d}x_{31} + T_3(x)\,\mathbf{d}x_{12}.$$

Pak máme

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \Big(\frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + \frac{\partial T_3}{\partial x_3}\Big)\,\mathbf{d}x_{123},$$

a proto Zobecněná Stokesova věta (Věta 18.3.8) dává

$$\int_M \Big(\frac{\partial T_1}{\partial x_1}+\frac{\partial T_2}{\partial x_2}+\frac{\partial T_3}{\partial x_3}\Big)\,\mathbf{d}x_{123}=\int_{\partial M} T_1(x)\,\mathbf{d}x_{23}+T_2(x)\,\mathbf{d}x_{31}+T_3(x)\,\mathbf{d}x_{12}.$$

Přirozenou parametrizací, vůči které budeme výsledek Zobecněné Stokesovy věty (Věta 18.3.8) interpretovat (nezávislost na parametrizaci platí opět až na znaménko), je zde

$$\boldsymbol{\varphi}\colon (u_1,u_2,u_3)\mapsto (u_1\cos u_2, u_1\sin u_2, u_3)\quad \text{pro } (u_1,u_2,u_3)\in(1,2)\times(0,\pi)\times(0,1).$$

Interpretujme nejprve levou stranu. Využijeme

$$\mathbf{d}\varphi_1=\cos u_2\,\mathbf{d}u_1-u_1\sin u_2\,\mathbf{d}u_2,\quad \mathbf{d}\varphi_2=\sin u_2\,\mathbf{d}u_1+u_1\cos u_2\,\mathbf{d}u_2\quad \text{a}\quad \mathbf{d}\varphi_3=\mathbf{d}u_3.$$

Následně máme

$$\begin{aligned}\mathbf{d}\varphi_1\wedge\mathbf{d}\varphi_2=u_1\mathbf{d}u_{12},\qquad &\mathbf{d}\varphi_2\wedge\mathbf{d}\varphi_3=\sin u_2\mathbf{d}u_{13}+u_1\cos u_2\mathbf{d}u_{23},\\ &\mathbf{d}\varphi_3\wedge\mathbf{d}\varphi_1=-\cos u_2\mathbf{d}u_{13}+u_1\sin u_2\mathbf{d}u_{23}\end{aligned}$$

a

$$\mathbf{d}\varphi_1\wedge\mathbf{d}\varphi_2\wedge\mathbf{d}\varphi_3=u_1\mathbf{d}u_{12}\wedge\mathbf{d}u_3=u_1\mathbf{d}u_{123}.$$

Levá strana se proto rovná (na konci výpočtu přejdeme od válcových souřadnic ke kartézským pomocí věty o substituci)

$$\begin{aligned}\int_M \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}&=\int_{(1,2)\times(0,\pi)\times(0,1)}\Big(\frac{\partial T_1}{\partial x_1}\circ\varphi+\frac{\partial T_2}{\partial x_2}\circ\varphi+\frac{\partial T_3}{\partial x_3}\circ\varphi\Big)u_1\,\mathbf{d}u_{123}\\ &=\int_M \operatorname{div}(T_1,T_2,T_3)\,\mathrm{d}\lambda_3(x_1,x_2,x_3).\end{aligned}$$

To přesně odpovídá levé straně Věty o divergenci (Věta 17.3.6).

Interpretujme nyní pravou stranu. Nejprve potřebujeme interpretovat ∂M. Protože $I=(1,2)\times(0,\pi)\times(0,1)$, podle definice řetězce odpovídajícího hranici si označme

$$\begin{aligned}\vec{I}_{(1,0)}&\colon (u_2,u_3)\in(0,\pi)\times(0,1)\mapsto(1,u_2,u_3)\\ \vec{I}_{(1,1)}&\colon (u_2,u_3)\in(0,\pi)\times(0,1)\mapsto(2,u_2,u_3)\\ \vec{I}_{(2,0)}&\colon (u_1,u_3)\in(1,2)\times(0,1)\mapsto(u_1,0,u_3)\\ \vec{I}_{(2,1)}&\colon (u_1,u_3)\in(1,2)\times(0,1)\mapsto(u_1,\pi,u_3)\\ \vec{I}_{(3,0)}&\colon (u_1,u_2)\in(1,2)\times(0,\pi)\mapsto(u_1,u_2,0)\\ \vec{I}_{(3,1)}&\colon (u_1,u_2)\in(1,2)\times(0,\pi)\mapsto(u_1,u_2,1)\end{aligned}$$

a pak $\partial\vec{I}=-\vec{I}_{(1,0)}+\vec{I}_{(1,1)}+\vec{I}_{(2,0)}-\vec{I}_{(2,1)}-\vec{I}_{(3,0)}+\vec{I}_{(3,1)}$. Dopočítejme si ještě formule určující $\partial M = \langle \boldsymbol{\varphi} \circ \partial \vec{I} \rangle$. Máme

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,0)} &\colon (u_2, u_3) \in (0,\pi) \times (0,1) \mapsto (\cos u_2, \sin u_2, u_3) \\
\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,1)} &\colon (u_2, u_3) \in (0,\pi) \times (0,1) \mapsto (2\cos u_2, 2\sin u_2, u_3) \\
\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(2,0)} &\colon (u_1, u_3) \in (1,2) \times (0,1) \mapsto (u_1, 0, u_3) \\
\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(2,1)} &\colon (u_1, u_3) \in (1,2) \times (0,1) \mapsto (-u_1, 0, u_3) \\
\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(3,0)} &\colon (u_1, u_2) \in (1,2) \times (0,\pi) \mapsto (u_1 \cos u_2, u_1 \sin u_2, 0) \\
\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(3,1)} &\colon (u_1, u_2) \in (1,2) \times (0,\pi) \mapsto (u_1 \cos u_2, u_1 \sin u_2, 1).
\end{aligned}
$$

Proto je $\partial M = \langle -\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,0)} + \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,1)} + \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(2,0)} - \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(2,1)} - \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(3,0)} + \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(3,1)} \rangle$. Podrobně se nyní zabývejme integrálem

$$
\begin{aligned}
&- \int_{\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,0)}((0,\pi)\times(0,1))} \boldsymbol{\omega} \\
&= - \int_{\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,0)}((0,\pi)\times(0,1))} T_1(x)\, \mathbf{d}x_{23} + T_2(x)\, \mathbf{d}x_{31} + T_3(x)\, \mathbf{d}x_{12}.
\end{aligned}
$$

Z výše uvedeného předpisu pro $\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,0)}$ plyne

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{d}(\varphi \circ \vec{I}_{(1,0)})_2 \wedge \mathbf{d}(\varphi \circ \vec{I}_{(1,0)})_3 \\
&\qquad = (\cos u_2\, \mathbf{d}u_2 + 0\, \mathbf{d}u_3) \wedge (0\, \mathbf{d}u_2 + \mathbf{d}u_3) = \cos u_2\, \mathbf{d}u_{23} \\
&\mathbf{d}(\varphi \circ \vec{I}_{(1,0)})_3 \wedge \mathbf{d}(\varphi \circ \vec{I}_{(1,0)})_1 \\
&\qquad = (0\, \mathbf{d}u_2 + \mathbf{d}u_3) \wedge ((-\sin u_2)\, \mathbf{d}u_2 + 0\, \mathbf{d}u_3) = \sin u_2\, \mathbf{d}u_{23} \\
&\mathbf{d}(\varphi \circ \vec{I}_{(1,0)})_1 \wedge \mathbf{d}(\varphi \circ \vec{I}_{(1,0)})_2 \\
&\qquad = ((-\sin u_2)\, \mathbf{d}u_2 + 0\, \mathbf{d}u_3) \wedge (\cos u_2\, \mathbf{d}u_2 + 0\, \mathbf{d}u_3) = \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Odtud dostáváme

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,0)})^* (T_1(x)\, \mathbf{d}x_{23} + T_2(x)\, \mathbf{d}x_{31} + T_3(x)\, \mathbf{d}x_{12}) \\
&\quad = (T_1 \circ \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,0)}, T_2 \circ \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,0)}, T_3 \circ \boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,0)}) \cdot (\cos u_2, \sin u_2, 0)\, \mathbf{d}u_{23}.
\end{aligned}
$$

Pokud záporné znaménko před integrálem přidáme k vektoru $(\cos u_2, \sin u_2, 0)$, dostáváme jednotkový vnější normálový vektor k hranici ∂M (týká se to části hranice, kterou se nyní zabýváme). Následně lze integrál interpretovat způsobem

$$
- \int_{\boldsymbol{\varphi} \circ \vec{I}_{(1,0)}((0,\pi)\times(0,1))} \boldsymbol{\omega} = \int_{\{x_1^2 + x_2^2 = 1, x_2 > 0, x_3 \in (0,1)\}} (T_1, T_2, T_3) \cdot \boldsymbol{\nu}\, \mathrm{d}S.
$$

Podobně naložíme se zbývajícími pěti integrály a dostaneme stejný výsledek, jako dává Věta o divergenci (Věta 17.3.6).

18.4 Dodatek: Hausdorffova míra a Hausdorffova dimenze

18.4.1 Hausdorffova míra

V tomto oddíle si stručně představíme odlišný přístup k počítání obsahů ploch, který se často vyžívá v teorii parciálních diferenciálních rovnic a nabízí řadu užitečných nástrojů pro práci s Lebesgueovým integrálem, jako jsou různá zobecnění Věty o substituci (Věta 15.12.1).

Připomeňme, že hlavními kroky budování křivkového a plošného integrálu bylo zparametrizování zakřiveného objektu a vyčíslení toho, jak přesně parametrizace lokálně mění obsah plochy (což jsme vyčetli z Jacobiho matice parametrizujícího zobrazení). Je přirozené tento těžkopádný proces porovnávat s lehkostí, jakou počítá „objemy“ množin třeba Diracova míra δ_x (kde $x \in \mathbb{R}^N$). Naším cílem zde bude zkonstruovat podobné chytré míry.

Příklad 18.4.1. Pokud definujeme míru na $\mathbb{R}^2$ předpisem (níže E^0 značí svislý řez množinou E v úrovni $x_1 = 0$ jako ve Fubiniho větě)

$$\mu(E) = \lambda_1(E^0),$$

snadno se nahlédne, že jsme získali míru na $\mathbb{R}^2$, která je definovaná na borelovských množinách (připomeňme, že v důkazu Fubiniho věty jsme ukázali, že borelovská množina má všechny řezy borelovské) a s podmnožinami množiny $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 = 0\}$ pracuje přesně stejným způsobem, jako pracuje Lebesgueova míra λ_1 kombinovaná s parametrizací $\varphi\colon t \in \mathbb{R} \mapsto (0, t) \in \mathbb{R}^2$.

Konstrukci slíbených „chytrých“ měr založíme na práci s pokrytími, jako když jsme konstruovali Lebesgueovu míru.

Definice 18.4.2 (Průměr množiny)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}^N$ je neprázdná. Její *průměr* (či *diametr*) definujeme jako

$$\operatorname{diam}(M) := \sup\{|x - y| \colon x, y \in M\}.$$

Pro prázdnou množinu pak definujeme $\operatorname{diam}(\emptyset) := 0$.

Definice 18.4.3 (Hausdorffova s-rozměrná míra)**.** Nechť $s \geq 0$ a $E \subset \mathbb{R}^N$. Položme

$$\alpha_s := \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)}.$$

Pro každé $\delta > 0$ definujeme

$$\mathcal{H}_s^\delta(E) := \inf\Big\{\sum_{j\in J} 2^{-s}\alpha_s(\operatorname{diam}(U_j))^s \colon J \subset \mathbb{N}, \bigcup_{j\in J} U_j \supset E, \operatorname{diam}(U_j) < \delta\,\forall j \in J\Big\}.$$

Dále zavádíme *Hausdorffovu s-rozměrnou vnější míru* jako

$$\mathcal{H}_s^*(E) := \sup_{\delta>0} \mathcal{H}_s^\delta(E).$$

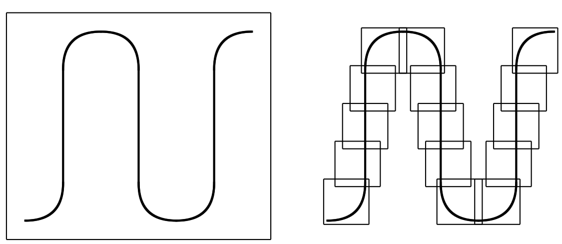
Poznámka 18.4.4. (i) Pro $s \in \mathbb{N}$ je konstanta α_s rovna s-rozměrné Lebesgueově míře jednotkové koule v $\mathbb{R}^s$. Ve speciálním případě $s = 0$ a $s = 1$ je činitel $2^{-s}\alpha_s$ roven jedné.
(ii) V definici připouštíme nejvýše spočetná pokrytí množiny E. Je podstatné, že připouštíme i konečná pokrytí, neboť v případě $s = 0$ je číslo $\sum_{j\in J}(\operatorname{diam}(U_j))^s$ rovno přesně počtu množin v daném pokrytí. Trochu problémy nám ale v případě $s = 0$ dělá prázdná množina. Proto pro tento případ bereme $(\operatorname{diam}\emptyset)^0 = 0^0 := 0$.
(iii) Pokud platí $0 < \delta_1 \le \delta_2$, pak zřejmě platí $\mathcal{H}_s^{\delta_2}(E) \le \mathcal{H}_s^{\delta_1}(E)$ (všechna pokrytí přípustná pro δ_1 jsou přípustná pro δ_2). Díky tomu je funkce $\delta \mapsto \mathcal{H}_s^{\delta}(E)$ nerostoucí na $(0,\infty)$ a platí

$$\mathcal{H}_s^*(E) = \lim_{\delta\to 0_+} \mathcal{H}_s^{\delta}(E).$$

(iv) Zřejmě platí $\mathcal{H}_s^*(\emptyset) = 0$ a $\mathcal{H}_s^*(E) \le \mathcal{H}_s^*(F)$ kdykoliv $E \subset F$.
(v) Není těžké si rozmyslet, že $\mathcal{H}_s^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_s^*(E_i)$.
(vi) Snadno se dokáže, že je-li $f\colon E \mapsto \mathbb{R}^N$ l-lipschitzovské zobrazení (rozmyslete si, co udělá takové zobrazení s průměrem množiny), pak

$$\mathcal{H}_s^*(f(E)) \le l^s \mathcal{H}_s^*(E).$$

Speciálně izometrická zobrazení (jako například posunutí nebo rotace) zachovávají Hausdorffovu s-rozměrnou vnější míru.



