Cvičení č. 8: Limity funkcí IV – Řešení některých příkladů

Vypočtěte limity:

(2h) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin \pi x^\alpha}{\sin \pi x^\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$

(2j) $\lim\limits_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x-a}$, $a > 0$

Než ukážeme řešení jednotlivých příkladů, nejprve si uvědomme, že pro každé $a > 0$, $a \neq 1$ platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \ln a = \ln a.$$

To plyne z věty o limitě složené funkce a ze známé limity

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1,$$

kde za y dosazujeme $x \ln a$.

Dále budeme potřebovat znát limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^a - 1}{x - 1}.$$

Její výpočet se liší podle toho, zda je a přirozené číslo či nikoli. Pro a přirozené rozložíme výraz $x^a - 1 = (x-1)(x^{a-1} + x^{a-2} + \cdots + x + 1)$, přičemž dlouhý výraz má přesně a sčítanců, takže pouhým dosazením dostáváme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^a - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} (x^{a-1} + x^{a-2} + \cdots + x + 1) = a.$$

Pro ostatní reálné hodnoty a tento rozklad není možný, místo konečné sumy vyjde nekonečný součet a situace se tak výrazně zkomplikuje. Tato limita se nedá dopočítat tímto elementárním způsobem a budeme to umět až v budoucnu pomocí L'Hospitalova pravidla nebo Taylorových polynomů. Nicméně výsledek bude opět roven číslu a. Omlouvám se tedy za nevhodné zadání, můžete si je tedy opravit tak, že čísla α, β v příkladu (2h) a a v příkladu (2j) jsou přirozená a pak to vše projde hladce.

A nyní už k řešením jednotlivých příkladů:

(2h)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x^\alpha}{\sin \pi x^\beta} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x^\alpha - \pi + \pi)}{\sin(\pi x^\beta - \pi + \pi)} = \lim_{x\to 1} \frac{-\sin(\pi(x^\alpha - 1))}{-\sin(\pi(x^\beta - 1))} = \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi(x^\alpha - 1))}{\pi(x^\alpha - 1)} \frac{\pi(x^\alpha - 1)}{\pi(x^\beta - 1)} \frac{\pi(x^\beta - 1)}{\sin(\pi(x^\beta - 1))} = \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x - 1} \lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{x^\beta - 1} = \boxed{\frac{\alpha}{\beta}}
\end{aligned}$$

(2j)

Zadanou limitu upravíme takto:

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^x-a^a+a^a-x^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^a(a^{x-a}-1)}{x-a}-\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}=L_1-L_2.$$

Dále spočteme pomocí VoLSF a substituce $y=x-a$

$$L_1=\lim_{x\to a}\frac{a^a(a^{x-a}-1)}{x-a}=\lim_{y\to 0}\frac{a^a(a^y-1)}{y}=a^a\ln a.$$

Podobně

$$L_2=\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^a(\frac{x^a}{a^a}-1)}{a(\frac{x}{a}-1)}=\frac{a^a}{a}\lim_{y\to 1}\frac{y^a-1}{y-1}=\frac{a^a}{a}a=a^a,$$

kde jsme v posledním řádku použili VoLSF se substitucí $y=\frac{x}{a}$. Výsledná limita je tedy $L_1-L_2=\boxed{a^a(\ln a-1)}$