Matematická analýza NMTM101, ZS 22/23, cvičení s L. Krumpem

Cvičení č. 9: Nekonečné řady I

Známé řady

Geometrická řada: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konverguje právě když $q \in (-1, 1)$; pak má součet $\frac{1}{1-q}$.

Teleskopická řada: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Harmonická řada: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje pro každé $p \in \mathbb{R},\ p > 1$, a diverguje pro každé $p \in \mathbb{R},\ p \leq 1$.

Kritéria konvergence řad s nezápornými členy (tzv. absolutní konvergence)

Nutná podmínka konvergence řady: řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (Platí pro jakoukoli řadu, nemusí mít nezáporné členy).

Srovnávací kritérium: jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq b_n$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Limitní srovnávací kritérium: jestliže $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}_+$ (tedy limita je konečné nenulové číslo), pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

Cauchyho odmocninové kritérium: jestliže existuje q takové, že $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Limitní Cauchyho odmocninové krit.: jestliže $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pokud je tato limita větší než 1, pak řada diverguje.

D'Alembertovo podílové kritérium: jestliže existuje q takové, že $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Limitní D'Alembertovo podílové krit.: jestliže $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pokud je tato limita větší než 1, pak řada diverguje.

Pomůcka (porovnání logaritmu, mocniny, exponenciály a faktoriálu):

$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0$ pro $a > 0\ (a \neq 1), k \in \mathbb{R}_+$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ pro $a > 1, k \in \mathbb{R}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ pro $a \in \mathbb{R}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro $a > 0$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$, $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$ pro $x \in \mathbb{R}$

1. Vyšetřete konvergenci řad:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+4}{n^2+3n+7}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(3n+1)3^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{(n+1)^4}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{4n^2+n+3}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+3}{4n-7}\right)^n$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)\cdot 3^n}{n!}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+4)\cdot 2^n}{3^{n+2}}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n^2+2n-1}}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{2^n}}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{3^{n+1}}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{\sqrt{n^5+1}}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{2^n}}$

(o) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}}{n^2}$

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$

(q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Řešení (Konverguje/Diverguje):

1. (a) D; (b) K; (c) D; (d) D; (e) K; (f) K; (g) K; (h) D; (i) D; (j) K; (k) K; (l) K; (m) K; (n) K; (o) D; (p) D; (q) K.