Matematická analýza NMTM101, ZS 22/23, cvičení s L. Krumpem

Cvičení č. 10: Nekonečné řady II

Ještě jedno kritérium absolutní konvergence

Limitní Raabeho kritérium: nechť $a_n \geq 0$ pro všechna n. Jestliže $L = \lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Je-li tato $L < 1$, řada diverguje.

Jedno kritérium neabsolutní konvergence

Leibnizovo kritérium: jestliže posloupnost $\{a_n\}$ jde monotónně k nule (tj. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a posloupnost je monotónní), pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje.

Vyšetření absolutní a neabsolutní konvergence

Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pokud konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje (pak totiž konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$).

Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně, pokud konverguje, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje.

Pokud řada nemění znaménka, připadá v úvahu pouze absolutní konvergence (protože $|a_n| = a_n$, případně $|a_n| = -a_n$), používáme tedy kritéria absolutní konvergence (= pro řady s nezápornými členy).

Pokud řada mění znaménka (je to tzv. alternující řada), použijeme kritérium neabsolutní konvergence (zatím jen Leibnizovo) na rozhodnutí, zda konverguje. Dále potřebujeme rozhodnout, zda konverguje absolutně nebo neabsolutně, proto použijeme některé kritérium absolutní konvergence na řadu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Někdy také můžeme postupovat opačně: nejprve vyšetříme absolutní konvergenci, pokud tato platí, pak jsme hotovi, a pokud ne, vyšetřujeme ještě konvergenci původní řady.

1. Vyšetřete konvergenci řad:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\dots(2+\sqrt{n})}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\dots(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\dots 3n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\dots(2n+1)^2}{6^2\cdot 8^2\cdot 10^2\dots(2n+4)^2}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot 7\cdot 10\dots(3n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots n} x^n,\ x > 0$

2. Vyšetřete absolutní/neabsolutní konvergenci řad:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(n+1)^3}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n+1}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n2^n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n+(-1)^n}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3^{n-1}}{2^{2n+1}}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$

Řešení:

1. (Konverguje/Diverguje) (a) K; (b) D; (c) K; (d) K pro $x < \frac{1}{3}$, D pro $x \geq \frac{1}{3}$;

2. (Konverguje Absolutně/Konverguje Neabsolutně/Diverguje) (a) KN; (b) KN; (c) KN; (d) KA; (e) D; (f) KA; (g) KN; (h) KA; (i) KN.