

Cvičení č. 8: Limity funkcí IV

„Dělení kladnou/zápornou nulou“ pro limity typu $\frac{a}{0}$:

Je-li $x_0 \in \mathbb{R}$ a platí-li:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} p(x) = a \neq 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} q(x) = 0;$$

na nějakém okolí bodu x_0 je $x > x_0 \implies q(x) > 0$;

$$\text{pak } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a}{0^+} = a \cdot (+\infty).$$

1. Vypočtete limity:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2+2x+1}{x-3}, \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2+2x+1}{x-3}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-3x+1}{2-x}, \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-3x+1}{2-x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-3}{x^2-5x+4}, \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-3}{x^2-5x+4}, \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-3}{x^2-5x+4}, \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-3}{x^2-5x+4}$$

Limity ve tvaru exponenciály:

Kromě již známých nedefinovaných výrazů

$$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{a}{0}$$

jsou nedefinovány také výrazy

$$0^0, \infty^0, 1^\infty.$$

Limity tohoto typu převádíme na exponenciálu s využitím věty o limitě složené funkce:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\left[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x) \right]},$$

pokud limita v exponentu vpravo existuje.

2. Vypočtete limity:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$$

- (d) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cotg \pi x}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\cotg \pi x}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tg x)^{\tg 2x}$
- (h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x^\alpha}{\sin \pi x^\beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$
- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$
- (j) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}, a > 0$
- (k) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$
- (l) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{\frac{1}{x}}, a, b > 0$

Řešení:

1. (a) $+\infty, -\infty$; (b) $+\infty, -\infty$; (c) $-\infty, +\infty, -\infty, +\infty$.

2. (a) e ; (b) 1 ; (c) \sqrt{e} ; (d) $\frac{1}{e}$; (e) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; (f) 1 ; (g) $\frac{1}{e}$; (h) $\frac{\alpha}{\beta}$; (i) 1 ; (j) $a^a(\ln a - 1)$; (k) $\frac{2}{3}$; (l) $\frac{1}{\sqrt{ab}}$.