Obrázek 18.2: Uvažujme $s = 1$ v Definici 18.4.3. Pro velké hodnoty čísla δ je hodnota infima v definici $\mathcal{H}_s^{\delta}$ více ovlivňována pokrytím z levého obrázku nežli intuitivně správným pokrytím z obrázku pravého. Teprve proces $\delta \to 0_+$ (či $\sup_{\delta>0}$) v definici Hausdorffovy míry vyloučí tato pokrytí, která by byla „nespravedlivě“ efektivní.

Pro některá s se dá $\mathcal{H}_s^*$ snadno charakterizovat.

Tvrzení 18.4.5. (i) *$\mathcal{H}_0^*$ je aritmetická míra na $\mathbb{R}^N$.*
(ii) *$\mathcal{H}_1^* = \lambda_1^*$ na $\mathbb{R}$.*
(iii) *Jestliže $E \subset \mathbb{R}^N$ a $s > N$, pak $\mathcal{H}_s^*(E) = 0$.*

Důkaz. Dokažme první část. Každou konečněbodovou množinu $E \subset \mathbb{R}^N$ lze zřejmě pokrýt systémem jednobodových množin tvořených prvky uvedené množiny. Odtud vidíme, že pro všechna $\delta > 0$ je veličina $\mathcal{H}_0^{\delta}(E)$ shora odhadnuta počtem prvků množiny E a totéž musí platit pro $\mathcal{H}_0^*(E)$. Na druhou stranu, pro E existuje $\delta_0 > 0$ takové, že každá dvojice jeho různých prvků má vzdálenost alespoň δ_0. Pro každé $\delta \in (0, \delta_0)$ pak každé pokrytí přípustné ve výpočtu $\mathcal{H}_0^\delta(E)$ musí být tvořeno přinejmenším tolika množinami, kolik má E prvků. Má-li množina E nekonečný počet prvků, snadno ze čtvrté části Poznámky 18.4.4 dostaneme, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí $\mathcal{H}_0^*(E) \geq k$. Odtud $\mathcal{H}_0^*(E) = \infty$.

Druhou část získáme z následující řetězové rovnosti platné pro každé $\delta > 0$, kterou si odůvodníme pod její formulací

$$\begin{aligned}
&\lambda_1^*(E)\\
&= \inf\Big\{\sum_{j\in J} \lambda_1(I_j)\colon J \subset \mathbb{N}, \bigcup_{j\in J} I_j \supset E, I_j \text{ je omezený otevřený interval}\Big\}\\
&= \inf\Big\{\sum_{j\in J} \lambda_1(I_j)\colon J \subset \mathbb{N}, \bigcup_{j\in J} I_j \supset E, I_j \text{ je otevřený interval a } \operatorname{diam}(I_j) < \delta\Big\}\\
&= \inf\Big\{\sum_{j\in J} \operatorname{diam}(I_j)\colon J \subset \mathbb{N}, \bigcup_{j\in J} I_j \supset E, I_j \text{ je otevřený interval a } \operatorname{diam}(I_j) < \delta\Big\}\\
&= \inf\Big\{\sum_{j\in J} \operatorname{diam}(U_j)\colon J \subset \mathbb{N}, \bigcup_{j\in J} U_j \supset E, U_j \subset \mathbb{R}^N, \operatorname{diam}(U_j) < \delta\Big\}\\
&= \mathcal{H}_1^\delta(E).
\end{aligned}$$

První rovnost se získala z definice Lebesgueovy míry. Oproti skutečné definici se zde odlišujeme v tom, že připouštíme i konečná pokrytí. To však infimum nezmění, neboť každý omezený otevřený interval umíme napsat jako sjednocení dvojice intervalů, které se překrývají libovolně málo. Zmíněnému principu vděčíme i za druhou rovnost. Třetí rovnost je triviální. Při důkazu čtvrté rovnosti si nejprve povšimněme, že zřejmě platí nerovnost „$\geq$“. Na druhou stranu, nejefektivnější množiny pro pokrývání v $\mathbb{R}$ jsou uzavřené intervaly (průměr množiny se nezvětší přechodem k uzávěru a doplněním množiny o konvexní kombinace jejích prvků), ale každý uzavřený interval se dá pokrýt otevřeným intervalem s průměrem větším jen o libovolně malé číslo. Proto platí i nerovnost „$\leq$“. Pátá rovnost pochází z definice Hausdorffovy míry, kde jsme navíc využili toho, že $2^{-1}\alpha_1 = 1$.

Dokažme třetí tvrzení. Nejprve předpokládejme, že E je krychle $[0,1]^N$. Při zadaném $n \in \mathbb{N}$ tuto krychli snadno pokryjeme pomocí n^N uzavřených krychliček s hranou o délce $\frac{1}{n}$. Povšimněme si, že tyto krychličky mají průměr $\frac{\sqrt{N}}{n}$. Díky tomu platí pro každé $\delta > \frac{\sqrt{N}}{n}$

$$\mathcal{H}_s^\delta([0,1]^N) \leq 2^{-s}\alpha_s n^N \Big(\frac{\sqrt{N}}{n}\Big)^s.$$

Následně máme

$$\mathcal{H}_1^*([0,1]^N) = \lim_{\delta\to 0_+} \mathcal{H}_1^\delta([0,1]^N) \leq \lim_{n\to\infty} 2^{-s}\alpha_s(\sqrt{N})^s n^{N-s} = 0.$$

Odtud díky subaditivitě (připomeňte si pátou část Poznámky 18.4.4) dostáváme $H_s^*(\mathbb{R}^N) = 0$, z čehož již snadno plyne dokazovaný výsledek. $\square$

Poznámka 18.4.6. V předchozím důkazu jsme využívali toho, že v jednodimenzionálním případě jsou nejlépe pokrývajícími množinami uzavřené intervaly. Ve vyšší dimenzi nejefektivnější typ množiny pro pokrývání neexistuje. Na jednu stranu je v pokročilejší teorii často užívaným výsledkem *izodiametrická nerovnost*, podle níž mezi množinami se stejným průměrem nemá žádná množina větší Lebesgueovu míru než koule. Na druhou stranu, množina

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in (0,1), y \in (0,x), x^2+y^2<1\}$$

má jednotkový průměr, ale nemůže být pokryta koulí s jednotkovým průměrem.

V literatuře lze dále nalézt i další dva užitečné výsledky, jejichž důkazy jsou již poměrně dlouhé.

Věta 18.4.7 (O hausdorffovské měřitelnosti borelovských množin)**.** *Borelovské množiny jsou měřitelné vůči Hausdorffově míře $\mathcal{H}_s$ pro všechna $s \geq 0$.*

Věta 18.4.8 (O vztahu Hausdorffovy a Lebesgueovy míry)**.** *Pro všechna $N \in \mathbb{N}$ platí $\lambda_N = \mathcal{H}_N$ na $\mathbb{R}^N$.*

Příklad 18.4.9. (i) Uvažujme borelovskou množinu

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [0,1], y = 0\}.$$

Dokažme, že $\mathcal{H}_1(M) = 1$, $\mathcal{H}_s(M) = 0$ pro každé $s > 1$ a $\mathcal{H}_s(M) = \infty$ pro každé $s \in [0,1)$.

Nejjednodušší cesta k získání prvního výsledku je využití toho, že $\mathcal{H}_1([0,1]) = \lambda_1([0,1]) = 1$ a $M = \varphi([0,1])$, kde $\varphi \in \mathbb{R} \colon t \mapsto (t,0) \in \mathbb{R}^2$ je izometrie. Můžeme ale také postupovat přímo. Pokrytí množinami typu

$$U_j := \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] \qquad j \in \{1,\dots,n\},$$

kde $n \in \mathbb{N}$ je pevné číslo, vede na odhad $\mathcal{H}_1(M) \leq 1$. Obrácený odhad získáme z úvahy, že libovolné pokrytí $\{U_j\}_{j\in J}$ „zefektivníme“, pokud jej nahradíme pokrytím $\{U_j \cap \{y=0\}\}$ a pak už jen stačí použít myšlenky z důkazu druhé části Tvrzení 18.4.5.

Druhý výsledek získáme opět za pomoci pokrytí $\{[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]\}_{j=1}^n$. Pro každé $\delta > 0$ pak při zafixovaném $n > \frac{1}{\delta}$ pak dostáváme

$$\mathcal{H}_s^\delta(M) \leq \sum_{j=1}^n 2^{-s}\alpha_s(\operatorname{diam}([\tfrac{j-1}{n}, \tfrac{j}{n}]))^s = n2^{-s}\alpha_s\frac{1}{n^s} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Třetí výsledek můžeme získat třeba následujícím způsobem. Pro spor předpokládejme, že existuje $s \in [0,1)$ takové, že

$$c := \mathcal{H}_s(M) < \infty.$$

Zafixujeme-li $\delta > 0$ splňující $\delta^{1-s}2^s\alpha_s^{-1}2c < 1$, pak musí existovat pokrytí $\{U_j\}$ s průměry shora odhadnutými číslem δ, pro které platí

$$\sum_{j\in J} 2^{-s}\alpha_s(\operatorname{diam}(U_j))^s < 2c.$$

Odtud

$$\mathcal{H}_1(M) \le \sum_{j\in J} \operatorname{diam}(U_j) \le \delta^{1-s}2^s\alpha_s^{-1}\sum_{j\in J} 2^{-s}\alpha_s(\operatorname{diam}(U_j))^s \le \delta^{1-s}2^s\alpha_s^{-1}2c < 1$$

a máme spor.

(ii) Uvažujme borelovskou množinu

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}.$$

Spočítejme $\mathcal{H}_1(M)$.

Rychlý postup nám dá opět parametrizace. Platí $M = \boldsymbol{\varphi}([0, 2\pi))$, kde $\boldsymbol{\varphi}\colon t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$. Snadno se ověří, že $\boldsymbol{\varphi}$ je 1-lipschitzovské zobrazení (jednoduché cvičení na součtové vzorce kombinované s odhadem $|\sin t| \le |t|$ na $\mathbb{R}$), a proto

$$\mathcal{H}_1(M) \le 2\pi.$$

Pokud dále interval $[0, 2\pi)$ rozdělíme na n stejných dílků, kde $n \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$, snadno zjistíme, že na obrazu jednotlivých dílků je zobrazení φ^{-1} lipschitzovské s konstantou $l = l(n)$, přičemž $l(n) \to 1$ pro $n \to \infty$. Odtud plyne

$$\mathcal{H}_1(M) \ge 2\pi.$$

Další možností je přirozený přístup přes aproximaci lomenými čarami se zlomy umístěnými v množině M, což je přístup, jímž jsme v kapitole o Riemannovu integrálu definovali délku křivky. Z první části tohoto příkladu snadno dostaneme, že jednorozměrná Hausdorffova míra přiřazuje úsečkám jejich délku. Proto, díky σ-aditivitě, správnou délku přiřazuje i lomené čáře. Předpokládejme, že už víme, že délka (supremum délek aproximujících lomených čar) jednotkové kružnice je 2π. Je snadné vymyslet 1-lipschitzovské zobrazení, které naši kružnici zobrazí na zvolenou lomenou čáru (třeba kolmou projekcí části kružnice na jí odpovídající segment lomené čáry). Proto

$$\mathcal{H}_1(M) \ge 2\pi.$$

Naopak, postupným nahrazováním jednotlivých segmentů lomené čáry „přesnějšími“ lomenými čarami, lze z původní lomené čáry získat lomenou čáru, která lépe aproximuje (má větší délku) a maximální délka jejích segmentů nepřesahuje předem zvolené $\delta > 0$. Čím je δ blíže k nule, tím jsou kolmé projekce částí kruhu odpovídajících jednotlivým segmentům blíže izometrii, a proto

$$\mathcal{H}_1(M) \le 2\pi.$$

18.4.2 Hausdorffova dimenze

V předchozím textu jsme často naráželi na jev, kdy pro množinu $M \subset \mathbb{R}^N$ platilo $\mathcal{H}_1(M) \in (0,\infty)$, $\mathcal{H}_s(M) = 0$ pro všechna $s > 1$ a $\mathcal{H}_s(M) = \infty$ pro všechna $s \in [0,1)$. Tento jev nebyl náhodný, platí totiž následující pravidla.

