Sada příkladů 2/4

Obyčejné diferenciální rovnice

Lineární rovnice s konstantními koeficienty

Nalezněte obecná řešení rovnic

1. $$y^{III} - 3y'' + 3y' - y = 0$$

2. $$y'' - 2y' - 3y = \mathrm{e}^{4x}$$

3. $$y'' - y = 2\mathrm{e}^{x} - x^2$$

4. $$y'' - 3y' + 2y = \sin x$$

5. $$y'' + 4y' - 5y = 2\mathrm{e}^{x} \sin^2 x$$

6. $$y'' - 2y' + y = 2x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x} \sin 2x$$

7. $$y^{IV} - 5y'' + 4y = \sin x \cos 2x$$

8. $$y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^{x}}{x}$$

9. $$y'' + 4y = 2\mathrm{tg}\, x$$

10. $$x^2 y^{III} = 2y'$$

11. $$x^2 y'' + xy' + 4y = 10x.$$

Lineární rovnice n-tého řádu

Nalezněte obecná řešení rovnic, znáte-li jedno řešení homogenní rovnice

12.
$$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0, \quad y = \mathrm{e}^{ax}$$

13.
$$xy'' + 2y' - xy = 0, \quad y = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$$

14.
$$(x+1)xy'' + (x+2)y' - y = x + \frac{1}{x}, \quad y = x + 2$$

15.
$$(2x+1)y'' + (2x-1)y' - 2y = x^2 + x.$$

Jedno řešení je ve tvaru polynomu.

Jiné typy ODR

16.
$$2yy' = y^2 + y'^2$$

17.
$$x^2y'' = y'^2$$

18.
$$y^3y'' = 1$$

19.
$$y'' = \mathrm{e}^y$$

20.
$$y'' + y'^2 = 2\mathrm{e}^{-y}.$$

ROVNICE VYŠŠÍHO ŘÁDU S KONST. KOEFICIENTY

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$. Ozn. levou stranu Ly

Dva kroky k řešení : 1) Obecné řešení homogenní rovnice, tj. rovnice $Ly = 0 \dots y_h$

2) Jedno řešení celé rovnice $Ly = f \dots y_p$

Potom obecné řešení rovnice $Ly = f$ je ve tvaru $y_h + y_p$

Homogenní rovnice : K operátoru $L\lambda$ vytvoříme charakteristický polynom $p(\lambda)$

$p(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i$ a vyřešíme rovnici $p(\lambda) = 0 \dots n$ kořenů

Reálné kořeny : $\lambda_i \in \mathbb{R} \Rightarrow$ funkce $e^{\lambda_i x}$ $(x \cdot e^{\lambda_i x}, x^2 \cdot e^{\lambda_i x}, \dots)$ je řešením

v případě vyšší násobnosti

Komplexní kořeny : $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $\lambda_i = b_i \pm i c_i \Rightarrow e^{b_i x} \cdot \cos(c_i x)$ a $e^{b_i x} \sin(c_i x)$

jsou řešením (případně $x \cdot e^{b_i x} \cdot \cos(c_i x), \dots$) v případě vyšší násobnosti

Obecné řešení hom. rce : $y_h = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot h_i(x)$, $C_i \in \mathbb{R}$

h_i jsou fce, které získáme z kořenů polynomu

Partikulární řešení $Ly = f$

Dvě metody : variace konstant nebo speciální pravá strana

Variace konstant : pracnější, ale univerzální. Hledáme řešení ve tvaru

$y_p = \sum c_i(x) h_i(x)$, tj. konstanty C_i nahradíme neznámými fcemi $c_i(x)$.

Dosadíme do původní rovnice s následujícími podmínkami :

$$\left.\begin{array}{ll} y_p' = \sum c_i h_i' + \sum c_i' h_i \quad \dots & \text{Položíme } \sum c_i' h_i = 0 \\ y_p'' = \sum c_i h_i'' + \sum c_i' h_i' \quad \dots & \text{Položíme } \sum c_i' h_i' = 0 \\ \text{atd. až poslední rovnice nakonec dá} & a_n \sum c_i' h_i^{(n-1)} = f \end{array}\right\} \text{Toto vyřešíme a je to.}$$

Speciální pravá strana : Funkce f je ve tvaru součtu $f = \sum f_j$, kde každé f_j má tvar $e^{\mu x} \cdot (P_1(x) \cos(\nu x) + P_2(x) \sin(\nu x))$, kde $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ a P_1, P_2 jsou polynomy.

Pak $y_{p_j} = e^{\mu x} \cdot x^k \cdot (Q_1(x) \cos(\nu x) + Q_2(x) \sin(\nu x))$ je řešení rce $Ly = f_j$, zde $k \dots$ násobnost čísla $\mu + i\nu$ jako kořene char. polynomu a Q_1, Q_2 jsou polynomy stupně nejvýše $\max\{st. P_1, st. P_2\}$, které musíme najít.

