Sada příkladů 1/2

Newtonův a Riemannův integrál

Aplikace integrálu

Spočtěte obsahy části rovin, omezené následujícími křivkami

1. $y = x^2$, $x + y = 2$
2. $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$
3. $y = |\ln x|$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 10$
4. $xy = 4$, $x + y = 5$
5. $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.
6. Nalezněte obsah elipsy s poloosami a, b.
7. Nalezněte obsah oblasti ohraničené kardioidou $r = a(1 + \cos\varphi)$, $a > 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
8. Nalezněte obsah oblasti ohraničené lemniskátou $r = 4\sin^2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
9. Nalezněte obsah oblasti ohraničené $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.
10. Odvoďte vztahy pro objem koule, kuželu, jehlanu.
11. Spočtěte objem tělesa vzniklého rotací oblouku kardioidy $r = a(1 + \cos\varphi)$, $\varphi \in (0, \pi)$ kolem osy x.
12. Spočtěte objem části tělesa $x^2 + 4y^2 \leq a^2$ ležícího mezi rovinami $z = 0$ a $y = z$.
13. Odvoďte vztah pro délku kružnice.
14. Spočtěte délku křivky $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$, $x \in (-1, 1)$.
15. Spočtěte délku evolventy kruhu $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

16. Odvoďte vzorec pro povrch koule.

17. Nalezněte povrch rotačního tělesa vzniklého rotací křivky $y = x^3$, $|x| \leq 1$ kolem osy x.

18. Nalezněte polohu těžiště homogenního čtvrtkruhu o poloměru r.

19. Nalezněte polohu těžiště poloviny homogenní asteroidy $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, \pi]$.

20. Nalezněte polohu těžiště homogenní polokoule $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $x > 0$.

21. Určete moment setrvačnosti oblouku asteroidy (viz výše, $t \in [0, \pi/2]$) vzhledem k souřadnicovým osám.

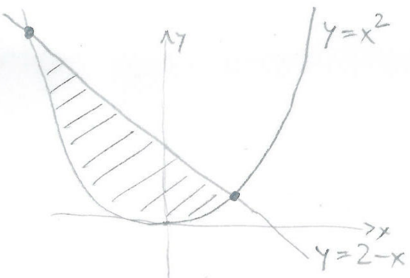
22. Přímočarý pohyb tělesa je daný funkcí $s = ct^3$, kde $s(t)$ je délka dráhy za čas t. Odpor prostředí je úměrný čtverci rychlosti. Vypočítejte práci, kterou vykonají třecí síly, pokud těleso projde dráhu od $s = 0$ do $s = a$.

23. Při průchodu radioaktivního záření vrstvou látky o tloušťce h poklesla jeho intenzita na polovinu původní hodnoty. Jaká bude intenzita tohoto záření po průchodu vrstvou o tloušťce H? (Úlohu řešte za předpokladu, že intenzita záření absorbovaného tenkou vrstvou látky je přímo uměrná tloušťce vrstvy a intenzitě dopadajícího záření).

Aplikace integrálu

Vzorce na výpočet: viz přiložený soubor

1)



Průsečíky grafů: $x^2=2-x \Rightarrow x=1,\ x=-2$

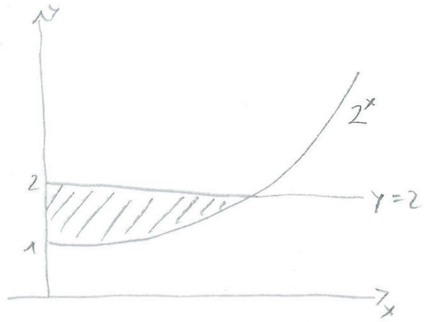
$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$y=1 \qquad y=4$

$$S=\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)\,dx=\left[2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1}=2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\left(-4-\frac{4}{2}-\left(-\frac{8}{3}\right)\right)$$

$$=\underline{\underline{9/2}}$$

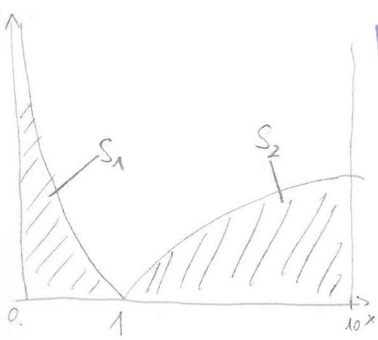
2)