Tvrzení 18.4.10. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^N$ a $0 \le s_1 < s_2$. Pak*
(i) $\mathcal{H}^*_{s_2} \le \mathcal{H}^*_{s_1}$
(ii) *jestliže $\mathcal{H}^*_{s_1}(M) < \infty$, pak $\mathcal{H}^*_{s_2}(M) = 0$*
(iii) *jestliže $\mathcal{H}^*_{s_2}(M) > 0$, pak $\mathcal{H}^*_{s_1}(M) = \infty$.*

Důkaz. První tvrzení plyne z toho, že je-li $\operatorname{diam}(U_j) < \delta$, pak

$$(\operatorname{diam}(U_j))^{s_2} \le \delta^{s_2-s_1}(\operatorname{diam}(U_j))^{s_1}.$$

Proto pro každé $\delta > 0$ dostatečně malé platí

$$2^{-s_2}\alpha_{s_2}(\operatorname{diam}(U_j))^{s_2} \le 2^{-s_1}\alpha_{s_1}(\operatorname{diam}(U_j))^{s_1}.$$

Dokažme druhé tvrzení. Předpokládejme, že $\mathcal{H}_{s_1}(M) < K < \infty$. Zafixujme na chvíli $\delta > 0$. Pak musí existovat systém množin $\{U_j\}_{j\in J}$ pokrývající M takový, že průměry jednotlivých množin nepřesahují δ a navíc

$$\sum_{j\in J} 2^{-s_1}\alpha_{s_1}(\operatorname{diam}(U_j))^{s_1} < K.$$

Proto také platí

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{\delta}_{s_2}(M) &\le \sum_{j\in J} 2^{-s_2}\alpha_{s_2}(\operatorname{diam}(U_j))^{s_2} \le 2^{s_1-s_2}\frac{\alpha_{s_2}}{\alpha_{s_1}}\delta^{s_2-s_1}\sum_{j\in J} 2^{-s_1}\alpha_{s_1}(\operatorname{diam}(U_j))^{s_1}\\ &\le CK\delta^{s_2-s_1}.\end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$H^*_{s_2}(M) = \lim_{\delta\to 0_+} H^{\delta}_{s_2}(M) = 0.$$

Konečně, třetí tvrzení je zřejmě ekvivalentní s druhým, neboť Hausdorffova míra je nezáporná. □

Předešlý výsledek nás vede k následující definici.

Definice 18.4.11 (Hausdorffova dimenze)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}^N$. Pak definujeme *Hausdorffovu dimenzi* množiny M jako

$$\dim_H(M) := \inf\{s \ge 0 \colon \mathcal{H}^*_s(M) = 0\}.$$

Poznámka 18.4.12. Pro $M \subset \mathbb{R}^N$ vůbec nemusí existovat $s > 0$ takové, že $\mathcal{H}^*_s(M) \in (0,\infty)$. Kupříkladu platí

$$\mathcal{H}^*_s(\emptyset) = 0 \qquad \text{pro všechna } s \ge 0,$$

nebo pro $M = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ máme

$$\mathcal{H}^*_s(M) = \begin{cases} \infty & \text{pro } s \in [0,1] \\ 0 & \text{pro } s > 1. \end{cases}$$

Příklad 18.4.13. Ukažme si, že pro Cantorovo diskontinuum C platí $\dim_H(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$. Nejprve zafixujme $s > \frac{\log 2}{\log 3}$ a ukažme, že $\mathcal{H}^*_s(C) = 0$. Jako pokrytí zvolme intervaly $I_1, \ldots, I_{2^k}$ z k-tého kroku konstrukce Cantorova diskontinua. Tyto intervaly mají shodně délku 3^{-k} a proto máme pro všechna $\delta > 3^{-k}$

$$\mathcal{H}^\delta_s(C) \leq 2^k (3^{-k})^s = 2^k (3^{-k})^{\frac{\log 2}{\log 3}} (3^{-k})^{s-\frac{\log 2}{\log 3}} = (3^{-k})^{s-\frac{\log 2}{\log 3}} \overset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Odtud plyne $\mathcal{H}^*_s(C) = 0$.

Nyní ukážeme, že $\mathcal{H}_s^{\frac{\log 2}{\log 3}}(C) > 0$. Pro jednoduchost zápisu označme $\alpha := \frac{\log 2}{\log 3}$. Budeme postupovat ve dvou krocích.

Krok 1: odhad po konečné pokrytí tvořené otevřenými intervaly
Nechť $\{J_1, \ldots, J_m\}$, kde $m \in \mathbb{N}$, je libovolné konečné pokrytí C omezenými otevřenými intervaly. Zafixujme $k \in \mathbb{N}$ tak velké, aby

$$3^{-k} < \min\{\mathrm{diam}(J_1), \ldots, \mathrm{diam}(J_m)\}.$$

Dále pro každé $l \in \{1, \ldots, k\}$ definujme číslo N_l jako počet indexů $j \in \{1, \ldots, m\}$, pro které platí $3^{-l} \leq \mathrm{diam}(J_j) < 3^{-l+1}$. Díky definici čísla k nyní dostáváme

$$\sum_{j=1}^{m} (\mathrm{diam}(J_j))^\alpha \geq \sum_{l=1}^{k} N_l (3^{-l})^\alpha = \sum_{l=1}^{k} N_l (3^{-l})^{\frac{\log 2}{\log 3}} = \sum_{l=1}^{k} N_l 2^{-l}. \tag{18.4.1}$$

Navíc každý interval J_j splňující $3^{-l} \leq \mathrm{diam}(J_j) < 3^{-l+1}$ mohou protínat nejvýše dva z 2^l intervalů délky 3^{-l} z l-tého kroku konstrukce Cantorova diskontinua. Zmíněné dva intervaly dále obsahují $2 \cdot 2^{k-l}$ intervalů z k-tého kroku konstrukce Cantorova diskontinua. Navíc v k-tém kroku Cantorova diskontinua vystupuje právě 2^{-k} intervalů a každý takový interval musí mít neprázdný průnik alespoň s jedním z intervalů $J_1, \ldots, J_m$ (neboť systém $\{J_1, \ldots, J_m\}$ pokrývá C). Proto platí

$$\sum_{l=1}^{k} N_l 2 \cdot 2^{k-l} \geq 2^k.$$

Odtud

$$\sum_{l=1}^{k} N_l 2^{-l} \geq \frac{1}{2}.$$

Pokud využijeme právě získaný odhad spolu s nerovností (18.4.1), dostáváme

$$\sum_{j=1}^{m} (\mathrm{diam}(J_j))^\alpha \geq \frac{1}{2}.$$

Krok 2: odhad po obecné pokrytí
Uvažujme obecné pokrytí $\{U_j\}_{j\in J}$ množiny C. Předně můžeme předpokládat, že U_j jsou uzavřené intervaly, neboť tím se pokrytí může pouze zefektivnit. Zároveň můžeme pro každý zmíněný uzavřený interval U_j nalézt otevřený interval J_j splňující $J_j \supset U_j$ a $(\mathrm{diam}\, J_j)^\alpha < 2(\mathrm{diam}\, U_j)^\alpha$. Navíc na pokrytí C, což je kompaktní

množina, díky Borelově pokrývací větě (Věta 11.8.3) postačí jen konečný počet právě zkonstruovaných otevřených intervalů. Pro jednoduchost značení předpokládejme, že jsou to intervaly $J_1, \dots, J_m$. Na ty můžeme aplikovat výsledek prvního kroku a celkově dostáváme

$$\sum_{j\in J}(\mathrm{diam}(U_j))^\alpha \geq \frac{1}{2}\sum_{j\in J}(\mathrm{diam}(J_j))^\alpha \geq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}(\mathrm{diam}(J_j))^\alpha \geq \frac{1}{4}.$$

Protože uvažované pokrytí bylo libovolné, máme

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(C) \geq \frac{1}{4} \qquad \text{pro všechna } \delta > 0,$$

a proto $\mathcal{H}_\alpha^*(C) \geq \frac{1}{4}$.

Celkově máme zaručeno, že $\dim_H(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Literatura

[AmEs An] Amman, H. a Escher, J.: *Analysis I,II,III.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.

[Ap MA] Apostol, T.M.: *Mathematical Analysis.* Narosa Publishing House, New Delhi, 1997 (16. reprint).

[BaSt TeMno] Balcar, B. a Štěpánek, P.: *Teorie množin.* Academia, Praha, 2005 (2. vydání).

[BrSaSo MeKo] Brdička, M., Samek, L. a Sopko B.: *Mechanika kontinua.* Academia, Praha, 2000.

[De] Děmidovič B.P.: *Sbírka a cvičení z matematické analýzy.* Fragment, Praha, 2003.

[Di An] Diedonné, J.: *Foundation of Modern Analysis.* Academic Press, New York–London, 1960.

[Ja DPI] Jarník, V.: *Diferenciální počet I.* Academia, Praha, 1976 (3. vydání).

[Ja DPII] Jarník, V.: *Diferenciální počet II.* Academia, Praha, 1976 (3. vydání).

[Ja IPI] Jarník, V.: *Integrální počet I.* Academia, Praha, 1976 (3. vydání).

[Ja IPII] Jarník, V.: *Integrální počet II.* Academia, Praha, 1976 (3. vydání).

[Ko MA I] Kopáček, J.: *Matematická analýza pro fyziky I.* Matfyzpress, Praha, 2002.

[Ko MA II] Kopáček, J.: *Matematická analýza pro fyziky II.* Matfyzpress, Praha, 2002.

[Ko MA III] Kopáček, J.: *Matematická analýza pro fyziky III.* Matfyzpress, Praha, 2003.

[Ko MA IV] Kopáček, J.: *Matematická analýza pro fyziky IV.* Matfyzpress, Praha, 2003.

[Ci MA V] Čihák, P. a kol. : *Matematická analýza pro fyziky V.* Matfyzpress, Praha, 2001.

[Ko Pr I] Kopáček, J. a kol.: *Příklady z matematiky pro fyziky I.* Matfyzpress, Praha, 2002.

[Ko Pr II] Kopáček, J. a kol.: *Příklady z matematiky pro fyziky II.* Matfyzpress, Praha, 2003.

[Ko Pr III] Kopáček, J. a kol.: *Příklady z matematiky pro fyziky III.* Matfyzpress, Praha, 2003.

[Ko Pr IV] Kopáček, J. a kol.: *Příklady z matematiky pro fyziky IV.* Matfyzpress, Praha, 2003.

[Ko Pr V] Kopáček, J. a kol.: *Příklady z matematiky pro fyziky V.* Matfyzpress, Praha, 2003.

[StSa AnI] Stein, E.M. a Shakarchi, R.: *Fourier analysis. An introduction.* Princeton Lecture Notes in Analysis I, Princeton University Press, Princeton, New York, 2003.

[StSa AnII] Stein, E.M. a Shakarchi, R.: *Complex analysis.* Princeton Lecture Notes in Analysis II, Princeton University Press, Princeton, New York, 2003.

[StSa AnIII] Stein, E.M. a Shakarchi, R.: *Real analysis. Measure theory, integration and Hilbert spaces.* Princeton Lecture Notes in Analysis III, Princeton University Press, Princeton, New York, 2005.

[Tv 1980] Tverberg, H.: *A proof of the Jordan curve theorem.* Bull. London Math. Soc. 12 (1980), 34–38.

Příloha A

Významní matematici 3

Tato příloha obsahuje základní informace o některých matematicích a fyzicích, jejichž výsledky se týkají třetího dílu skript. Pro čtenářovu pohodlnost jsme ponechali i ta jména, která se týkají pouze předchozích dvou dílů.

Niels Henryk Abel (1802 Frindöe, ostrov Finnøy–1829 Arendal)

Vystudoval univerzitu v Oslo, poté díky finanční podpoře jednoho z profesorů mohl pobývat v Kodani. Vládní stipendium mu později umožnilo strávit dva roky v Berlíně, Freiburgu a Paříži, finanční problémy ho ale donutily vrátit se zpět. Nakazil se tuberkulózou a zemřel dva dny předtím, než přišel dopis oznamující získání profesorského místa v Berlíně. Věnoval se řešení algebraických rovnic (dokázal, že rovnice vyšších než čtvrtého stupně nelze řešit přesně pomocí algebraických operací), objevil teorii grup a věnoval se eliptickým integrálům. Jeho jméno je také spojeno s kritériem pro neabsolutně konvergentní řady a integrály. Je po něm také pojmenována nejprestižnější matematická cena (Abelova cena).

Aristoteles ze Stageiry (384 př.n.l. Stageira–322 př.n.l. Chalkida)

Aristoteles je považován za zakladatele logiky jako vědy. Navázal především na svého učitele Platóna a jeho učitele Sokrata. Studoval v Platónově Akademii, později tam i vyučoval. Filip Makedonský ho povolal na svůj dvůr, aby se stal vychovatelem Alexandra Makedonského. Po Filipově smrti pak v Aténách založil vlastní filozofickou školu. Pokusil se obsáhnout celé tehdejší vědecké poznání a k tomu potřeboval mít přesně formulováno, jak správně uvažovat. Hlavním dílem je *Organon*, česky Nástroj.

Cesare Arzelà (1847 Santo Stefano di Magra–1912 Santo Stefano di Magra)

Studoval na Scuola Normale Superiore v Pise. Po dokončení studií učil na střední škole, ale vrátil se zpět do Pisy a pokračoval ve studiích. Působil krátce na Instituto Tecnico ve Florencii, na univerzitě v Palermu a v roce 1880 se přestěhoval do Bologně, kde působil po zbytek své kariéry. Je známý především svým zobecněním Ascoliho věty týkající se vztahu stejné spojitosti a stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí.