Spec. pravá strana zahrnuje : polynomy $(\mu = 0, \nu = 0)$, exponenciály $(\mu \neq 0, \nu = 0)$ a siny a cosiny $(\mu = 0, \nu \neq 0)$

1) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

Char. polynom: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$

$(\lambda - 1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ je trojnásobný koreň

$\Rightarrow$ Fund. systém je $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ a $\underline{\underline{y_h = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x}}$

---

2) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$

Char. polynom: $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 3, \lambda = -1$ jsou kořeny $\Rightarrow y_h = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$

Spec. pravá strana: $\mu = 4, \nu = 0, P_1(x) = 1, P_2(x) = 0.$ $4 + 0i = 4$ není kořen $\Rightarrow k = 0$

Řešení hledám ve tvaru $e^{4x} \cdot Q_1(x)$, kde st. $Q_1(x) = 0$, tj. jako Ce^{4x}. Dosadím do rovnice: $(Ce^{4x})'' - 2(Ce^{4x})' - 3 \cdot (Ce^{4x}) = 16Ce^{4x} - 8Ce^{4x} - 3Ce^{4x} = 5Ce^{4x} = e^{4x}$

$\Rightarrow C = 1/5$ a $y_p = \frac{1}{5}e^{4x}$. Proto $\underline{\underline{y = y_h + y_p = \frac{1}{5}e^{4x} + C_1e^{3x} + C_2e^{-x}}}$

Alternativní řešení variací konstant: Hledám y_p jako $y_p = c_1(x)e^{3x} + c_2(x)e^{-x}$

$y_p' = \underbrace{c_1'e^{3x} + c_2'e^{-x}}_{=0} + (3c_1e^{3x} - c_2e^{-x})$

$y_p'' = 3c_1'e^{3x} - c_2'e^{-x} + \underbrace{(9c_1e^{3x} + c_2e^{-x})}$ ... toto by mělo zmizet po dosazení do rovnice

$y_p'' - 2y_p' - 3y_p = 3c_1'e^{3x} - c_2'e^{-x} + 9c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - 2 \cdot (3c_1e^{3x} - c_2e^{-x}) - 3 \cdot (c_1e^{3x} + c_2e^{-x}) =$
$= 3c_1'e^{3x} - c_2'e^{-x} = e^{4x}$

Máme soustavu $\left.\begin{aligned} c_1'e^{3x} + c_2'e^{-x} &= 0 \\ 3c_1'e^{3x} - c_2'e^{-x} &= e^{4x} \end{aligned}\right\}$ Sečteme: $4c_1'e^{3x} = e^{4x}$

$4c_1' = e^x \Rightarrow \frac{1}{4}e^{4x} + c_2'e^{-x} = 0$

$c_1 = \frac{1}{4}e^x$ $\quad c_2' = -\frac{1}{4}e^{5x}$

$c_2 = -\frac{1}{20}e^{5x}$

Odtud $y_p = \frac{1}{4}e^x \cdot e^{3x} - \frac{1}{20}e^{5x}e^{-x} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{20}\right)e^{4x} = \frac{1}{5}e^{4x}$ a dostáváme stejný výsledek.

---

3) $y'' - y = 2e^x - x^2$

Char. polynom: $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = -1 \Rightarrow y_h = C_1e^x + C_2e^{-x}$

Spec. pravá strana: $f_1(x) = 2e^x$: $\mu = 1, \nu = 0, P_1(x) = 2$, $1 + 0i$ je kořen $\Rightarrow k = 1$

Řešení hledám ve tvaru $e^x \cdot x \cdot Q_1(x)$, kde st. $Q_1 = 0$, tj. Cxe^x

$(Cxe^x)'' - (Cxe^x) = 2e^x \Rightarrow (Ce^x + Cxe^x)' - Cxe^x = 2e^x \Rightarrow Ce^x + Ce^x + Cxe^x - Cxe^x = 2e^x$
$\Rightarrow C = 1$

$\Rightarrow y_{p1} = xe^x$

$f_2(x) = -x^2$: $\mu=0, \nu=0, P_1(x) = -x^2$: $0+0i=0$ není kořen $\Rightarrow k=0$

Řešení hledám ve tvaru $e^{0x}\cdot x^0 \cdot Q_1(x)$, kde st $Q_1(x) \leq 2$, tj. $A+Bx+Cx^2$

$$(A+Bx+Cx^2)'' - (A+Bx+Cx^2) = -x^2$$

$$2C - A \mp Bx - Cx^2 = -x^2 \Rightarrow C=1,\ B=0,\ 2C-A=0 \Rightarrow 2+x^2 = y_{P_2}$$
$$A=2$$

$$\underline{\underline{y = y_{P_1} + y_{P_2} + y_h = xe^x + 2 + x^2 + C_1 e^x + C_2 e^{-x}}}$$

---

4) $y'' - 3y' + 2y = \sin x$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
$(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$ $\Rightarrow \lambda=1, \lambda=2$ jsou kořeny $\Rightarrow y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

Spec. pravá strana : $\mu=0, \nu=1, P_1=0, P_2=1$: $0+i1=i$ není kořen $\Rightarrow k=0$

Řešení hledám ve tvaru $Q_1 \cos x + Q_2 \sin x$, kde st. Q_1 = st. $Q_2 = 0$, tj:

$$A\cos x + B\sin x$$

$$(A\cos x + B\sin x)'' - 3(A\cos x + B\sin x)' + 2(A\cos x + B\sin x) = \sin x$$

$$-A\cos x - B\sin x + 3A\sin x - 3B\cos x + 2A\cos x + 2B\sin x = \sin x$$

$$\cos x\cdot(A-3B) + \sin x(B+3A) = \sin x \Rightarrow \begin{aligned} A-3B&=0\\ B+3A&=1 \end{aligned}$$