Průsečíky: $2^x=2 \Rightarrow x=1$

$$S=\int_0^1(2-2^x)\,dx=\left[2x-\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1=\left(2-\frac{2}{\ln 2}\right)-\left(-\frac{1}{\ln 2}\right)=\underline{\underline{2-\frac{1}{\ln 2}}}$$

3)



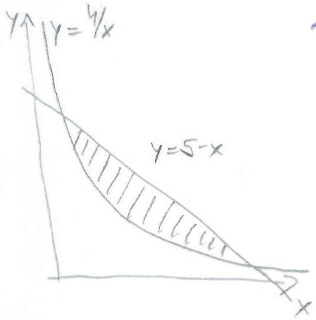
Není potřeba hledat průsečíky $\quad S=S_1+S_2$

$$S_1=\int_0^1 -\ln x\,dx=-\left[x\ln x-x\right]_0^1=(0-0)-(0-1)=1$$

$$S_2=\int_1^{10}\ln x\,dx=\left[x\ln x-x\right]_1^{10}=10(\ln 10-1)-(0-1)=10\ln 10-9$$

$$S=S_1+S_2=\underline{\underline{10\ln 10-8}}$$

4)

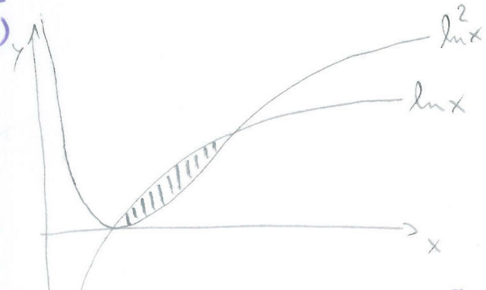


Průsečíky: $\frac{4}{x}=5-x \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=1,\ x=4$

$$S=\int_1^4\left[5-x-\frac{4}{x}\right]dx=\left[5x-\frac{x^2}{2}-4\ln x\right]_1^4=(20-8-4\ln 4)-\left(5-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\underline{\underline{\frac{15}{2}-4\ln 4}}$$

5)



Průsečíky: Očividně $x=1$ a $x=e$, tj. $\ln x=1$

$$S=\int_1^e \ln x-\ln^2 x\,dx$$

Potřebujeme $\int \ln^2 x\,dx=\left|\begin{matrix} f'=1 & g=\ln^2 x \\ f=x & g'=\frac{2\ln x}{x}\end{matrix}\right|$

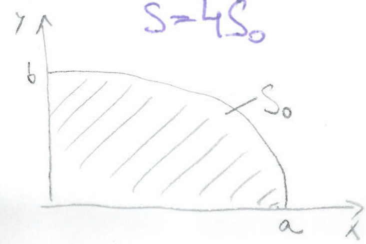
$=x\ln^2 x-\int 2\ln x$

$=x\ln^2 x-2\cdot(x\ln x-x)$

Odtud už $S=\left[x\ln x-x-x\ln^2 x+2x\ln x-2x\right]_1^e$

$$=\left[3x\ln x-3x-x\ln^2 x\right]_1^e=3e-3e-e-(-3)=\underline{\underline{3-e}}$$

6) $S = 4S_0$



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Umíme zintegrovat, ale není to kdovíjak lehká práce. Zkusíme jinak.