Giulio Ascoli (1843 Terst–1896 Milán)

Studoval na Scuola Normale Superiore v Pise. Poté působil celý život v Miláně. Věnoval se teorii reálných funkcí a Fourierovým řadám, zavedl pojem stejné spojitosti a byl autorem první verze tzv. Arzelà–Ascoliho věty týkající se stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí, kterou později zobecnil C. Arzelà.

Stefan Banach (1892 Krakov–1945 Lvov)

Nejslavnější polský matematik, vůdčí osobnost lvovské matematické školy, zakladatel funkcionální analýzy. Matka po jeho narození zmizela, otec ho příliš nepodporoval. Vychovával ho nejprve babička, poté Franciszka Płowa. Studoval na technice ve Lvově, teprve po setkání s H. Steinhausem se zaměřil na matematiku. Jeho doktorská práce obsahovala definici úplného normovaného prostoru, který se díky Fréchetovi nazývá prostorem Banachovým. Poté působil na univerzitě ve Lvově. Za sovětské okupace si díky dobrým vztahům se sovětskými matematiky zachoval své místo, za německé okupace byl vězněn a poté se živil mimo jiné krmením vší svou vlastní krví v německém výzkumném ústavu. Po skončení války se vrátil na univerzitu, setkal se se Sobolevem, ale brzy umírá na rakovinu plic. Jeho hlavním přínosem bylo systematické vybudování funkcionální analýzy. Kromě Banachových prostorů jsou po něm pojmenovány Banachovy algebry, Hahn–Banachova věta, Banach–Steinhausova věta, Banach–Alaogluova věta, Banach–Tarského věta či Banachova věta o pevném bodu.

Jacob Bernoulli (1655 Basilej–1705 Basilej)

Byl vynikajícím matematikem, profesorem na basilejské univerzitě, členem francouzské Královské akademie věd a berlínské Pruské akademie věd. Pocházel z rodiny bohatého obchodníka, proti vůli otce se místo teologie věnoval matematice a fyzice. Studoval infinitezimální počet z Leibnizova článku a později se Leibnize zastával ve sporu s Newtonem. Byl také učitelem svého mladšího bratra Johanna (a také svého synovce Nikolause), ale později se s ním rozešel a na vědeckém poli vedli četné spory. Věnoval se nekonečným řadám, diferenciálním rovnicím (je mimo jiné autorem metody separace proměnných a nalezl způsob řešení tzv. Bernoulliho rovnice), při studiu spojitého úročení dospěl k číslu e, formuloval důkaz pomocí matematické indukce, rozvinul variační počet (problém brachystochrony a izoperimetrický problém) a je pokládán za jednoho ze zakladatelů teorie pravděpodobnosti a statistiky.

Johann Bernoulli (1667 Basilej–1740 Basilej)

Mladší bratr Jacoba, též jeho žák, ale později se s ním rozešel a vedl s ním četné vědecké spory. V Paříži se seznámil s markýzem de l'Hospitalem, kterého vyučoval Leibnizově pojetí diferenciálního počtu a který ve své knize publikoval Johannovy výsledky; mimo jiné i slavné tzv. l'Hospitalovo pravidlo. Nastoupil na místo profesora matematiky do Groningenu a po bratrově smrti pak na jeho místo do Basileje. Ve sporu s Newtonem podporoval Leibnize, což ale vedlo k odmítání všech Newtonových myšlenek. Stal se členem akademií v Paříži, Berlíně, Londýně, Petrohradě a Bologni. Byl učitelem mladého Eulera. Věnoval se diferenciálním rovnicím, variačnímu počtu, ale i praktickým problémům jako je matematický popis pohybu plachetnic či optika. Napsal jednu z prvních učebnic hydrodynamiky, současně se svým synem Danielem, na kterého ale žárlil a i s ním se dostal do sporu.

Felix Bernstein (1878 Halle–1956 Curych)

Německý matematik židovského původu. Působil na univerzitě v Göttingenu, po nástupu Hitlera k moci emigroval do USA. Po 2. světové válce se vrátil do Evropy, žil v Římě a Freiburgu. Jeho hlavním výsledkem je tzv. Cantor–Bernsteinova věta (též nazývána Schröder–Bernsteinova věta) z teorie množin. Věnoval se i matematickým základům genetiky.

Jacques Philippe Marie Binet (1786 Rennes–1856 Paříž)

Francouzský matematik, fyzik a astronom. Věnpval se teorii čísel a maticovému počtu. Vystudoval École Polytechnique, kde posléze i působil. Dále vyučoval na Collége de France. Byl zvolen rytířem čestné legie a byl členem francouzské akademie vět. Kromě Cauchy–Binetovy formule našel explicitní vyjádření n-tého členu Fibonacciho řady.

Bernard Bolzano (1781 Praha–1848 Praha)

Český, ale německy mluvící matematik. Jeho otec pocházel z Itálie, matka byla Němka. Studoval soukromě matematiku a filozofii, na pražské univerzitě vystudoval teologii. Neuspěl ve snaze získat profesorskou pozici po Vydrovi, poté byl vysvěcen na kněze a na pražské univerzitě přednášel filozofii náboženství a byl univerzitním kazatelem v kostele Nejsvětějšího Salvátora. Pro své radikální názory byl v roce 1819 suspendován a odešel z Prahy. Zůstal však členem Královské české společnosti nauk, pro kterou pracoval i jako sekretář. Byl filozofem i matematikem současně, zabýval se problémy základů matematiky (logiky i matematické analýzy). Dokázal mnohé výsledky, které se dnes učí v základních kurzech analýzy, sestrojil dokonce spojitou funkci, která nemá derivaci v žádném bodě. Jako jeden z prvních si uvědomil, že všechny výsledky je třeba dokazovat a ne je brát jako zřejmé. Bohužel, kvůli problémům s publikováním jeho výsledky nebyly v matematické komunitě příliš známé a byly oceněny až po roce 1930, kdy byly vydány pod názvem *Functionenlehre*. Svou posmrtně vydanou prací *Paradoxien des Unendlichen* ovlivnil mimo jiné G. Cantora.

Émile Borel (1871 Saint-Affrique–1956 Paříž)

Francouzský matematik a politik, jeden ze zakladatelů teorie míry. Vystudoval na École Normale Supérieure v Paříži, jeho učitelem byl G. Darboux. Tři roky působil v Lille, poté na École Normale Supérieure a od roku 1909 se stal profesorem na pařížské Sorbonně. V letech 1924–1936 byl poslancem francouzského parlamentu a 1925–1940 ministrem námořnictva. V době vichistického režimu byl vězněn, poté se zapojil do hnutí odporu proti německé okupaci. Spolu s Henri Lebesguem je zakladatelem teorie míry, věnoval se její aplikaci v teorii pravděpodobnosti. Přispěl také k teorii her a věnoval se propojení geometrie a obecné teorie relativity. Jeho jméno je spojeno s borelovskými mírami, borelovskými množinami či borelovskými σ-algebrami.

Haïm Brezis (1944 Riom-ès-Montagnes–

Francouzský matematik, známý svými pracemi i učebnicemi funkcionální analýzy a parciálních diferenciálních rovnic. Vystudoval na pařížské Sorbonně pod vedením známého matematika Gustava Choqueta. Působí na Univerzitě Pierra a Marie Curie (známa jako Paris 6) a jako hostující profesor na Rutgersově univerzitě v USA.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 Petrohrad–1918 Halle)

Německý matematik a logik. Studoval v Curychu a Berlíně, působil na univerzitě v Halle. Věnoval se základům teorie množin, jako první si uvědomil, že je třeba rozlišovat mezi různými nekonečnými množinami. Ukázal, že nekonečné podmnožiny přirozených čísel jsou spočetné, ale reálná čísla jsou nespočetná. Zavedl pojmy kardinální a ordinální čísla, formuloval hypotézu kontinua, představil tzv. Cantorovo diskontinuum. Kvůli tomuto pojetí matematiky se dostal do ostrého sporu s L. Kroneckerem. Věnoval se také matematické analýze, například reprezentaci funkcí pomocí trigonometrických řad. Poslední léta jeho života byla poznamenána duševní chorobou.

Constantin Carathéodory (1873 Berlín–1950 Mnichov)

Německý matematik řeckého původu, jeho otec působil na tureckých ambasádách v Evropě a Constantin se narodil za jeho pobytu v Německu. Matematice se začal věnovat v Belgii, později dokončil studia v Německu, doktorát obhájil na univerzitě v Göttingenu. Chvíli zde i pracoval, později pak působil v Bonnu, Hanoveru, Vratislavi (Breslau)a Berlíně. Přijal nabídku řecké vlády a odešel učit do Atén, současně organizoval otevření univerzity ve Smyrně. Kvůli řecké okupaci města se mu univerzita otevřít nepodařila (zachránil ale univerzitní knihovnu) a později odešel do Mnichova, kde, kromě občasných návštěv USA, působil až do důchodu. Během Hitlerovy vlády se choval oportunisticky a udržoval kontakty s nacistickými pohlaváry. Významných výsledků dosáhl v teorii míry, teorii variačního počtu a parciálních diferenciálních rovnic, teorii funkcí reálné i komplexní proměnné i teorii obyčejných diferenciálních rovnic. Na mnichovské univerzitě je po něm pojmenována největší přednášková místnost.

Augustin Louis Cauchy (1789 Paříž–1857 Sceaux)

Jeden z nejvýznamnějších matematiků všech dob. Je autorem téměř 800 matematických článků, které se věnovaly různým oblastem matematiky a fyziky: mechanice kontinua, optice, teorii čísel, matematické analýze. Studoval na Ècole Polytechnique a na Ècole des Ponts et Chaussées. V knize *Cours d'Analyse* se mu podařilo rigorózně zformulovat základy matematické analýzy funkcí jedné reálné proměnné. Působil ale na pařížské polytechnice a spíše prakticky orientovaní studenti nebyli z takové výuky nadšeni. Navíc byl Cauchy poměrně konfliktní typ a i kvůli svému náboženskému zaměření musel nakonec místo opustit. Poté měl velké problémy sehnat místo, o to více se však věnoval vědecké práci. Zabýval se především funkcemi komplexní proměnné, kde dokázal mnohé fundamentální výsledky (Cauchyova věta pro křivkový integrál holomorfní funkce a příbuzné výsledky). Významné jsou též jeho práce z teorie parciálních diferenciálních rovnic (Cauchy–Kovalevské věta).

Ernesto Cesàro (1859 Neapol–1906 Torre Annunziata)

Studoval matematiku na École des Mines v Liège. Po návratu do Itálie působil nejprve v Palermu a poté na univerzitě v Neapoli. Věnoval se především geometrii (je po něm pojmenován popis křivek nezávislý na souřadném systému). S jeho jménem se pojí také sčítání řad pomocí limity aritmetických průměrů částečných součtů. Zahynul tragicky při záchraně syna, který se topil v moři.

Pafnutij Lvovič Čebyšev (1821 Okatov, Kalužská gubernie–1894 Petrohrad)

Významný ruský matematik, zakladatel petrohradské matematické školy. Pocházel ze šlechtické rodiny, nejprve byl vyučován doma. Poté, co se rodiče přestěhovali do Moskvy, nastoupil na univerzitu a studoval matematiku. I přes finanční problémy rodiny dostudoval. Odstěhoval se do Petrohradu, kde obhájil doktorát a nastoupil na místní univerzitu, kde pracoval po většinu svého života. Kromě toho vyučoval i v Carském Selu (dnes Puškin) praktickou mechaniku. Jeho výsledky se týkají pravděpodobnosti, statistiky, teorie čísel, aproximace funkcí a mechaniky. S jeho jménem se pojí slavná Čebyševova nerovnost a Čebyševovy polynomy. Mezi jeho studenty patřili například A. Lyapunov a A. Markov.

Jean Baptiste le Rond d'Alembert (1717 Paříž–1783 Paříž)

Francouzský matematik, fyzik, mechanik, hudební teoretik a filozof, redaktor slavné Encyklopedie. Byl nemanželským synem markýzy de Tencin a dělostřeleckého důstojníka Louis-Camus Destouches. Matka ho po narození odložila na schody kostela Saint-Jean le Rond, odkud pochází jeho jméno. Jméno d'Alembert přijal teprve později. Jeho otec ho finančně podporoval na studiích. Studoval v Paříži právo, ale vynikal především v matematice. Proslavil se dílem *Traité de dynamique* z roku 1743, které se věnovalo zákonům pohybu. Vyřešil jednorozměrnou vlnovou rovnici (řešící operátor nese jeho jméno, stejně jako diferenciální operátor z vlnové rovnice). Pracoval také na otázkách konvergence číselných řad (podílové, nebo-li d'Alembertovo kritérium). Věnoval se také teorii hudby. Od roku 1740 až do roztržky s D. Diderotem v roce 1757 působil jako jeden z editorů slavné Encyklopedie. Redigoval více než tisíc hesel. Byl členem francouzské, pruské a čestným členem Americké akademie umění a věd. Pruskou akademii věd odmítl po Eulerově odchodu do Petrohradu vést, pruský král mu ale vyplácel důchod. Odmítl se také stát vychovatelem dětí ruské carevny Kateřiny.