$B + 9B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{10}, A = \frac{3}{10}$

$\Rightarrow y_p = \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$

$$y = y_h + y_p = \underline{\underline{\frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x + C_1 e^x + C_2 e^{2x}}}$$

---

5) DÚ

---

6) $y'' - 2y' + y = 2xe^x + e^x \sin 2x$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda=1$ je dvojnásobný kořen $\Rightarrow y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x$

Spec. pravá strana : $f_1(x) = 2xe^x$: $\mu=1, \nu=0, P_1=2x$: $1+0i=1$ je 2-násobný kořen $\Rightarrow k=2$

Hledáme řešení ve tvaru $e^x\cdot x^2\cdot Q_1(x)$, st. $Q_1 \leq 1$, tj. $e^x\cdot x^2\cdot(Ax+B) = e^x\cdot(Ax^3+Bx^2)$

Dosadíme do rovnice : $(e^x\cdot(Ax^3+Bx^2))'' - 2(e^x(Ax^3+Bx^2))' + e^x(Ax^3+Bx^2) = 2xe^x$

$$e^x\cdot[Ax^3 + Bx^2 + 6Ax^2 + 4Bx + 6Ax + 2B - 2\cdot(Ax^3+Bx^2+3Ax^2+2Bx) + Ax^3 + Bx^2] = e^x\cdot 2x$$

$$e^x\cdot[6Ax + 2B] = e^x\cdot 2x \Rightarrow A = 1/3, B=0 \Rightarrow y_{P_1} = \frac{1}{3}x^3 e^x$$

$f_2(x) = e^x \sin 2x$: $\mu=1, \nu=2, P_1=0, P_2=1$: $1+2i$ není kořen $\Rightarrow k=0$.

Hledáme řešení ve tvaru $e^x\cdot(Q_1\cos 2x + Q_2 \sin 2x)$, st. Q_1 = st. $Q_2 = 0$, tj. $e^x(A\cos 2x + B\sin 2x)$

$$(e^x(A\cos 2x + B\sin 2x))'' - 2(e^x(A\cos 2x + B\sin 2x))' + e^x(A\cos 2x + B\sin 2x) = e^x \sin 2x$$

$$e^x\cdot[A\cos 2x + B\sin 2x - 4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 2A\cos 2x - 2B\sin 2x + 4A\sin 2x - 4B\cos 2x$$
$$+ A\cos 2x + B\sin 2x] = e^x \sin 2x$$

$$e^x\cdot\left[-4A\cos 2x-4B\sin 2x\right]=e^x\sin 2x \Rightarrow A=0,\ B=-\tfrac14 \Rightarrow y_{p_2}=-\tfrac14 e^x\sin 2x$$

$$y=y_h+y_{p_1}+y_{p_2}=\left(\tfrac13 x^3-\tfrac14\sin 2x\right)e^x+C_1e^x+C_2xe^x$$

---

7) $y^{(4)}-5y''+4y=\sin x\cos 2x$

$$\lambda^4-5\lambda^2+4=0 \Rightarrow (\lambda^2-1)(\lambda^2-4)=0 \Rightarrow \text{Kořeny } \pm1,\ \pm2 \Rightarrow y_h=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$$

Spec. pravá strana : Jak upravit $\sin x\cos 2x$??

- $\sin x\cos 2x = \sin 3x-\cos x\sin 2x=\sin 3x-2\sin x\cos^2 x=\underline{\sin 3x-2\sin x+2\sin^3 x}$

$\quad\ \|$

$\sin x(\cos^2 x-\sin^2 x)=\underline{\sin x-2\sin^3 x}$ $\qquad \sin^3 x=\dfrac{3\sin x-\sin(3x)}{4}$

a nakonec $\sin x\cos 2x=\dfrac{\sin 3x-\sin x}{2}$

$f_1(x)=\frac12\sin 3x$: $\mu=0,\ \nu=3,\ P_1=0,\ P_2=\frac12$: $0+3i$ není kořen $\Rightarrow k=0$

$\Rightarrow y_{p_1}=A\cos 3x+B\sin 3x$

$$(A\cos 3x+B\sin 3x)^{(4)}-5(A\cos 3x+B\sin 3x)''+4(A\cos 3x+B\sin 3x)=\tfrac12\sin 3x$$

$$81A\cos 3x+81B\sin 3x+45A\cos 3x+45B\sin 3x+4A\cos 3x+4B\sin 3x=\tfrac12\sin 3x \Rightarrow A=0,\ B=\tfrac{1}{260}$$

$\Rightarrow y_{p_1}=\frac{1}{260}\sin 3x$

$f_2(x)=-\frac12\sin x$: $\mu=0,\ \nu=1,\ P_1=0,\ P_2=-\frac12$: $0+i$ není kořen $\Rightarrow k=0$