Parametricky: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $\quad t \in (0, \pi/2)$

Tedy dle vzorců $\varphi(t) = a\cos t$, $\psi(t) = b\sin t$. Očividně projde, i když φ je klesající.

$$S_0 = \int_0^{\pi/2} b\sin t \cdot |-a\sin t|\, dt = \int_0^{\pi/2} ab\sin^2 t\, dt = ab \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\, dt = ab \cdot \left([-\sin t\cos t]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt \right)$$

$$= ab \cdot \int_0^{\pi/2} 1 - \sin^2 t\, dt = \frac{ab\pi}{2} - S_0 \Rightarrow S_0 = \frac{ab\pi}{4} \Rightarrow \underline{\underline{S = \pi ab}}$$

---

7) Zadání přímo odpovídá tomu, co je v přiložených vzorcích. Proto

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a(1+\cos\varphi))^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \underbrace{1 + 2\cos\varphi}_{I_1} + \underbrace{\cos^2\varphi}_{I_2}\, d\varphi$$

$$I_1 = [\varphi + 2\sin\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\varphi)+1}{2}\, d\varphi = \left[\frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$S = \frac{a^2}{2} \cdot 3\pi = \underline{\underline{\frac{3}{2}\pi a^2}}$$

---

8) DÚ

---

9) Vyjádříme křivku v polárních souřadnicích: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ $\quad \varphi \in (0, 2\pi)$, $r > 0$

Odtud $r^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) = r^2$

$$r = \frac{1}{\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}} \quad \text{a proto} \quad S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}\, d\varphi$$

$\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$

$$\Rightarrow \sin^4\varphi = 1 - 2\cos^2\varphi + \cos^4\varphi \Rightarrow S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2\cos^2\varphi + 2\cos^4\varphi}\, d\varphi$$

Navíc $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

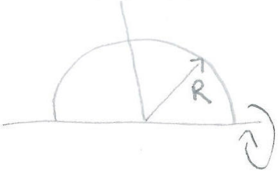
a $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = 4 \cdot (2\cos^4 x - 2\cos^2 x + \frac{1}{4}) \Rightarrow S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{4}{3 + \cos 4\varphi}\, d\varphi = 2\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3 + \cos 4\varphi}$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{8\pi} \frac{dt}{3 + \cos t} = 2\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 + \cos t} = \left| \begin{matrix} y = \operatorname{tg}\frac{t}{2} \\ dt = \frac{2dy}{1+y^2} \end{matrix} \right| = 2\left[\int_0^{+\infty} \frac{\frac{2dy}{1+y^2}}{3 + \frac{1-y^2}{1+y^2}} + \int_{-\infty}^{0} \frac{\frac{2dy}{1+y^2}}{3 + \frac{1-y^2}{1+y^2}} \right]$$

$\hookrightarrow$ problém v bodě $t = \pi$, rozděl na $\int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2+y^2}\, dy = 2 \cdot \left[\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2}\pi}}$$

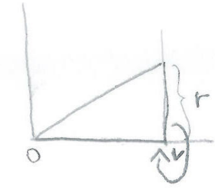
10) Koule:



Dle 2c) z přiložených vzorců:

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi} R^3\sin\varphi\,d\varphi=\frac{2}{3}\pi R^3\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi}=\underline{\underline{\frac{4}{3}\pi R^3}}$$

Kužel:



Výška v, poloměr r $\Rightarrow f(x)=\frac{r}{v}x$, dle 2a)

$$V=\pi\int_0^{v}\frac{r^2}{v^2}x^2\,dx=\frac{\pi r^2}{v^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{v}=\underline{\underline{\frac{1}{3}\pi r^2 v}}$$

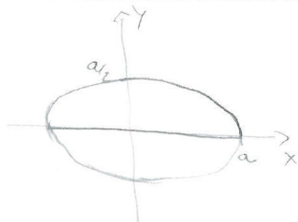
Jehlan: Není rotační těleso, použijeme 2d): $V=\int_0^{v}S(x)\,dx$, v… výška, $S(x)$… obsah průřezu.