Jean-Gaston Darboux (1842 Nîmes–1917 Paříž)

Významný francouzský matematik, profesor pařížské Sorbonny. Věnoval se především diferenciální geometrii, matematické analýze a teorii diferenciálních rovnic. Ja autorem ekvivalentního přístupu k definici Riemannova integrálu. Byl Poincarého životopiscem a uspořádal dílo J. Fouriera. Byl také vynikajícím učitelem a mezi jeho studenty patřili například É. Borel, É. Cartan či É. Picard.

Richard Dedekind (1831 Braunschweig–1916 Braunschweig)

Německý matematik, působil na univerzitě v Göttingenu, ETH v Curychu, ale většinu času strávil na univerzitě v rodném Braunschweigu. Je známým především díky konstrukci reálných čísel pomocí tzv. Dedekindových řezů, přispěl ale také k teorii množin a algebře. Přátelil se s G. Cantorem a podporoval ho ve sporu s L. Kroneckerem.

René Descartes (1596 La Haye, dnes Descartes–1650 Stockholm)

Francouzský matematik, fyzik a filozof. Je autorem analytické geometrie, čímž přispěl k propojení algebry a geometrie. Zavedl označení proměnných x, y a z a z latinského překladu jeho jména (Cartesius) pochází název kartézské souřadné soustavy. Byl ale především filozofem a bývá dokonce nazýván „otcem moderní filozofie".

Ulisse Dini (1845 Pisa–1918 Pisa)

Italský matematik, absolvoval Scuola Normale Superiore v Pise, krátce pobýval v Paříži. Působil na univerzitě v Pise, kde byl i dva roky rektorem. Poté byl zvolen senátorem v italském parlamentu. V roce 1908 se stal ředitelem Scuola Normale Superiore, kde působil až do své smrti. Je známý především svými výsledky v teorii reálných funkcí (několik vět týkajících se vlastností konvergentních řad nese jeho jméno). V Itálii nese jeho jméno i věta o implicitní funkci.

Paul Adrien Maurice Dirac (1902 Bristol–1984 Tallahassee, FL)

Britský fyzik, věnoval se především kvantové teorii, za kterou dostal v roce 1933 Nobelovu cenu. Vystudoval matematiku v Cambridgi, kde také většinu života jako profesor matematiky působil. V roce 1969 se přestěhoval do USA, kde působil jako profesor fyziky v Miami a později v Tallahassee. Jeho jméno nese Diracova distribuce, rovnice popisující elektron (částici se spinem 1/2) a Fermiho–Diracovo rozdělení. Předpověděl též existenci pozitronu.

Evgenii Borisovič Dynkin (1924 Leningrad–2014 Ithaca, NY)

Ruský a americký matematik židovského původu. Jeho rodina byl a v roce 1935 odeslána do exilu, jeho otec zemřel v Gulagu. Vystudoval na moskevské univerzitě, kde ho výrazně podporoval A.N. Kolmogorov. Pod jeho vedením též obhájil doktorát a působil jako jeho asistent na moskevské univerzitě. V roce 1976 emigroval do USA, kde působil na Cornellově univerzitě. Věnoval se především algebře (významných výsledků dosáhl v teorii Lieových algeber) a teorii pravděpodobnosti. Jeho přednášku na Světovém kongresu matematiků ve Stockholmu v roce 1962 přednášel A.N. Kolmogorov, Dynkin až do své emigrace nesměl nikdy vycestoval na Západ.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 Düren–1859 Göttingen)

Německý matematik, jeho předkové pocházeli z Belgie, proto měl francouzsky znějící jméno. Vystudoval v Paříži, poté působil ve Vratislavi (tehdejší Breslau), Berlíně a Göttingenu. Jeho manželka byla sestrou hudebního skladatele F. Mendelssohna-Bartholdyho. Jeho jméno je spjato s mnoha oblastmi matematiky, kterým se věnoval. Především šlo o teorii čísel, v analýze patřil mezi první, kteří přesně definovali pojem funkce, a Dirichetova funkce byla první „exotická“ funkce, která byla matematiky přijata. Dále se věnoval konvergenci Fourierových řad (Dirichletovo jádro), parciálním diferenciálním rovnicím (Dirichletova okrajová podmínka), jeho jméno se objevuje spolu s Abelovým u konvergenčního kritéria neabsolutně konvergentních řad a integrálů. Významných výsledků dosáhl i v matematické fyzice a teorii pravděpodobnosti.

Paul David Gustav du Bois-Reymond (1831 Berlín–1889 Freiburg)

Německý matematik, jeho bratr Emil byl slavným lékařem a fyziologem. Vystudoval v Curychu a Königsbergu, poté učil na střední škole. Teprve později nastoupil do Heidelbergu a poté působil ve Freiburgu, Tübingenu a Berlíně. Věnoval se teorii funkcí, Fourierovým řadám a dokázal zjemnění fundamentálního lemmatu variačního počtu, se kterým se pojí jeho jméno. Publikoval příklad spojité, nikde nediferencovatelné funkce. Objevil myšlenku důkazu známého jako Cantorův diagonální argument. Rozvíjel také teorii infinitezimálně malých veličin.

Leonhard Paul Euler (1707 Basilej–1783 Petrohrad)

Švýcarský matematik, jeden z nejvýznamnějších matematiků všech dob. Napsal téměř 900 publikací a učebnic. Jeho nejdůležitější výsledky se týkají diferenciálních rovnic (metoda variace konstant, Eulerova rovnice aj.) a teorie grafů (problém königsbergských mostů), ale i mechaniky (Eulerovy rovnice ideální tekutiny). Zavedl také pojem imaginární číslo a komplexní exponenciálu, zavedl Γ-funkci a věnoval se také problematice variačního počtu. Vystudoval na basilejské univerzitě, kde na něj měl velký vliv Johann Bernoulli. Působil v Petrohradu, v Berlíně a poté opět v Petrohradu, kde je i pohřben.

Pierre Fatou (1878 Lorient–1929 Pornichet)

Francouzský matematik a astronom. Vystudoval na École Normale et Supérieure v Paříži, po dokončení studií začal pracovat na pařížské hvězdárně, kde působil po celý život. Byl především ovlivněn H. Lebesguem a jeho novou definicí integrálu, věnoval se ale také vlastnostem analytických funkcí, zkonstruoval jako první množinu, která se dnes nazývá „Juliova“ množina a souvisí s iteracemi holomorfních funkcí. S jeho jménem se též pojí Fatouovo lemma z teorie Lebesgueova integrálu. Rigorózně matematicky také dokázal některá tvrzení z nebeské mechaniky.

Maurice René Fréchet (1878 Maligny–1973 Paříž)

Francouzský matematik, žák Hadamardův. Vystudoval v Paříži, působil na různých francouzských univerzitách (Besançon, Nantes, Poitiers, Strasbourg) až nakonec zakotvil v Paříži. Věnoval se teorii metrických prostorů, které zavedl, topologii, statistice a funkcionální analýze. S jeho jménem se pojí totální diferenciál zobrazení nad Banachovými prostory.

Guido Fubini (1879 Benátky–1943 New York)

Italský matematik, známý především svou větou z teorie integrálů ve více dimenzích. Studoval v Pise na Scuola Normale Superiore, poté působil v Catanii, Janově a Turíně. Věnoval se diferenciální geometrii a holomorfním funkcím. Během první světové války se zaměřil na praktičtější problémy a těm se věnoval i po zbytek svého života. Kvůli svému židovskému původu i přes zdravotní problémy odešel v roce 1939 do USA, kde působil na univerzitě v Princetonu, ale nedlouho po svém odchodu zemřel.

Galileo Galilei (1564 Pisa–1642 Arcetri)

Toskánský astronom a fyzik. Studoval v Pise, z finančních důvodů studia nedokončil. Později ale působil na univerzitě v Pise a v Padově. Od roku 1610 byl na základě církevního procesu, který se týkal heliocentrického modelu, odsouzen k domácímu vězení, ve kterém zůstal až do konce života. Věnoval se astronomii, díky zdokonalení dalekohledu objevil 4 Jupiterovy měsíce, studoval sluneční skvrny a povrch měsíce. Věnoval se problémům kinematiky, studoval volný pád. Formuloval též několik problémů, které podnítily rozvoj variačního počtu.

René Eugène Gâteaux (1889 Vitry-le-François–1914 Rouvroy)

Francouzský matematik. Studoval v Reims a poté na École Normale Supérieure. Po dokončení studia učil na střední škole, začal se ale věnovat doktorátu. Získal stipendium a pobýval jeden rok v Římě, kde pracoval s V. Volterrou. Na začátku první světové války narukoval do armády a poměrně brzy byl zabit. Díky J. Hadamardovi obdržel po smrti prestižní cenu Prix Francoeur. Věnoval se nekonečnědimenzionální integraci, na jeho výsledky navázal N. Wiener při své práci o Brownově pohybu. Jeho jméno je spojeno se směrovou derivací zobrazení mezi Banachovými prostory.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777 Braunschweig–1855 Göttingen)

Významný německý matematik, fyzik a astronom, ředitel göttingenské hvězdárny. Vystudoval na univerzitě v Göttingenu. Věnoval se magnetismu, vynalezl magnetometr. Dokázal základní větu algebry, je považován za zakladatele teorie čísel, je autorem tzv. normálního (Gaussova) rozdělení, věnoval se i diferenciální geometrii a zabýval se myšlenkou neeukleidovských geometrií.

Kurt Gödel (1906 Brno–1978 Princeton)

Rakouský matematik a fyzik. Studoval fyziku a matematiku na vídeňské univerzitě, kde po doktorátu působil. Zde také publikoval své dvě hlavní věty o neúplnosti. Po anšlusu Rakouska se automaticky stal německým občanem, před nacismem uprchl do USA, kde působil na Institutu pokročilých studií v Princetonu. Zde se věnoval mimo jiné i obecné teorii relativity. V závěru života se věnoval filozofii.

Jørgen Pedersen Gram (1850 Nustrup–1916 Kodaň)

Dánský matematik, po studiích v Kodani nastoupil do pojišťovací společnosti a v tomto oboru působil po celý život. V roce 1884 založil vlastní společnost, kterou vedl až do roku 1910. Matematice se věnoval spíše jako koníčku, i přesto je jeho jméno spojeno s Gramovou maticí či Gram–Schmidtovým ortogonalizačním procesem (i když ten pochází již od Laplace a používal ho i Cauchy). Kromě toho napsal zajímavé práce o lesnictví, ale v dánštině, takže zůstaly nepovšimnuty.

George Green (1793 Sneinton, Nottingham–1840 Sneinton)

Anglický matematický fyzik, autor spisku „An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism“, kde formuloval v téměř dnešním znění Greenovu větu a zavedl Greenovy funkce. Ač bez formálního vzdělání (do školy chodil pouze rok a pracoval u otce, který byl pekař a vlastnil větrný mlýn), tato esej vzbudila zaslouženou pozornost. Teprve na jejím základě absolvoval studia na univerzitě v Cambridgi.

Thomas Hakon Gronwall (1877 Dylta bruk–1932 New York)

Studoval v Uppsale a Stockholmu, poté opustil Švédsko a přes Německo odešel později do USA. Zpočátku pracoval v různých ocelárnách jako inženýr, teprve po desetiletém pobytu se vrátil k matematice. Nejprve působil v Princetonu, později pak na katedře fyziky na Columbia University v New Yorku. Patnáct let byl editorem prestižního časopisu Annals of Mathematics, kde také publikoval podstatnou část svých matematických prací. S jeho jménem se pojí Gronwallova nerovnost, používaná v teorii diferenciálních rovnic. Věnoval se ale také teorii Fourierových řad, teorii čísel, teorii funkcí komplexní proměnné a matematické fyzice.

William Rowan Hamilton (1805 Dublin–1865 Dublin)

Irský matematik, známý především objevem kvaternionů. Byl typem zázračného dítěte, v dětství uměl několik cizích jazyků. Později dal přednost matematice, ale často psal i poezii. Studoval na Trinity College v Dublinu, po dokončení doktorátu působil na Trinity College jako Královský irský astronom, i když se věnoval prakticky jen matematice. Kromě kvaternionů se věnoval přeformulování newtonovské mechaniky (dnes je známá jako hamiltonovská mechanika), optice i teorii elektromagnetismu. Jeho matematické výsledky hrály velkou roli v matematické formulaci kvantové teorie. Jeho jméno se také pojí s Cayley–Hamiltonovou větou.

Felix Hausdorff (1868 Breslau, dnes Wroclaw–1942 Bonn)

Německý matematik židovského původu. Studoval v Lipsku, působil v Lipsku, Greifswaldu a Bonnu. Věnoval se topologii, teorii míry, funkcionální analýze a teorii množin. Zobecnil Carathéodoryho myšlenku definice dimenze na neceločíselné hodnoty, dokázal, že Cantorovo diskontinuum má neceločíselnou dimenzi. Na základě norimberských zákonů byl penzionován, ale nadále se věnoval vědě, i když v Německu nesměl publikovat. Poté, co se dozvěděl, že má být transportován do koncentračního tábora v Polsku, se svojí ženou a švagrovou spáchal sebevraždu.

Heinrich Eduard Heine (1821 Berlín–1881 Halle)

Studoval na univerzitách v Göttingenu a Berlíně. Působil v Königsbergu, Bonnu a Halle. Věnoval se matematické analýze, zejména speciálním funkcím. Známá je také jeho věta dávající do souvislosti limitu funkce a posloupností a jeho alternativní definice spojitosti.

Hérón Alexandrijský (Méchanikos) (10 n.l.–70 n.l.)