$y_{p_2}=A\cos x+B\sin x$

$$(A\cos x+B\sin x)^{(4)}-5(A\cos x+B\sin x)''+4(A\cos x+B\sin x)=-\tfrac12\sin x \Rightarrow A=0,\ B=-\tfrac{1}{20}$$

$$A\cos x+B\sin x+5A\cos x+5B\sin x+4A\cos x+4B\sin x=-\tfrac12\sin x$$

$y_{p_2}=-\frac{1}{20}\sin x$

$$y=\frac{1}{260}\sin 3x-\frac{1}{20}\sin x+C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$$

---

8) $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$

$$\lambda^2-2\lambda+1=0 \Rightarrow (\lambda-1)^2=0 \Rightarrow y_h=C_1e^x+C_2xe^x$$

Pravá strana není speciální ($\frac1x$ není polynom) $\Rightarrow$ musíme variaci konstant

$y_p=c_1(x)e^x+c_2(x)xe^x$

$y_p'=\underbrace{c_1'(x)e^x+c_2'(x)xe^x}_{:=0}+c_1(x)e^x+c_2(x)(e^x+xe^x)$

$y_p''=c_1'e^x+c_2'e^x(x+1)+c_1e^x+c_2e^x(x+2)$

V rovnici: $c_1'e^x+c_2'e^x(x+1)+c_1e^x+c_2e^x(x+2)-2c_1e^x-2c_2e^x(x+1)+c_1e^x+c_2xe^x=\frac{e^x}{x}$, tj.

$$c_1'e^x+c_2'e^x(x+1)=\frac{e^x}{x},\ \text{tj.}\ \left.\begin{aligned}c_1'+c_2'(x+1)&=\tfrac1x\\ c_1'+c_2'x&=0\end{aligned}\right\}\ c_2'=\frac1x \Rightarrow c_2=\ln|x|$$

$\Downarrow$

$c_1'=-1$

$c_1=-x$

Tedy $y_p=-xe^x+\ln|x|\,xe^x$

$$y=C_1e^x+C_2xe^x-xe^x+\ln|x|\,xe^x=\boxed{C_1e^x+\tilde C_2xe^x+\ln|x|\,xe^x} \qquad x\in(-\infty,0),\ (0,\infty)$$

5

9) $y'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}\,x$

$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i \Rightarrow y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

Variace konstant: $y_p = c_1(x)\cos 2x + c_2(x) \sin 2x$

$y_p' = \underbrace{c_1' \cos 2x + c_2' \sin 2x}_{=0} - 2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x$

$y_p'' = -2c_1' \sin 2x + 2c_2' \cos 2x - 4c_1 \cos 2x - 4c_2 \sin 2x$

$$\Rightarrow y_p'' + 4y_p = \left.\begin{matrix} -2c_1'\sin 2x + 2c_2'\cos 2x = 2\,\mathrm{tg}\,x \\ c_1'\cos 2x + c_2' \sin 2x = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} c_2'\cos 2x - c_1' \sin 2x = \mathrm{tg}\,x \\ c_2' \sin 2x + c_1' \cos 2x = 0 \end{matrix}\right\}$$

$(1)\cdot \sin 2x - (2) \cdot \cos 2x$

$c_2' \cos 2x \sin 2x - c_1' (\sin 2x)^2 - c_2' \cos 2x \sin 2x - c_1' (\cos 2x)^2 = \mathrm{tg}\,x \cdot \sin 2x$

$c_1' = -\mathrm{tg}\,x \sin 2x = -2\sin^2 x = \cos 2x - 1$

$\Rightarrow c_1 = \frac{\sin 2x}{2} - x$

$c_2' \sin 2x = -c_1' \cos 2x = -\cos 2x(\cos 2x - 1) \Rightarrow c_2' = \frac{-\cos 2x(\cos 2x - 1)}{\sin 2x} = \frac{\cos 2x - \cos^2 2x}{\sin 2x} = \frac{\sin^2 2x + \cos 2x - 1}{\sin 2x}$

$\Rightarrow c_2 = \int \left(\sin 2x + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{1}{\sin 2x}\right) dx = -\frac{\cos 2x}{2} + \cancel{\frac{1}{2}\ln|\sin 2x|} + \underbrace{\int \frac{\cos 2x - 1}{\sin 2x}\, dx}_{= \int -\frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \ln|\cos x|}$

$\Rightarrow y_p = \frac{\sin 2x}{2} \cos 2x - x\cos 2x - \frac{\cos 2x}{2} \sin 2x + (\ln|\cos x|)\sin 2x$

$= -x\cos 2x + (\ln|\cos x|) \sin 2x$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = -x\cos 2x + (\ln|\cos x|)\sin 2x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x}}$ $\quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

---

10) $x^2 y''' = 2y'$. Nevidíme $y \Rightarrow \tilde{y} = y'$

$x^2 \tilde{y}'' = 2\tilde{y}$ ... Eulerova rovnice (která obsahuje členy $x^n \cdot y^{(n)}$)

Řešíme zvlášť na $(0,\infty)$ a na $(-\infty,0)$. Na $(0,\infty)$: $x = e^\xi$, $z(\xi) = \tilde{y}(x(\xi)) = \tilde{y}(e^\xi)$

Odtud $z'(\xi) = \tilde{y}'(x)\cdot x'(\xi) = \tilde{y}' \cdot x$

$z''(\xi) = \tilde{y}'' \cdot x^2 + \tilde{y}' \cdot x = \tilde{y}'' \cdot x^2 + z'$