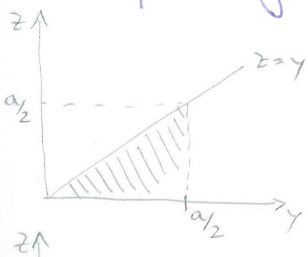
$S(0)=0$, $S(v)=S_p$ …. obsah podstavy. Délka stran průřezu se mění lineárně $\Rightarrow$ $S(x)$ se mění kvadraticky. $S(x)=ax^2$, kde $a=\frac{S_p}{v^2}$.

$$V=\int_0^{v}\frac{S_p}{v^2}x^2\,dx=\frac{S_p}{v^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{v}=\underline{\underline{\frac{1}{3}S_p v}}$$

11) DÚ

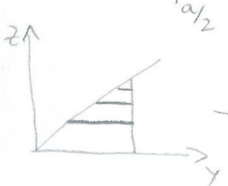
12) $x^2+4y^2\leq a^2$ je elipsa v rovině (x,y), tedy válec v prostoru

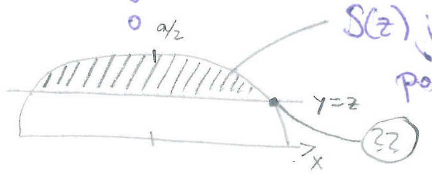




Největší možné y je $y=a/2 \Rightarrow$ Největší možné z je $z=a/2$. Použijeme 2d) v proměnné z

$$V=\int_0^{a/2}S(z)\,dz.$$ Co je $S(z)$?





$S(z)$ je obsah této části elipsy. Ten také spočítáme pomocí integrálu. Musíme najít meze

Krajní bod splňuje $x^2+4z^2=a^2 \Rightarrow x_0=\sqrt{a^2-4z^2}$. $S(z)=2\int_0^{x_0}\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-z\,dx=$

$=\underbrace{\int_0^{x_0}\sqrt{a^2-x^2}\,dx}_{I}-2zx_0$. Primitivní fce k $\sqrt{a^2-x^2}$: $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left|\begin{matrix}x=a\sin t\\ dx=a\cos t\,dt\end{matrix}\right|=\int a^2\cos^2 t\,dt=$

$=a^2\int\frac{\cos(2t)+1}{2}\,dt=a^2\frac{\sin 2t}{4}+a^2\frac{t}{2}=$

$=a^2\left(\frac{\sin(2\arcsin\frac{x}{a})}{4}+\frac{\arcsin\frac{x}{a}}{2}\right)$

$=\frac{ax}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$

$$S(z)=\frac{x_0}{2}\sqrt{a^2-x_0^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x_0}{a}-2zx_0$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-4z^2}}{2}\cdot 2z+\frac{a^2}{2}\arcsin\sqrt{1-\frac{4z^2}{a^2}}-2z\sqrt{a^2-4z^2}$$

$$=\underline{\frac{a^2}{2}\arcsin\sqrt{1-\frac{4z^2}{a^2}}-z\sqrt{a^2-4z^2}}$$

$$V=\int_0^{a/2}\left(\frac{a^2}{2}\arcsin\sqrt{1-\frac{4z^2}{a^2}}-z\sqrt{a^2-4z^2}\right)dz=V_1+V_2$$

$$V_1=\int_0^{a/2}\frac{a^2}{2}\arcsin\sqrt{1-\frac{4z^2}{a^2}}\,dz=\frac{a^2}{2}\cdot\left[z\arcsin\sqrt{1-\frac{4z^2}{a^2}}\right]_0^{a/2}+\frac{a^2}{2}\int_0^{a/2}\frac{2z}{\sqrt{a^2-4z^2}}dz$$

$$f'=1 \quad g=\arcsin\sqrt{1-\frac{4z^2}{a^2}}$$

$$f=z \quad g'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(1-\frac{4z^2}{a^2}\right)}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4z^2}{a^2}}}\cdot\left(-\frac{8z}{a^2}\right)$$

$$=\frac{a}{2z}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4z^2}{a^2}}}\cdot\left(-\frac{8z}{a^2}\right)=-\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4z^2}{a^2}}}$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{a/2}\frac{2z}{\sqrt{a^2-4z^2}}dz=\left|\begin{matrix}t=a^2-4z^2 & z=0\to t=a^2\\ dt=-8z\,dz & z=a/2\to t=0\end{matrix}\right|=\frac{a^2}{8}\int_0^{a^2}\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\frac{a^2}{8}\left[2\sqrt{t}\right]_0^{a^2}=\frac{a^3}{4}$$

$$V_2=-\int_0^{a/2}z\sqrt{a^2-4z^2}\,dz=\left|\begin{matrix}t=a^2-4z^2 & z=0\to t=a^2\\ dt=-8z\,dz & z=a/2\to t=0\end{matrix}\right|=-\int_0^{a^2}\frac{1}{8}\sqrt{t}\,dt=-\frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^{a^2}=-\frac{1}{12}a^3$$

$$V=V_1+V_2=a^3\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right)=\frac{a^3}{6}$$