Řecký matematik a fyzik, působil v Múseiu v Alexandrii. Popsal iterační metodu určování druhé a třetí odmocniny. Jeho jméno je také spojeno se vzorcem na výpočet obsahu trojúhelníku (Hérónův vzorec), i když je pravděpodobné, že vzorec znal již Archimédés a Hérón ho pouze uvedl ve své knize *Metrika.* Ještě významnější jsou jeho vynálezy, například sestrojil pravděpodobně první parní stroj.

Ludwig Otto Hesse (1811 Königsberg–1874 Mnichov)

Vystudoval na univerzitě v Königsbergu, učil na střední škole a později pod vedením C. Jacobiho obhájil doktorát. Působil pak v Königsbergu, Heidelbergu a Mnichově. Věnoval se teorii algebraických funkcí, algebraických invariantů a variačnímu počtu, kde rozšířil Jacobiho výsledky. Jeho jméno je spojeno s maticí druhých derivací funkce více proměnných.

David Hilbert (1862 Wehlau, dnes Zamensk–1943 Göttingen)

Jeden z nejslavnějších matematiků všech dob. Vystudoval matematiku v Königsbergu, působil zde na počátku své kariéry, poté odešel do Göttingenu, kde pracoval na univerzitě až do své smrti. V Königsbergu se spřátelil s Hermannem Minkowskim. Jejich přátelství se odráželo také v matematické práci obou velikánů matematiky. Hilbert se věnoval algebře, funkcionální analýze (zavedl úplné nekonečně dimenzionální prostory se skalárním součinem, dnes nazývané Hilbertovy prostory), teorii čísel, ale také fyzice (obecné teorii relativity a matematické formulaci kvantové mechaniky). Na Mezinárodním matematickém kongresu v Paříži v roce 1900 ve své přednášce představil 23 zajímavých otevřených problémů, z nichž jsou některé otevřené dodnes. Ve dvacátých letech se snažil o formulování matematiky na pevných a úplných logických základech, což bylo kvůli Gödelovým výsledkům o neúplnosti odsouzeno k nezdaru. Mezi jeho studenty (měl téměř sedmdesát doktorandů) patřili například později světoznámí matematici F. Bernstein, H. Weyl, R. Courant či H. Steinhaus.

Otto Hölder (1859 Stuttgart–1937 Lipsko)

Německý matematik, studoval ve Stuttgartu a Berlíně, doktorát obhájil na univerzitě v Tübingenu. Působil v Tübingenu, Královci (Königsbergu) a od roku 1899 až do penzionování v Lipsku. Jeho jméno se pojí s Hölderovou nerovností, hölderovskou spojitostí a Hölderovými prostory funkcí. Dále se věnoval teorii grup. V roce 1933 podepsal „Bekenntnis der Professoren an den deutschen Universitäten und Hochschulen zu Adolf Hitler“.

Guillaume Feançois Antoine, Marquis de l'Hospital (1661 Paříž–1704 Paříž)

Francouzský matematik, markýz. Kvůli problémům se zrakem opustil vojenskou kariéru a věnoval se matematice, ke které měl zvláštní nadání. Jeho osobním učitelem byl Johann Bernoulli, který později souhlasil, že za roční poplatek 300 zlatých může l'Hospital publikovat Bernoulliho výsledky ve své knize *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, která se stala první učebnicí diferenciálního počtu na světě. Mimo jiné v ní bylo uvedeno tzv. l'Hospitalovo pravidlo. Po markýzově smrti začal Bernoulli bojovat za to, aby byl uznán za autora tohoto pravidla, což se dnes přijímá jako velmi pravděpodobné.

Christiaan Huygens (1629 Haag–1695 Haag)

Nizozemský fyzik, astronom mechanik a matematik. Studoval v Leidenu a Bredě. Velkou část života prožil v Paříži, stýkal se s nejslavnějšími vědci své doby (Descartes, Leibniz, Newton aj.). Díky zdokonalení dalekohledu objevil první Saturnův měsíc a Saturnovy prstence, sestrojil kyvadlové hodiny bez tlumení, věřil ve vlnový charakter světla (Huygensův princip). V matematice se především věnoval otázkám pohybu rotujících těles.

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 Postupim–1851 Berlín)

Německý matematik židovského původu. Studoval v Berlíně, kde také zahájil svou kariéru. Později se přesunul do Königsbergu, kde působil 15 let. Po zhroucení z přepracování a návštěvě Itálie se přestěhoval do Berlína, kde žil jako královský penzista. Zemřel na neštovice. Věnoval se teorii čísel a jako první ji studoval pomocí eliptických funkcí. Věnoval se také analytické mechanice, variačnímu počtu a diferenciálním rovnicím. S jeho jménem se pojí Jacobiho determinant, Hamilton–Jacobiho rovnice, či Jacobiho rovnice ve variačním počtu. Znovu zavedl také značení ∂ pro parciální derivaci.

Vojtěch Jarník (1897 Praha–1970 Praha)

Významný český matematik, studoval na Univerzitě Karlově, působil krátce na brněnské technice, poté nastoupil na Univerzitu Karlovu a s výjimkou pobytu na Univerzitě v Göttingenu (pracoval u E. Landaua) zde zůstal až do odchodu do penze v roce 1967. V roce 1952 byl jmenován akademikem. Věnoval se především teorii čísel. V české matematické komunitě se trvale zapsal svými učebnicemi diferenciálního a integrálního počtu. Byl také vynikající přednášející.

Dmitrij Fjodorovič Jegorov (1869 Moskva–1931 Kazaň)

Významný ruský a sovětský matematik, jehož jméno je spojeno s větou z teorie Lebesgueova integrálu. kromě analýzy se věnoval diferenciální geometrii (ovlivnil významně J.G. Darbouxe) a integrálním rovnicím. Vystudoval na moskevské univerzitě, po studiích pobýval v Paříži a Göttingenu. Působil na moskevské univerzitě a učil také na dvou gymnáziích. V roce 1923 byl zvolen prezidentem Moskevské matematické společnosti, když se ale postavil v roce 1929 na obranu ruské ortodoxní církve proti komunistické moci, byl zbaven práva učit. Byl zavřen do vězení, kde držel protestní hladovku, na jejíž následky později zemřel. Mezi jeho nejvýznamnější studenty patřil N. Luzin.

Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859 Nakskov–1925 Kodaň)

Dánský matematik, pracoval jako inženýr u kodaňské telefonní společnosti a matematice se věnoval ve svém volném čase. Je známý díky (Jensenově) nerovnosti pro konvexní funkce reálné proměnné a několika výsledkům v komplexní analýze (Jensenova formule a nerovnost).

Marie Ennemond Camille Jordan (1838 Lyon–1922 Paříž)

Francouzský matematik, studoval na École polytechnique, kde také později, spolu s Collège de France, působil. Přispěl do mnoha matematických oborů, topologie, algebry, teorie funkcí komplexní proměnné i teorie reálných funkcí. Vybudoval koncept míry, který byl předchůdcem Lebesgueovy míry (Jordanova míra) a s jeho jménem se pojí Jordanova věta o křivkách (dělení roviny na dvě části).

Leopold Kronecker (1823 Liegnitz (dnes Legnica)–1891 Berlín)

Německý matematik a logik. Představitel finitismu, uznával jen to, co se dá dokázat konečným počtem kroků pomocí přirozených čísel, odmítal důkaz sporem. Proto odmítal používat iracionální čísla, ta transcendentální dokonce dle něj vůbec neexistovala. Odmítal také pojem limity, nepřijal Weiestrassovu konstrukci spojité nikde nediferencovatelné funkce. Pocházel z bohaté židovské rodiny, jeho obchodní aktivity mu umožnili věnovat se matematice jako koníčku. Vystudoval v Berlíně, kde také po celý život působil. Věnoval se teorii čísel, eliptickým funkcím a vyšší algebře. Po odchodu svého učitele Kummera do důchodu nastoupil na jeho místo na berlínskou univerzitu. Zemřel pár měsíců po smrti své ženy. S jeho jménem se pojí několik vět v různých oblastech matematiky, ale také například Kroneckerovo delta.

Joseph-Louis Lagrange, comte de l'Empire (1736 Turín–1813 Paříž)

Francouzský matematik a fyzik italského původu. Vystudoval univerzitu v Turíně a na tamní univerzitě také působil. Na doporučení Eulera byl pozván do Berlína, kde působil 20 let. Na pozvání Ludvíka XVI. se přemístil do Paříže. Po francouzské revoluci přednášel na nově založených školách (École Normale Supérieur a École Polytechnique). Pohřben byl v Paříži v Panthéonu. Věnoval se především variačnímu počtu (Euler–Lagrangeovy rovnice) a je považován za jednoho z jejích zakladatelů. Jeho jméno nesou i Lagrangeovy multiplikátory (vázané extrémy funkcionálů). Dále se věnoval algebře (řešení polynomiálních rovnic vyšších stupňů), teorii čísel a nebeské mechanice.

Pierre-Simon, marquis de Laplace (1749 Beaumont-en-Auge–1827 Paříž)

Jeden z největších vědců všech dob, francouzský matematik, fyzik, filozof a politik. Vystudoval na univerzitě v Caen, v devatenácti letech odešel do Paříže, kde zpočátku podporoval J.-L. Lagrange. Podporoval nejprve Napoleona, který ho dokonce nakrátko věnoval ministrem vnitra, poté senátorem a udělil mu hraběcí titul. Po nástupu Bourbonů na trůn podporoval krále a získal titul markýze. Kvůli těmto a dalším politickým krokům ztratil v akademii věd všechny přátele. V matematice nese jeho jméno Laplaceův operátor, Laplaceova transformace, ale nejvíce je hodnoceno jeho pojetí teorie pravděpodobnosti, kde výrazně předběhl svou dobu. Ve fyzice se věnoval nebeské mechanice (studoval stability sluneční soustavy), zabýval se povrchovým napětím i termodynamikou plynů. Vyslovil také jako první hypotézu o existenci černých děr. Jeho jméno je mezi 72 osobnostmi zapsanými na Eiffelově věži v Paříži.

Henri Léon Lebesgue (1875 Beauvais–1941 Paříž)

Francouzský matematik, tvůrce teorie míry a integrálu. Studoval na École Normale Supérieure, poté učil na střední škole v Nancy. Na základě článku, ve kterém zobecnil Riemannovo pojetí integrálu, získal doktorát na univerzitě v Paříži. Působil na pařížské Sorbonně a na Collège de France, ale i na jiných školách. Kromě teorie míry a integrálu se dále věnoval Fourierově analýze, kde využil svou teorii integrálu k důkazu mnohých otevřených problémů. Posledních dvacet let života se věnoval spíše výuce a elementární geometrii.

Adrien-Marie Legendre (1752 Paříž–1833 Paříž)

Pocházel ze zámožné rodiny, studoval na pařížské univerzitě. Poté působil na École Militaire a od roku 1795 na École Normale Supérieure. Byl členem francouzské akademie věd, rok před smrtí se stal také čestným členem americké akademie věd. O svůj majetek přišel při francouzské revoluci. Z finančních problémů mu pomohl sňatek v roce 1793. V roce 1824 odmítl volit vládního kandidáta do Národního shromáždění a přišel o penzi. Zemřel v chudobě. Věnoval se eliptickým funkcím, jeho práce byla základem pro práci Abelovu. Zformuloval poprvé metodu nejmenších čtverců, kterou používal na výpočet drah komet. Zavedl Γ- a B-funkce, studoval teorii čísel i variační počet. S jeho jménem se pojí Legendreova transformace či Legendreovy polynomy.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 Lipsko–1716 Hannover)

Německý filozof, matematik, fyzik a teolog, považovaný za posledního opravdu univerzálního vědce. Studoval v Lipsku a Jeně. Odmítl profesorské místo, aby mohl být nezávislý, a pracoval jako diplomat a knihovník. Zasloužil se o zřízení první německé společnosti věd v Prusku, která se později přejmenovala na Královskou akademii věd. Jeho zásadním matematickým výsledkem je zavedení diferenciálního a integrálního kalkulu, ke kterému dospěl nezávisle ve stejné době jako I. Newton. Na rozdíl od I. Newtona pracoval s infinitezimálně malými veličinami, které později z analýzy odstranil K. Weierstrass; zpět je pak v souvislosti s tak zvanou nestandardní analýzou vrátil ve druhé polovině 20. století A. Robinson. Další jeho matematické výsledky se týkaly například řešení soustav lineárních rovnic (v podstatě zavedl Gaussovu eliminaci), nalezl číselnou řadu, která má součet π, na jeho výsledky o samopodobnosti navázal B. Mandelbrot při výsledcích týkajících se fraktální geometrie. Zkonstruoval také první mechanickou kalkulačku.

Beppo Levi (1875 Turín–1961 Rosario)

Italský a argentinský matematik, věnoval se především teorii míry (Leviho věta, Beppo Leviho definice Sobolevových prostorů) a teorii algebraických křivek a ploch. Studoval v Turíně. Působil na různých italských univerzitách, v roce 1928 získal profesorské místo v Bologni. Kvůli nástupu antisemitismu v Itálii odešel do Argentiny, kde i zemřel.

Elliott Hershel Lieb (1932 Boston–)

Americký matematik a fyzik, vystudoval na MIT a v Birminghamu, působil na různých univerzitách po celém světě, od roku 1975 je profesorem matematiky a fyziky na Princetonu. Věnuje se statistické mechanice, teorii pevných látek a funkcionální analýze.