$z'' - z' = 2z$

$z'' - z' - 2z = 0$

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow z = C_1 e^{2\xi} + C_2 e^{-\xi}$, $\quad \xi = \ln x$

$\Rightarrow \tilde{y} = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x} \Rightarrow y = C_1 x^3 + C_2 \ln x + C_3$

Na $(-\infty, 0)$: $x = -e^\xi$: $z(\xi) = \tilde{y}(x(\xi)) = \tilde{y}(-e^\xi)$

$z'(\xi) = \tilde{y}'(x) \cdot x'(\xi) = \tilde{y}' \cdot x$ a vidíme, že to funguje stejně

Opět $z = C_1 e^{2\xi} + C_2 e^{-\xi}$, $\quad \xi = \ln(-x)$

$\tilde{y} = C_1 \cdot (-x)^2 + \frac{C_2}{(-x)} = C_1 x^2 + \frac{C_2}{|x|} = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x}$

a $y = C_1 x^3 + C_2 \ln|x| + C_3$

Dohromady $\underline{\underline{y = C_1 x^3 + C_2 \ln|x| + C_3}}$ na $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$. Řešení s $C_2 = 0$ lze lepit na řešení na $\mathbb{R}$.

11) $x^2y'' + xy' + 4y = 10x$. Opět Eulerova rovnice $\Rightarrow x = \pm e^\xi$, $z(\xi) = y(x(\xi))$

$$z' = y' \cdot x$$
$$z'' = y''\cdot x^2 + y'\cdot x \Rightarrow y''\cdot x^2 = z'' - z'$$

$$z'' - z' + z' + 4z = \pm 10 e^\xi$$
$$z'' + 4z = \pm 10 e^\xi$$
$$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i \Rightarrow z_h = C_1 \sin(2\xi) + C_2 \cos(2\xi)$$

z_p: Spec. PS: $\mu = 1, \nu = 0, P_1 = \pm 10 \Rightarrow k = 0$ a $Q_1 = A$. Hledáme z_p ve tvaru $A\cdot e^\xi$

$$(Ae^\xi)'' + 4Ae^\xi = \pm 10 e^\xi \Rightarrow \begin{cases} + : A = 2 \\ - : A = -2 \end{cases}$$

Na $x \in (0,\infty)$: $z = 2e^\xi + C_1(\sin 2\xi) + C_2 \cos(2\xi)$

Na $x \in (-\infty, 0)$: $z = -2e^\xi + C_1(\sin 2\xi) + C_2\cos(2\xi)$

Zpět k $y(x)$: Na $x \in (0,\infty)$: $x = e^\xi$: $y(x) = 2x + C_1 \sin \ln x^2 + C_2 \cos \ln x^2$

Na $x\in(-\infty,0)$: $x = -e^\xi$: $y(x) = 2x + C_1 \sin \ln x^2 + C_2 \cos \ln x^2$

Tedy celkem $\underline{\underline{y = 2x + C_1 \sin \ln x^2 + C_2 \cos \ln x^2}}$ na $(-\infty, 0)$ a $(0,\infty)$. Pro $C_1 = C_2 = 0$ je $y = 2x$ řešení na celém $\mathbb{R}$.

OBECNÉ ŘEŠENÍ RCE 2. ŘÁDU PŘI ZNALOSTI JEDNOHO ŘEŠENÍ

$h_1(x)$, $h_2(x)$ tvoří fundamentální systém hom. rovnice: Definujeme Wronskián

$$W(x) := \det\begin{pmatrix} h_1(x) & h_2(x) \\ h_1'(x) & h_2'(x)\end{pmatrix}.$$

Rovnice je $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$.

Platí: $W'(x) = -\frac{a_1(x)}{a_2(x)} W(x) \Rightarrow W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^x \frac{a_1(t)}{a_2(t)}\,dt\right)$.

Použití si ukážeme na příkladech

12) $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$ a $h_1 = e^{ax}$. Ověříme, že h_1 je řešení

$$(2x+1)a^2e^{ax} + 4axe^{ax} - 4e^{ax} = 0 \Rightarrow (2x+1)a^2 + 4ax - 4 = 0$$
$$2x(a^2+2a) + a^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} a^2 + 2a = 0 \\ a^2 - 4 = 0 \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow a = \pm 2 \quad a = -2$$

$h_1 = e^{-2x}$ je řešení na $\mathbb{R}$, rovnice je také definovaná na $\mathbb{R}$. x_0 lze volit libovolně, položíme $x_0 = 0$.