---

13) Nejjednodušší je použít 3c): $f(\varphi)=R$, kde R je konstanta (poloměr kružnice)

$f'(\varphi)=0$ a proto

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2+0}\,d\varphi=R\int_0^{2\pi}1\,d\varphi=R\left[\varphi\right]_0^{2\pi}=2\pi R$$

---

14) Podle 3b) $f(x)=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$l=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{1-x^2}}\,dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\frac{1-x}{1+x}}\,dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{2}{1+x}}\,dx=\sqrt{2}\cdot\left[2\sqrt{x+1}\right]_{-1}^{1}=4$$

---

15) Podle 3a) $\varphi(t)=a(\cos t+t\sin t)$ $\qquad \psi(t)=a(\sin t-t\cos t)$

$\varphi'(t)=a(-\sin t+\sin t+t\cos t)=at\cos t$ $\qquad \psi'(t)=a(\cos t-\cos t+t\sin t)=at\sin t$

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2t^2\cos^2t+a^2t^2\sin^2t}=|a|\int_0^{2\pi}t\,dt=2\pi^2|a|$$

---

16) Podle 4c): Opět $f(\varphi)=R$ ... poloměr koule

$f'(\varphi)=0$

$$S=2\pi\int_0^{\pi}R\sin\varphi\sqrt{R^2+0}\,d\varphi=2\pi R^2\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi}=4\pi R^2$$

17) Podle 4b) $f(x) = x^3$. Ze symetrie budeme počítat na $x \in (0,1)$ a vynásobíme dvěma

$f'(x) = 3x^2$

$$S = 4\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1+9x^4}\, dx = \left| \begin{matrix} t = 1+9x^4 & x=0 \Rightarrow t=1 \\ dt = 36x^3 dx & x=1 \Rightarrow t=10 \end{matrix} \right| = \frac{\pi}{9} \int_1^{10} \sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{9} \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_1^{10} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{2\pi}{27} \cdot \left(\sqrt{1000} - 1 \right)}}$$

---

18) Podle 5a): $x \in (0,R)$

$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$

$g(x) = 0$

$\sigma(x) = 1$

$$\Rightarrow M_x = \frac{1}{2} \int_0^R R^2 - x^2\, dx = \frac{1}{2} \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = \frac{1}{3} R^3$$

$$M_y = \int_0^R x \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \left| \begin{matrix} t = R^2 - x^2 & x=0 \Rightarrow t = R^2 \\ dt = -2x\, dx & x = R \Rightarrow t = 0 \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int_0^{R^2} \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{3} R^3$$

$$M = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} = \left| \begin{matrix} x = R\sin t & x=0 \Rightarrow t = 0 \\ dx = R\cos t\, dt & x = R \Rightarrow t = \pi/2 \end{matrix} \right| = R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt =$$

$$= R^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2t)+1}{2}\, dt = R^2 \left[\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^2}{4}$$

Odtud těžiště je $\underline{\underline{T = \left[\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi} \right]}}$