Ernst Leonard Lindelöf (1870 Helsinki–1946 Helsinki)

Finský matematik, studoval i celý život působil na helsinské univerzitě. Jeho otec byl také matematik. Jeho jméno je spojeno s Picard–Lindelöfovou větou týkající se existence řešení pro obyčejné diferenciální rovnice. Věnoval se dále funkcím komplexní proměnné (Phragmén–Lindelöfův princip) a topologii (Lindelöfovy prostory).

Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832 Königsberg–1903 Bonn)

Německý matematik, studoval v Königsbergu, doktorát dokončil pod vedením L. Dirichleta v Berlíně. Působil v Berlíně, Vratislavi (Breslau), profesorské místo získal v Bonnu. Jeho studentem byl F. Klein. Věnoval se teorii čísel, Besselovým funkcím, Fourierovým řadám, obyčejným i parciálním diferenciálním rovnicím, nezávisle na Cliffordovi objevil Cliffordovu algebru. Jeho jméno je známé v souvislosti s lipschitzovsky spojitými funkcemi.

Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792 Nižnij Novgorod–1856 Kazaň)

Slavný ruský matematik, zakladatel neeuklidovské geometrie. Vystudoval na univerzitě v Kazani, kde pak celý život působil. Zabýval se především geometrií, zejména otázkou nezávislosti pátého Euklidova postulátu. Toto studium vedlo k objevu tzv. hyperbolické geometrie. Jako první také definoval pojem funkce jako zobrazení mezi dvěma obory reálných čísel. Tuto definici pak zpopularizoval L. Dirichlet. Jeho jméno nese též kondenzační kritérium konvergence číselných řad.

Nikolaj Nikolajevič Luzin (1883 Irkutsk–1950 Moskva)

Ruský a sovětský matematik, věnoval se teorii integrálu (Luzinova věta), deskriptivní teorii množin a teorii řízení. Vystudoval na moskevské univerzitě, pobýval na univerzitě v Göttingenu. Po návratu do Moskvy působil na univerzitě, kde se obklopil mladými studenty. Tato skupina byla nazývána „Luzitania“. V roce 1936 vypukla aféra „Luzin“. Skupina matematiků na moskevské univerzitě byla již počátkem třicátých let obviněna z kontrarevolučních myšlenek (Luzinův učitel Jegorov byl zavřen a brzy poté zemřel). V roce 1936 padlo obvinění na Luzina, nakonec vyústilo v odsouzení z plagiátorství svých studentů, Luzin musel odejít ze svých pracovních pozic, nebyl ale na rozdíl od mnohých jiných známých osob ani popraven ani odeslán do Gulagu.

Hermann Minkowski (1864 Alexotas, nyní Kaunas–1909 Göttingen)

Německý matematik židovského původu, vyrůstal v Königsbergu, kde studoval na univerzitě. Mezi jeho spolužáky byl i David Hilbert, se kterým se přátelil. Během studia strávil tři semestry v Berlíně. Po studiích působil v Bonnu, Königsbergu, Zürichu a Göttingenu. Věnoval se nejprve kvadratickým formám, poté teorii čísel a geometrii. Nedlouho před svou smrtí si uvědomil, že speciální teorie relativity se dobře formuluje v geometrii, která není eukleidovská. Zemřel náhle na zánět slepého střeva.

Eliakim Hastings Moore (1862 Marietta, OH–1932 Chicago, IL)

Americký matematik, vystudoval na univerzitě v Yale, poté pobýval v Berlíně. Po návratu do USA působil na své alma mater a na Northwestern University, po otevření University of Chicago 1892 se stal vedoucím katedry matematiky a pozici si udržel až do své smrti. Věnoval se algebře, geometrii i základům matematické analýzy. Jeho jméno se mimo jiné pojí s Moore–Osgoodovou větou.

Isaac Newton (1642 Woolsthorpe by Colsterworth–1727 Londýn)

Anglický fyzik, matematik, filozof a alchymista a teolog. Vystudoval na univerzitě v Cambridgi. V době, kdy byla uzavřena kvůli moru, na domácím statku přišel na teorii gravitace a vytvořil diferenciální počet. Jeho hlavní výsledky byly shrnuty v knize *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* vydané v roce 1687. Newtonovo jméno je také spojeno s numerickou metodou řešení nelineárních rovnic. Dále zobecnil binomickou větu na obecný (reálný) exponent. Jeho přínos fyzice je také obrovský, kromě teorie gravitace formuloval zákony mechaniky a věnoval se optice. Newton patřil nepochybně mezi ty vědce, kteří posunuli rozvoj vědy o největší krok kupředu.

William Fogg Osgood (1864 Boston, MA–1943 Belmont, MA)

Americký matematik, vystudoval univerzitu v Harvardu, poté odešel do Německa. Dva roky pracoval u F. Kleina v Göttingenu, poté odešel do Erlangenu, kde obhájil doktorát. Po návratu do USA působil na Harvardu, kde v letech 1918–1922 vedl katedru matematiky. Po odchodu do důchodu učil dva roky na Národní univerzitě v Pekingu. Věnoval se především funkcím komplexní proměnné a variačnímu počtu, jeho jméno se pojí s Moore–Osgoodovou větou.

Michail Vasiljevič Ostrogradskij (1801 Pašenivka, dnes Ukrajina–1862 Poltava, dnes Ukrajina)

Ruský matematik a fyzik ukrajinského původu, bohužel značně nedoceněný. Studoval na univerzitě v Charkově, ale studia nedokončil, protože jeho učitel byl kvůli ateismu vyhozen z univerzity a Ostrogradskij odmítl opakovat zkoušky. Studia dokončil v Paříži na Sorbonně. Zde se také setkal a pracoval s nejlepšími matematiky té doby. Po návratu do Ruska přesídlil do Petrohradu, kde působil na vojenské škole a byl také zvolen do akademikem. Věnoval se matematické analýze, podal první ucelený důkaz Věty o divergenci (dokonce dříve než Gauss, který navíc dokázal jen speciální případ) a nezávisle ne Greenovi dokázal i Greenovu větu. S jeho jménem se též pojí tzv. Ostrogradského metoda integrace racionálních funkcí. Věnoval se i variačnímu počtu a obyčejným diferenciálním rovnicím jakož i mechanice a termodynamice.

Giuseppe Peano (1858 Spinetta–1932 Turín)

Italský matematik, zakladatel matematické logiky a teorie množin. Jeho dílo *Formulario Mathematico* výrazně ovlivnilo B. Russella a A. Whiteheada při psaní *Principia Mathematica*. Většinu svého profesního života (včetně studií) strávil na univerzitě v Turíně. Jeho jméno je spjato s axiomy přirozených čísel, s křivkou vyplňující čtverec, s existenční větou pro obyčejné diferenciální rovnice, se tvarem zbytku pro Taylorův rozvoj a se tvarem zbytku pro numerické kvadraturní vzorce.

Charles Émile Picard (1856 Paříž–1941 Paříž)

Významný francouzský matematik, jeho jméno nesou věty z teorie funkcí komplexní proměnné i existenční věta pro obyčejné diferenciální rovnice. Vystudoval na École Normale Supérieure, byl nejlepším studentem ve svém ročníku. Kromě krátkého pobytu v Toulouse učil celý svůj život na různých pařížských univerzitách. Byl také členem Francouzské akademie věd.

Jules Henri Poincaré (1854 Nancy–1912 Paříž)

Významný francouzský matematik a fyzik, je považován za zakladatele algebraické topologie a teorie funkcí více komplexních proměnných, přispěl ale i do mnoha dalších oborů. Studoval na École Polytechnique a na École des Mines, doktorát obhájil na Sorbonně. Poté krátce působil na univerzitě v Caen, ale zanedlouho dostal nabídku ze Sorbonny, kde působil po zbytek svého života. Ve 32 letech byl zvolen do Francouzské akademie věd a v roce 1906 se stal jejím prezidentem. Věnoval se kvalitativní teorii diferenciálních rovnic, algebraické geometrii, teorii čísel. Zhruba ve stejné době jako Einstein dospěl k jisté verzi speciální teorie relativity, studoval elektromagnetismus a nebeskou mechaniku. Je autorem Poincarého hypotézy, která jako jediná ze sedmi úloh pro další milénium byla vyřešena (G. Perelmanem).

Joseph Ludwig Raabe (1801 Brody–1859 Curych)

Vystudoval na vídeňské polytechnice, působil v Curychu. Jeho jméno je známé díky kritériu konvergence číselných řad.

Jacopo Francesco Riccati (1676 Benátky–1754 Treviso)

Benátský matematik a právník. Studoval v Brescii a Padově. Díky majetku se mohl věnovat matematice jako koníčku, odmítl nabídky z Petrohradu, Vídně i Padovy. Jeho jméno je spojeno s názvem obyčejné diferenciální rovnice, jejichž řešení se věnoval.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 Breselenz–1866 Selasca)

Studoval v Göttingenu a Berlíně, působil v Göttingenu. Přispěl k mnoha oblastem matematiky. Je autorem neeukleidovské geometrie (tzv. Riemannova geometrie), výrazně ovlivnil komplexní analýzu (Cauchy–Riemannovy podmínky, Riemannova věta o konformním zobrazení), reálnou analýzu (Riemannův integrál), ale i teorii čísel (slavná Riemannova hypotéza). Zemřel poměrně mladý na tuberkulózu.

Michel Rolle (1652 Ambert–1719 Paříž)

Francouzský matematik, jeho jméno je spojeno s větou o střední hodnotě. Zpočátku vystupoval jako kritik infinitezimálního počtu, později jej přijal. Ve své knize *Traité d'Algèbre* poprvé v Evropě představil Gaussův eliminační algoritmus, zavedl označení $\sqrt[n]{\ }$ pro n-tou odmocninu a představil Eulerův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele dvou polynomů. Pracoval na Akademii věd jako „Pensionnaire Géometre“.

Arthur Sard (1909 New York–1980 Basilej)

Americký matematik, věnoval se diferenciální topologii. S jeho jménem se pojí Sardova věta, týkající se míry množiny kritických hodnot hladké funkce. Vystudoval na Harvardu, působil na několika amerických i evropských univerzitách.

Karl Hermann Amandus Schwarz (1843 Hermsdorf, dnes Jerzmanowa–1921 Berlín)

Německý matematik, za manželku měl dceru jiného slavného matematika Kummera (oponent jeho doktorské práce). Vystudoval v Berlíně, působil v Halle, Curychu, Göttingenu a v Berlíně. Věnoval se převážně komplexní analýze, jeho jméno je také spjato se slavnou nerovností, dnes nazývanou Cauchy–Schwarzovou.

Thomas Stieltjes (1856 Zwolle–1894 Toulouse)

Holandský matematik. Studoval na polytechnice v Delft, ale studium nedokončil. Teprve korespondence s Hermitem v době, kdy působil jako asistent na observatoři v Leidenu, ho opět přivedla k matematice. Získal čestný doktorát na univerzitě v Leidenu, teprve poté obhájil doktorát v Paříži a dostal profesorské místo v Toulouse. Věnoval se teorii čísel a nekonečným zlomkům, slavným se stal díky zobecnění Riemannova integrálu (Riemann–Stieltjesův integrál).

George Gabriel Stokes (1819 Skreen–1903 Cambridge)

Irsko-anglický fyzik a matematik. Vystudoval na univerzitě v Cambridge, kde také po zbytek života působil. Věnoval se hydrodynamice (Navier–Stokesovy rovnice nesou jeho jméno, i když byl až čtvrtý, kdo je odvodil), dále optice, kde vysvětlil fluorescenci a studoval polarizaci světla, dále studoval vztah mezi chemickým složením a optickými vlastnostmi látek. V matematice nese jeho jméno Stokesova věta (udávající vztah mezi plošným integrálem a křivkovým integrálem přes okraj této křivky) a zobecněná Stokesova věta z teorie integrace diferenciálních forem.

James Joseph Sylvester (1814 Londýn–1897 Londýn)

Anglický matematik židovského původu. Studoval v Londýně a Cambridgi, kvůli svému původu ale nemohl studia dokončit. Krátce působil v USA, pak se vrátil do Londýna a věnoval se pojišťovnictví. K matematice se vrátil po roce 1855, kdy se stal profesorem matematiky na Královské vojenské akademii ve Woolwichi. Byl druhým prezidentem Londýnské matematické společnosti, byl zvolen i do francouzské Královské akademie věd. V roce 1877 přijal místo na Univerzitě Johna Hopkinse v Baltimore, kde založil první americký matematický časopis. Později nastoupil do Oxfordu a poslední roky života strávil v Londýně. Věnoval se především lineární algebře (Sylvestrovo kritérium), spolu s Cayleym je považován za zakladatele teorie invariantů. Výrazně přispěl i do teorie čísel a eliptických funkcí.

Alfred Tarski (1901 Varšava–1983 Berkeley, CA)

Polsko-americký matematik a logik. Původní jméno Teitelbaum si změnil patrně z důvodu, aby zastřel svůj židovský původ. Matematiku vystudoval ve Varšavě, kde také později působil. Shodou okolností se mu podařilo odjet těsně před německo-ruskou okupací Polska do USA, kde zůstal po zbytek života; působil na univerzitě v Berkeley. Jeho výsledky se týkaly především algebry, geometrie a logiky. Známý je především Banach–Tarského paradox, kdy na základě axiomu výběru lze „zdvojit kouli“.