BÚNO $W(x_0) = W(0) = 1 \Rightarrow W(x) = \exp\left(-\int_0^x \frac{4t}{2t+1}\,dt\right) = \exp\left(-\int_0^x\left(2 - \frac{2}{2t+1}\right)dt\right) = \exp\left(-\left[2t - \ln|2t+1|\right]_0^x\right)$

$$= \exp\left(-(2x - \ln|2x+1|)\right) = |2x+1|\cdot e^{-2x}.$$ Bod $x = -1/2$ vypadá problematicky

$$W(x) = h_1\cdot h_2' - h_2 h_1' = e^{-2x}\cdot h_2' - h_2 \cdot e^{-2x}\cdot(-2) = e^{-2x}(h_2' + 2h_2)$$

$$\Rightarrow h_2' + 2h_2 = |2x+1|$$

Int. faktor: $p(x)=2 \Rightarrow P(x)=2x \Rightarrow \exp P(x)=e^{2x}$

pro $x>-1/2$ $\int q(x)\exp P(x)\,dx = \int (2x+1)e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}+\int 2xe^{2x}dx = \begin{vmatrix} f'=e^{2x} & g=2x \\ f=\frac{e^{2x}}{2} & g'=2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}e^{2x}+xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x} = xe^{2x}$

$\Rightarrow h_2(x)=x+Ce^{-2x}$, ale část s C je h_1, takže $h_2(x)=x$

pro $x<-1/2$: $-\int(2x+1)e^{2x} = -xe^{2x} \Rightarrow h_2(x)=-x$. Očividně jak $h_2(x)=x$ tak $h_2(x)=-x$ jsou řešení na celém $\mathbb{R}$ a liší se jen multiplikativní konstantou

Obecné řešení rovnice tak je $\underline{\underline{y=C_1x+C_2e^{-2x}}}$

---

13) $xy''+2y'-xy=0$ $\quad h_1(x)=\frac{e^x}{x} \Rightarrow$ Budeme pracovat na $(0,\infty)$ a $(-\infty,0)$

Ověření, že $h_1(x)$ je řešení, si můžete provést sami. $x_0=1$, $W(x_0)=1$

$$W(x)=\exp\left(-\int_1^x \frac{2}{t}dt\right)=\exp\left(-2[\ln|t|]_1^x\right)=\exp(-2\ln|x|)=\exp(\ln x^{-2})=\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow W(x)=h_1h_2'-h_2h_1' = \frac{e^x}{x}\cdot h_2' - h_2\cdot\frac{e^x(x-1)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$xe^x h_2' - e^x(x-1)h_2 = 1 \Rightarrow h_2' - \frac{x-1}{x}h_2 = \frac{1}{xe^x}$$

$p(x)=-1+\frac{1}{x} \Rightarrow P(x)=-x+\ln|x| \Rightarrow \exp(P(x))=|x|e^{-x}$, na $(0,\infty)$ tedy xe^{-x}

$$\int q(x)\exp(P(x))\,dx = \int\frac{1}{xe^x}\cdot xe^{-x}dx = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} \Rightarrow h_2(x)=\frac{e^x}{x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} + \overbrace{C\frac{e^x}{x}}^{h_1}$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot e^{-x}$$

na $(-\infty,0)$ podobně s rozdílem ve znaménku.

$h_2(x)$ je určeno až na násobek, můžeme položit $h_2(x)=\frac{e^{-x}}{x}$ a

$$\underline{\underline{y=C_1\frac{e^x}{x}+C_2\frac{e^{-x}}{x}}} \quad \text{na } (0,\infty) \text{ a } (-\infty,0)$$

---

14) $(x+1)xy''+(x+2)y'-y=x+\frac{1}{x}$. Opět na $(0,\infty)$ a $(-\infty,0)$. $h_1(x)=x+2$

$x_0=1$, $W(x_0)=1$.

$\frac{t+2}{t(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}=\frac{At+A+Bt}{t(t+1)} \Rightarrow A=2, B=-1$

$$W(x)=\exp\left(-\int_1^x\frac{t+2}{t(t+1)}dt\right) = \exp\left(-\int_1^x \frac{2}{t}-\frac{1}{t+1}dt\right)=\exp\left([\ln|t+1|-2\ln|t|]_1^x\right)=\exp\left(\ln\left|\frac{x+1}{x^2}\right|-\ln 2\right)$$

$=\left|\frac{x+1}{x^2}\right|\cdot\frac{1}{2}$ $\quad W(x)$ je dáno až na multiplik. konstantu, dále pokračujeme s $W(x)=\frac{x+1}{x^2}$

$W(x)=h_1h_2'-h_2h_1'=(x+2)h_2'-h_2=\frac{x+1}{x^2} \Rightarrow h_2'-\frac{1}{x+2}h_2=\frac{x+1}{x^2(x+2)}$. $p(x)=-\frac{1}{x+2} \Rightarrow P(x)=-\ln|x+2|$

$\Rightarrow \exp(P(x))=\frac{1}{|x+2|}$

Pro $x>-2$: $\int q(x)\exp(P(x))\,dx = \int\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{1}{(x+2)^2}dx = \int \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}$, kde ~~$Ax(x+2)+B(x+2)+Cx^2=x+1$~~
~~$(A+C)x^2+(2A+B)x+2B=x+1$~~
~~$\Rightarrow B=1/2 \Rightarrow A=1/4 \Rightarrow C=-1/4$~~

~~$=\frac{1}{4}\ln x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\ln(x+2)+C$~~

$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+2)^2}=\frac{x+1}{x^2(x+2)^2}$ má řešení $B=1/4$, $D=-1/4$, $A=C=0$, což snadno ověříme.

