Matematická analýza NOFY152, LS 22/23, Cvičení s L. Krumpem

Vzorová písemka č. 2

1. (5 bodů) Najděte obecné řešení rovnice a zdůvodněte, zda je či není možné nalezená řešení v některých bodech „nalepovat“:

$$xy' + y = xy^2 \ln x$$

2. (5 bodů) Najděte obecné řešení rovnice

$$y''' + y'' + 4y' + 4y = x(e^{2x} + 8)$$

Řešení

1. (5 bodů) Najděte obecné řešení rovnice a zdůvodněte, zda je či není možné nalezená řešení v některých bodech „nalepovat“:

$$xy' + y = xy^2 \ln x$$

Ze zadání hned vidíme jednak omezení $x > 0$ a také očividné řešení $\boxed{y = 0}$. Jedná se o Bernoulliho rovnici, vydělíme ji $-y^2$ a také x, takže máme tvar

$$-y'y^{-2} - \frac{1}{x}y^{-1} = -\ln x.$$

Substitucí $z = y^{-1}$ dostáváme tvar

$$z' - \frac{1}{x}z = -\ln x,$$

kterou budeme řešit metodou integračního faktoru. Pro $p(x) = -\frac{1}{x}$ je $P(x) = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x = \ln \frac{1}{x}$ ($x > 0$, takže bez absolutní hodnoty) a integrační faktor je

$$e^{P(x)} = \frac{1}{x}.$$

Dále pro $q(x) = -\ln x$ potřebujeme

$$\int e^{P(x)} q(x) dx = -\int \frac{1}{x} \ln x dx = -\frac{\ln^2 x}{2} + c$$

a proto

$$z(x) = e^{-P(x)} \int e^{P(x)} q(x) dx = x\frac{2c - \ln^2 x}{2}$$

a při přeznačení $2c$ na c dostáváme řešení

$$\boxed{y_c(x) = z^{-1}(x) = \frac{2}{x(c - \ln^2 x)}}, c \in \mathbb{R}.$$

Definiční obor tohoto řešení je

$$\begin{cases} \mathbb{R}_+ \text{ pro } c < 0 \\ (0,1), (1+\infty) \text{ pro } c = 0 \\ (0, e^{-\sqrt{c}}), (e^{-\sqrt{c}}, e^{\sqrt{c}}), (e^{\sqrt{c}}, +\infty) \text{ pro } c > 0. \end{cases}$$

Lepení by připadalo v úvahu v dělících bodech mezi těmito intervaly, ale tam snadno spočteme, že řešení mají vždy nekonečné limity ($\pm\infty$) a tudíž lepit nelze – tato řešení jsou maximální. Zrovna tak ihned vidíme, že žádné řešení y_c nikdy nenabývá hodnoty 0, takže nedojde ani k lepení s identicky nulovým řešením.

2. (5 bodů) Najděte obecné řešení rovnice

$$y''' + y'' + 4y' + 4y = x(e^{2x} + 8)$$

Charakteristický polynom je $\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 4$ a jeho kořeny $-1, 2i, -2i$ nás vedou na fundamentální systém $\boxed{\{e^{-x}, \cos 2x, \sin 2x\}}$.

Pravá strana rovnice se dá napsat jako $xe^{2x} + 8x$ a je tedy součtem dvou speciálních pravých stran, proto i hledané partikulární řešení bude součtem příslušných dvou part. řešení. Pro pravou stranu xe^{2x} není číslo $2 + 0i$ kořenem char. polynomu a proto hledáme part. řešení ve tvaru $y_1 = (ax + b)e^{2x}$. Postupným zderivováním a dosazením dostaneme rovnici

$$(24cx + 20c + 24d)e^{2x} = xe^{2x},$$

takže

$$c = \frac{1}{24},\ d = \frac{-5}{144},\ \boxed{y_1(x) = \left(\frac{1}{24}x - \frac{5}{144}\right)e^{2x}}.$$

Dále pro pravou stranu $8x$ číslo $0 + 0i$ také není kořenem char. polynomu a proto hledáme part. řešení ve tvaru $y_2(x) = cx + d$. Zderivováním a dosazením dostáváme rovnici

$$4kx + 4(k + l) = 8x$$

a tedy

$$k = 2,\ l = -2,\ \boxed{y_2(x) = 2x - 2}.$$

Obecné řešení je tedy

$$\boxed{y(x) = c_1e^{-x} + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x + \left(\frac{1}{24}x - \frac{5}{144}\right)e^{2x} + 2x - 2}, c_i \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

Lukáš Krump, 12.4.2023