Matematická analýza NMTM101, ZS 22/23, cvičení s L. Krumpem

Cvičení č. 6: Limity funkcí II

Pomůcka („známé limity“):

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Věta o limitě složené funkce:

Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$ a $\lim\limits_{y\to a} f(y) = b$ a dále nechť platí jedna ze dvou podmínek:
(a) funkce f je spojitá v bodě a,
(b) existuje okolí bodu x_0, na němž platí: $x \neq x_0 \implies g(x) \neq a$.
Pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = b$.

1. Vypočtěte limity:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-e^{5x}}{\sin 3x}$

(b) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{x-a}$, $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{1-\cos x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{1-x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$

Řešení:

1. (a) $-\frac{5}{3}$; (b) $\frac{1}{\cos^2 a}$; (c) $+\infty$; (d) $\frac{1}{2}$; (e) π; (f) 1; (g) $\frac{a^2}{b^2}$; (h) $\sqrt{2}$.