$\int \frac{1}{4}\cdot x^{-2}-\frac{1}{4}(x+2)^{-2}dx=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+2}+C$ a odtud $h_2(x)=\underbrace{-\frac{1}{4}\frac{x+2}{x}+\frac{1}{4}}_{=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}}+\underbrace{C\cdot(x+2)}_{h_1}$

Opět podobně na $(-\infty,-2)$, h_2 určen až na násobek $\Rightarrow$ $y_h=\frac{C_1}{x}+C_2(x+2)$

Partikulární řešení: variace konstant: $y_p(x)=\frac{c_1(x)}{x}+c_2(x)(x+2)$

$$y_p'(x)=\underbrace{\frac{c_1'(x)}{x}+c_2'(x)(x+2)}_{:=0}-\frac{c_1(x)}{x^2}+c_2(x)$$

$$y_p''(x)=-\frac{c_1'(x)}{x^2}+c_2'(x)+\frac{2c_1(x)}{x^3}$$

Rovnice: $x(x+1)y_p''+(x+2)y_p'-y_p=x+\frac{1}{x}$

$$x(x+1)\cdot\left(-\frac{c_1'(x)}{x^2}+c_2'(x)+\frac{2c_1(x)}{x^3}\right)+(x+2)\cdot\left(-\frac{c_1(x)}{x^2}+c_2(x)\right)-\left(\frac{c_1(x)}{x}+c_2(x)(x+2)\right)=x+\frac{1}{x}$$

$$-\frac{x+1}{x}c_1'+x(x+1)c_2'+c_1(x)\cdot\underbrace{\left[\frac{2(x+1)}{x^2}-\frac{x+2}{x^2}-\frac{1}{x}\right]}_{=0}=x+\frac{1}{x}$$

$=0 \Rightarrow$ máme to správně.

Dostáváme soustavu

$$\frac{c_1'}{x}+c_2'(x+2)=0 \qquad /\cdot(x+1)$$

$$-(x+1)\frac{c_1'}{x}+c_2'x(x+1)=\frac{x^2+1}{x}$$

$\Sigma \Rightarrow c_2'\left[(x+1)(x+2)+(x+1)x\right]=\frac{x^2+1}{x}$

$$2c_2'(x+1)^2=\frac{x^2+1}{x}$$

$$c_2'=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+1}{x(x+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{(x+1)^2}\right)$$

Odtud $c_2=\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{x+1}$

a $c_1'=-x(x+2)c_2'=-\frac{1}{2}\frac{(x^2+1)(x+2)}{(x+1)^2}=-\frac{1}{2}\frac{x^3+2x^2+x+2}{(x+1)^2}=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{(x+1)^2}$

$\Rightarrow c_1=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{x+1}$ a konečně $y_p=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{2}\ln|x|(x+2)+\frac{x+2}{x+1}$

$$=\frac{x+2}{2}\ln|x|-\frac{1}{4}x+\frac{x^2+2x+1}{x(x+1)}=\frac{x+2}{2}\ln|x|-\frac{1}{4}x+1+\frac{1}{x}$$

$$y=\frac{C_1}{x}+C_2(x+2)+\frac{x+2}{2}\ln|x|-\frac{1}{4}x+1+\frac{1}{x} \qquad x\in(-\infty,0) \text{ a } (0,\infty)$$

---

15) DÚ

16) $2yy' = y^2 + (y')^2 \Rightarrow 0 = y^2 - 2yy' + (y')^2 = (y - y')^2 \Rightarrow y' = y : \int \frac{dy}{y} = x + C$

$\ln|y| = x + C \Rightarrow \underline{y = Ce^x}$, $C \in \mathbb{R}$.

---

17) $x^2 y'' = (y')^2$ Nová neznámá: $z = y'$

$x^2 z' = z^2$ $z = 0$ je řešení

$\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{1}{x^2} dx = -x^{-1} + C$

$-z^{-1}$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + C$

$z = \frac{1}{C + \frac{1}{x}} = \frac{x}{Cx + 1}$ na intervalech mimo bod $-\frac{1}{C}$

$y' = \frac{x}{Cx+1} = \frac{1}{C}\left(\frac{Cx}{Cx+1}\right) = \frac{1}{C}\left(1 - \frac{1}{Cx+1}\right)$

$\underline{\underline{y = \frac{x}{C} - \frac{1}{C^2}\ln|Cx+1| + C_2}}$ pro $C \neq 0$ a $y = \frac{x^2}{2} + C_2$ pro $C = 0$

---

18) $y^3 y'' = 1$ pro $y \neq 0$: $y'' = \frac{1}{y^3}$. Takový typ rovnice násobíme $2y'$

$(y'^2)' = 2y'y'' = \frac{2y'}{y^3}$ a nyní položíme $\frac{2}{y^3} = f(y)$

Pravá strana je tak $f(y)y' = (F(y))'$, kde $F(y)$ je primitivní k f.