Brook Taylor (1685 Edmonton–1731 Londýn)

Anglický matematik, člen a později sekretář Královské vědecké společnosti. Místo infinitezimálně malých veličin pracoval s konečnými veličinami, což je základem slavné Taylorově věty a Taylorových rozvojů. Byl také členem komise, která rozhodovala o prvenství Newtona či Leibnize při vytvoření diferenciálního počtu.

Heinrich Franz Friedrich Tietze (1880 Schleinz–1950 Mnichov)

Rakouský matematik, známý svou větou o rozšíření funkcí z topologického prostoru do reálných funkcí. Studoval ve Vídni, působil v Brně, Erlangenu a Mnichově.

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735 Paříž–1796 Paříž)

Francouzský hudebník, chemik a matematik. Byl houslistou, matematice se věnoval až později. S jeho jménem se pojí jeden determinant, zdá se ale, že to je spíše omylem. Byl členem Královské akademie věd, učil na École Normale Supérieure. Věnoval se kombinatorice a teorii determinantů.

François Viète (1540 Fontenay-le-Comte–1603 Paříž)

Francouzský matematik, autor algebraické notace, která se prakticky používá dodnes. Působil na francouzském dvoře jako poradce, věnoval se šifrování a prolomil tajný španělský kód.

Giuseppe Vitali (1875 Ravenna–1932 Bologna)

Italský matematik, známý svými výsledky v matematické analýze. Studoval v Bologni a Pise. Působil na různých univerzitách v Itálii (Parma, Modena, Padova), až nakonec získal profesorské místo v Bologni. Je znám svým příkladem neměřitelné podmnožiny reálných čísel, Vitaliho pokrývací větou či zobecněním Lebesgueovy věty o konvergenci (Vitaliho věta o konvergenci). Na konci života měl vážné zdravotní problémy, zemřel cestou z přednášky.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 Ostenfelde–1897 Berlín)

Německý matematik, měl velký vliv na formování matematické analýzy. Studoval na univerzitě v Bonnu (právo, finance a ekonomii), kvůli lásce k matematice studia nedokončil a vystudoval univerzitu v Münsteru. Poté několik let učil na střední škole, ale po publikování výsledků o abelovských funkcích obdržel čestný doktorát na univerzitě v Königsbergu a získal místo na univerzitě ve Vratislavi (Breslau). Poté působil na Gewerbeinstitutu (dnes Technická univerzita Berlín) a na Univerzitě Friedricha-Wilhelma (dnes Univerzita Humboldtova) v Berlíně. Zavedl tzv. ε-δ gymnastiku v definicích limit funkcí a spojitosti, čímž zmodernizoval výklad základů analýzy. Dokázal mnoho vět, které se dnes přednáší v základních kurzech analýzy funkcí jedné reálné proměnné (například větu o nabývání extrému spojitou funkcí na omezených uzavřených intervalech). Dále studoval stejnoměrnou konvergenci posloupností funkcí, analytické prodloužení funkcí i variační počet. Zkonstruoval také funkci, která je na celé reálné ose spojitá, ale není diferencovatelná v žádném bodě.

Jozéf-Maria Hoëné de Wroński (1776 Wolsztyn–1853 Neuilly-sur-Seine)

Polský filozof, matematik a fyzik, právník a ekonom. Jeho rodiče byli českého původu, i když žili v Polsku. Jako voják se zúčastnil Kościuszkova povstání, poté studoval na různých univerzitách v Německu a v Marseille. Působil na hvězdárně v Marseille, kterou musel opustit po publikaci svého díla, které se ukázalo být plné nesmyslů. To platí o mnohých jeho dílech, včetně toho, které obsahovalo determinant, který nese jeho jméno. Dnes je oceňována jeho metafyzika.

William Henry Young (1863 Londýn–1942 Lausanne)

Anglický matematik, pracoval v matematické analýze. Vystudoval v Cambridgi, kde se seznámil se svou budoucí žnou, matematičkou Grace Chisholm (Young). Společně s ní napsal mnoho článků a knih. Působil v Cambridgi, na University of London, v Kalkatě a na welšské universitě v Aberystwyth. Hodně cestoval, během druhé světové války se ocitl v Lausanne, odkud nemohl vycestovat a zemřel odloučen od rodiny. Věnoval se matematické analýze, zejména teorii integrálu (nezávisle na Lebesgueovi přišel s jinak formulovanou, ale prakticky ekvivalentní definicí integrálu), věnoval se fourierovské analýze (především teorii Fourierových řad). V letech 1929–1935 byl prezidentem IMU (International Mathematical Union). S jeho jménem se pojí dvě nerovnosti (jedna pro součin čísel, druhá pro konvoluce), Hausdorff–Youngova nerovnost pro Fourierovu transformaci a věta o záměně pořadí derivování pro hladké funkce.

Max August Zorn (1906 Krefeld–1993 Bloomington)

Německo–americký matematik, věnoval se algebře, teorii grup a numerické analýze. Studoval v Hamburgu, působil v Halle, na univerzitě v Yale, na UCLA a v Bloomingtonu. Je po něm pojmenováno tvrzení ekvivalentní axiomu výběru (Zornovo lemma), které dokázal nezávisle na předchozím důkazu.

Antoni Zygmund (1900 Varšava–1992 Chicago)

Polsko–americký matematik, věnoval se především harmonické analýze. Studoval na univerzitě ve Varšavě, kde poté i působil, stejně jako na varšavské polytechnice. Po deseti letech ve Vilniusu se přestěhoval do USA, kde pracoval na univerzitě v Chicagu. Jeho kniha *Trigonometric series*, ač poprvé vyšla v roce 1935, stále patří mezi klasické knihy harmonické analýzy.

Rejstřík

σ-algebra, 28

B
Banach–Tarského paradox, 28
borelovské třídy, 64

C
Cantorovo diskontinuum, 44, 254
Cantorovo diskontinuum kladné míry, 44
Carathéodoryho kritérium měřitelnosti, 38, 49
Cauchy–Binetovy formule, 172

D
difeomorfizmus, 224
diferenciální forma, 213
  exaktní, 216
  integrál, 223
    plošný prvního druhu, 233
    přes orientovanou plochu, 231
    přes zobecněnou plochu dimenze k, 231
  k-tého řádu, 214
  přenos, 219
  uzavřená, 216
Dynkinův systém, 91

E
esenciální supremum, 122

F
funkce
  B, 85
  borelovská, 53
  Cantorova, 49
  Dirichletova, 28, 56
  ekvivalentní, 56
  Γ, 85
  jednoduchá, 58
  konvoluce, 140
  měřitelná, 53
    lebesgueovsky, 53
  nosič, 136
  numerická, 53
  reprezentant, 124
  zhlazení, 139

H
Hausdorffova dimenze, 253
hölderovsky sdružený exponent, 127
hustota míry, 71

I
integrovatelná majoranta, 76
interpolační nerovnost pro Lebesgueovy prostory, 130

K
konvergence
  bodová
    posloupnosti funkcí, 2
    řady funkcí, 2
  stejnoměrná
    posloupnosti funkcí, 1
    řady funkcí, 1
    stejně, 10
  stejnoměrná lokálně
    posloupnosti funkcí, 4
k-plocha
  zobecněná, 177
k-rovnoběžnostěn, 168
k-rozměrný plošný obsah, 178
křivka, 152
  jednoduchá, 152

Jordanova, 152
opačná, 153
Peanova, 228
součet, 153
uzavřená, 152
křivkový integrál
druhého druhu, 154
nezávislost na cestě, 160
linearita, 155
prvního druhu, 154
přes součet křivek, 155
k-vektor, 210

L
Lebesgueův bod, 142
Lebesgueův integrál
linearita pro nezáporné funkce, 69
linearita pro obecné funkce, 72
ve smyslu hlavní hodnoty, 114
z nezáporné funkce, 65
z obecné funkce, 71
zobecněný, 111
lemma
Brezis–Liebovo, 147
Fatouovo, 69
Poincarého, 216
Luzinova vlastnost, 103

M
matice
Gramova, 165
míra, 31
aritmetická, 31
Diracova, 31, 49
Hausdorffova s-rozměrná, 248
vnější, 248
konečná, 31
σ-konečná, 31
Lebesgueova, 38
Lebesgue–Stieltjesova, 48
pravděpodobnostní, 31
úplná, 31
vnější
Lebesgueova, 36
vnější Lebesgue–Stieltjesova, 49
množina
borelovská, 30
jednoduše souvislá, 196
lebesgueovsky měřitelná, 38
lebesgueovsky neměřitelná, 43, 46
průměr, 248
typu F_σ, 30
typu G_δ, 30

N
nerovnost
Cauchy–Schwarzova, 128
Čebyševova, 67
Hölderova, 126
zobecněná, 132
Jensenova, 118
Minkowského, 127
Youngova, 126
neseparabilita $L^\infty(\Omega)$, 138

O
operátor
divergence, 184
Hardy–Littlewoodův maximální, 141
Laplaceův, 187
rotace, 192

P
parametrizace
regulární, 224
souhlasně orientovaná, 224
plocha
dimenze k
regulární, 227
zobecněná, 231
dimenze nejvýše k, 227
jednoduchá, 162
k-plocha, 162
orientovaná dimenze k, 229
plošný integrál
druhého druhu, 185
prvního druhu, 165
přes zobecněnou k-plochu, 178
prostor
Lebesgueův, 123
měřitelný, 31

R
regularizátor, 139
rozklad plochy, 231
kladně orientovaný, 231

Ř
řetězec, 235
odpovídající hranici, 235

S
separabilita $L^p(\Omega)$, 138
skalární součin se signaturou, 233
skoro všude (s.v.), 35
spojitost
absolutní, 75
spojitost normy Lebesgueových prostorů vůči exponentu, 129
stejná integrovatelnost, 117

T
tečná rovina, 171
tečný prostor, 171
tvrzení
charakterizace stejnoměrné konvergence, 3

V
vektorový součin, 171
věta
Abelova, 12
Abelovo kritérium stejnoměrné konvergence, 10
Borelova pokrývací, 37
Diniho, 15
Dirichletovo kritérium stejnoměrné konvergence, 10
Fubiniho, 87
Gauss–Ostrogradského, 182
Greenova, 191
Hardy–Littlewoodova, 141
charakterizace lebesgueovské měřitelnosti množiny, 47
Jegorovova, 62
Jordanova, 190
Lebesgue–Hausdorffova, 65
Lebesgueova o hustotě, 107, 143
Lebesgueova o majorizované konvergenci, 75
zobecněná, 116
Lebesgueova o monotonní konvergenci, 67, 75
Leibnizovo kritérium stejnoměrné konvergence, 10
Leviho, 68
Luzinova, 62
Moore–Osgoodova, 13
nutná podmínka stejnoměrné konvergence, 6
o absolutní spojitosti integrálu, 74
o aproximaci lebesgueovsky měřitelných funkcí spojitými, 59
o aproximaci měřitelných funkcí jednoduchými, 59
o derivaci integrálu podle parametru, 80
o divergenci, 185
o dvou třídách regulárních parametrizací, 229
o existenci potenciálu v $\mathbb{R}^2$, 197
o existenci potenciálu v $\mathbb{R}^3$, 197
o hausdorffovské měřitelnosti borelovských množin, 251
o hustých podmnožinách Lebesgueových prostorů, 136
o integraci per partes, 188
o integrálech závislých na parametru pro zobecněný Lebesgueův integrál, 112
o invariantnosti Lebesgueovy míry vůči posunutí, 43
o korektnosti definice Lebesgueovy míry, 38
o Lebesgueově míře roztažené množiny, 43
o lebesgueovské měřitelnosti intervalů, 42
o lebesgueovské měřitelnosti otevřených množin, 41
o lebesgueovské měřitelnosti spojité funkce, 57
o Lebesgueových bodech, 142

o limitě integrálu závislého na parametru, 80
o měřitelnosti bodové limity měřitelných funkcí, 56
o měřitelnosti ekvivalentních funkcí, 56
o měřitelnosti složené funkce, 57
o míře s hustotou pro nezáporné funkce, 70
o nezávislosti křivkového integrálu na parametrizaci, 156
o nezávislosti na parametrizaci
pro integrál z diferenciální formy, 226
o plošném obsahu k-rovnoběžnostěnu, 168
o rotační invarianci Lebesgueovy míry, 102
o spojitosti integrálu závislého na parametru, 79
o substituci, 97
o úplnosti Lebesgueovy míry, 42
o úplnosti Lebesgueových prostorů, 134
o výpočtu křivkového integrálu pomocí potenciálu, 159
o vztahu determinantu a Lebesgueovy míry rovnoběžnostěnu, 103
o vztahu Hausdorffovy a Lebesgueovy míry, 251
o vztahu Newtonova a Lebesgueova integrálu, 78
o vztahu nezávislosti na cestě a existence potenciálu, 160
o vztahu nulovosti funkce a nulovosti integrálu, 74
o vztahu Riemannova a Lebesgueova integrálu, 77
o vztahu stejnoměrné konvergence a derivace, 19
o záměně stejnoměrné limity a Riemannova integrálu, 16
o zhlazení funkcí, 140
o zúplnění míry, 33
pokrývací
Vitaliho, 140
Sardova, 106
Stokesova, 192
zobecněná, 237
Tietzeho, 63
Vitaliho o pokrytí, 99
Vitaliho o stejně integrovatelných funkcích, 117
Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence, 7
vnější algebra, 209
vnější diferenciál, 214
vnější normálový vektor, 181
vnoření Lebesgueových prostorů, 128