---

19) Podle 5b) $t \in [0, \pi]$

$\varphi(t) = a\cos^3 t \Rightarrow \varphi'(t) = 3a\cos^2 t \cdot (-\sin t)$

$\psi(t) = a\sin^3 t \Rightarrow \psi'(t) = 3a \sin^2 t \cos t$

$\mu(t) = 1$

$$M_x = \int_0^\pi a\sin^3 t \cdot \sqrt{9a^2(\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t)}\, dt = 3a^2 \int_0^\pi \sin^3 t \cdot |\cos t| \sin t\, dt = \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi} \begin{matrix} u = \sin t \\ du = \cos t\, dt \end{matrix}$$

$$= 3a^2 \left(\int_0^1 u^4 du + \int_0^1 u^4 du \right) = 6a^2 \left[\frac{u^5}{5} \right]_0^1 = \frac{6}{5} a^2$$

$$M_y = \int_0^\pi a\cos^3 t \cdot 3a|\cos t| \sin t\, dt = \left| \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi} \begin{matrix} u = \cos t \\ du = -\sin t\, dt \end{matrix} \right| = 3a^2 \left(\int_0^1 u^4 du + \int_{-1}^0 -u^4 du \right) = 0$$

$$M = \int_0^\pi 3a|\cos t| \sin t\, dt = \left| \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi} \begin{matrix} u = \cos t \\ du = -\sin t\, dt \end{matrix} \right| = 3a \left(\int_0^1 u\, du - \int_{-1}^0 u\, du \right) = 3a$$

Odtud těžiště $T = \left[0, \frac{2}{5} a \right]$

20) Podle 5c) $x \in (0,a)$

$f(x) = \sqrt{a^2-x^2}$

$g(x) = 0$

$\gamma(x) = 1$

$$M_{yz} = \pi \int_0^a x(a^2-x^2)\,dx = \pi\left[a^2\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a = \pi\frac{a^4}{4}$$

$$M = \pi\int_0^a a^2-x^2\,dx = \pi\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2}{3}\pi a^3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T = \left[\frac{3a}{8}, 0, 0\right]}}$$

---

21) Podle 5b) viz 19)

$$I_x = \int_0^{\pi/2} a^2\sin^6 t\cdot 3a|\cos t|\sin t\,dt = 3a^3\int_0^{\pi/2}\sin^7 t\cos t\,dt = \left|\begin{matrix}\sin t = u & t=0\Rightarrow u=0\\ \cos t\,dt = du & t=\pi/2\Rightarrow u=1\end{matrix}\right| = 3a^3\int_0^1 u^7\,du =$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{8}a^3}}$$

$$I_y = \int_0^{\pi/2} a^2\cos^6 t\cdot 3a\cos t\sin t\,dt = 3a^3\int_0^{\pi/2}\cos^7 t\sin t\,dt = \left|\begin{matrix}\cos t = u & t=0\Rightarrow u=1\\ -\sin t\,dt = du & t=\pi/2\Rightarrow u=0\end{matrix}\right| = 3a^3\int_0^1 u^7\,du =$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{8}a^3}}$$

---

22) Bez záruky, nejsem fyzik :o)

$s = ct^3$

$ds = 3ct^2dt \Rightarrow v(t) = \frac{ds}{dt} = 3ct^2$. Pro práci platí $dW = F\cdot ds$

$$\Rightarrow W = \int_0^a F\cdot ds = \int_0^{\sqrt[3]{a/c}} F\cdot v\,dt \qquad \text{Máme } F = \beta v^2 \text{ dle zadání}$$

$$= \int_0^{\sqrt[3]{a/c}}\beta v^3\,dt = \beta\int_0^{\sqrt[3]{a/c}}(3c)^3t^6\,dt = 27c^3\beta\left[\frac{t^7}{7}\right]_0^{\sqrt[3]{a/c}} = \underline{\frac{27}{7}\beta a^{7/3}c^{2/3}}$$

---

23) Bez použití integrálu: Hledáme funkci, která popíše pokles intenzity záření

Ze zadání víme, že musí splňovat $f(x+h) = \frac{f(x)}{2}$ pro všechna x, $f(0)=1$

Odtud $f(h) = 1/2$, $f(2h) = 1/4$, ... $f(nh) = \frac{1}{2^n} = 2^{-n}$. Protože jde o přímou úměru: $f(xh) = 2^{-x}$ $\forall x > 0$, $y = xh \Rightarrow \underline{f(y) = 2^{-y/h}}$.

Odtud, je-li počáteční intenzita I_0, pak $I(H) = I_0 f(H) = \underline{\underline{I_0\cdot 2^{-H/h}}}$