Vidíme $F(y) = -\frac{1}{y^2}$

$\Rightarrow y'^2 = -\frac{1}{y^2} + C \Rightarrow y' = \pm\sqrt{C - \frac{1}{y^2}}$. Očividně má řešení jen pro $C > 0$

$y > 0$: $y' = \pm \frac{\sqrt{Cy^2 - 1}}{y}$ $y < 0$ dá totéž, také s $\pm$

$\int \frac{y\,dy}{\sqrt{Cy^2 - 1}} = \int 1\,dx = x + C_2$

$\left\| \begin{array}{l} t = Cy^2 - 1 \\ dt = 2Cy\,dy \end{array} \right.$

$\frac{1}{2C}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{C}\sqrt{t} = \frac{1}{C}\sqrt{Cy^2 - 1} = x + C_2$

s minus analogicky

$-\frac{1}{C}\sqrt{Cy^2 - 1} = x + C_2$

$\Rightarrow \pm\sqrt{Cy^2 - 1} = Cx + CC_2 \Rightarrow Cy^2 - 1 = (Cx + CC_2)^2$

$y^2 = \frac{1}{C}\left[(Cx + CC_2)^2 + 1\right] \Rightarrow \underline{\underline{y = \pm\frac{1}{\sqrt{C}}\left[\sqrt{C^2x^2 + 2C^2xC_2 + C^2C_2^2 + 1}\right]}}$

pro $C > 0$, $C_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

19) $y'' = e^y \Rightarrow 2y'y'' = 2y'e^y$

$$(y'^2)' = (2e^y)' \Rightarrow y'^2 = 2e^y + C_1$$
$$y' = \pm\sqrt{2e^y + C_1}$$

$$\pm\int \frac{dt}{\sqrt{t}\cdot(t-C_1)} = \left| \begin{matrix} t = 2e^y + C_1 \\ dt = 2e^y dy \end{matrix} \right| = \int \frac{\pm\, dy}{\sqrt{2e^y + C_1}} = x + C_2$$

$$\frac{dt}{t-C_1} = dy$$

$$\left| \begin{matrix} u = \sqrt{t} \\ du = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}dt \\ 2u\,du = dt \end{matrix} \right| = \pm\int \frac{2\,du}{u^2 - C_1}$$

Pro $C_1 > 0$: $\pm\frac{1}{\sqrt{C_1}}\int \frac{2\sqrt{C_1}}{u^2 - C_1}du = \pm\frac{1}{\sqrt{C_1}}\int \frac{1}{u-\sqrt{C_1}} - \frac{1}{u+\sqrt{C_1}}\,du$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln\frac{u-\sqrt{C_1}}{u+\sqrt{C_1}}$$
$$= \mp\frac{2}{\sqrt{C_1}}\operatorname{argtanh}\frac{u}{\sqrt{C_1}}$$

Pro $C_1 = 0$: $\pm\frac{2}{u}$

Pro $C_1 < 0$: $\pm\frac{2}{\sqrt{-C_1}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{-C_1}}$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{C_1}}\operatorname{argtanh}\left(\frac{1}{\sqrt{C_1}}\cdot\sqrt{2e^y + C_1}\right) = x + C_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{C_1}}\cdot\sqrt{2e^y + C_1} = \tanh\left(\frac{\pm\sqrt{C_1}(x+C_2)}{2}\right)$$

$$2e^y + C_1 = C_1\tanh^2\left(\frac{\pm\sqrt{C_1}(x+C_2)}{2}\right)$$

$$\underline{\underline{y = \ln\left(\frac{1}{2}\left(C_1\tanh^2\left(\frac{\pm\sqrt{C_1}(x+C_2)}{2}\right) - C_1\right)\right)}} \quad \text{pro } C_1 > 0$$

podobně s tg místo tanh pro $C_1 < 0$

~~ea~~ ~~g~~

$$\pm\frac{2}{\sqrt{2e^y}} = x + C_2$$

$$\frac{2}{e^y} = (x+C_2)^2 \Rightarrow e^y = \frac{2}{(x+C_2)^2} \Rightarrow \underline{\underline{y = \ln\left(\frac{2}{(x+C_2)^2}\right)}}$$

---

20) $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$

Hledáme řešení splňující $y' = p(y)$ a proto $y'' = p'(y)y' = p'(y)p(y)$

a $z = y(x)$ je nová proměnná

$$p'p + p^2 = 2e^{-z}$$
$$\frac{1}{2}(p^2)' + p^2 = 2e^{-z}$$
$$\frac{1}{2}r' + r = 2e^{-z}$$
$$r' + 2r = 4e^{-z}$$

$r = p^2$

$$\exp(P(z)) = e^{2z}$$
$$\int q\exp P = \int 4e^{-z}e^{2z}dz = 4e^z + C_1 \Rightarrow r(z) = C_1e^{-2z} + 4e^{-z}$$
$$p(z) = \pm\sqrt{C_1e^{-2z} + 4e^{-z}} = \pm e^{-z}\sqrt{C_1 + 4e^z}$$

Nakonec $y' = \pm e^{-y}\sqrt{C_1+4e^y}$

$$\left.\begin{aligned} &\int \frac{e^y\,dy}{\sqrt{C_1+4e^y}} = \pm x + C_2 \\ &\quad \parallel \\ &\left.\begin{matrix} t = C_1+4e^y \\ dt = 4e^y dy \end{matrix}\right| = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{t} = \frac{1}{2}\sqrt{C_1+4e^y} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} C_1+4e^y &= 4(x+C_2)^2 \\ 4e^y &= 4(x+C_2)^2 - C_1 \\ y &= \ln\left((x+C_2)^2 - \frac{C_1}{4}\right) \end{aligned}$$