Domácí úkol č. 5 – Řešení

V příkladech 1.–4. proveďte vyšetření průběhu funkce, tj. určete:

(i) definiční obor

(ii) obor spojitosti

(iii) limity v krajních bodech D_f a v bodech nespojitosti

(iv) speciální vlastnosti (sudost/lichost, periodicita apod.)

(v) průsečíky s osami, případné další význačné body

(vi) první derivace, intervaly monotonie, extrémy, obor hodnot, jednostranné derivace, příp. limity derivací v problematických bodech

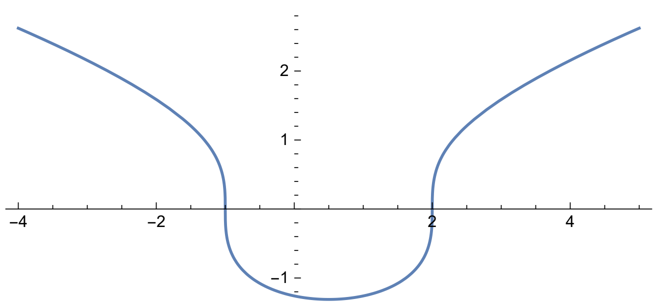
(vii) druhá derivace, konvexita/konkavita, inflexní body

(viii) asymptoty

(ix) graf

1. (1 bod)

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x - 2}$$

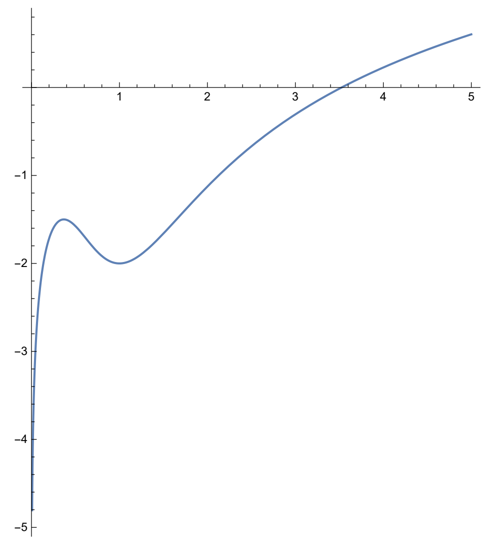


Funkce je definovaná a spojitá v $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, není sudá, lichá ani periodická (ale je osově symetrická vůči přímce $x = -\frac{1}{2}$). P_x jsou $[-1,0]$, $[2,0]$, $P_y = [0, -\sqrt[3]{2}]$, $-\sqrt[3]{2} \doteq -1,26$. $f'(x) = \frac{2x-1}{3(x^2-x-2)^{\frac{2}{3}}}$ pro $x \notin \{-1, 2\}$, stacionární bod je $x = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = -\sqrt[3]{\frac{9}{4}} \doteq -1,31$. $f'(-1) = -\infty, f'(2) = +\infty$. Výjimečné body jsou tedy $\{-\infty, -1, \frac{1}{2}, 2, +\infty\}$, f klesá v $(-\infty, \frac{1}{2})$, roste v $(\frac{1}{2}, +\infty)$, tedy v $\frac{1}{2}$ má funkce globální minimum. $f''(x) = -\frac{2}{9}\frac{x^2-x+7}{(x^2-x-2)^{\frac{5}{3}}}$ všude kromě bodů -1 a 2. $f''(x) > 0$ a tedy f je konvexní v $(-1, 2)$, $f''(x) < 0$

a tedy f je konkávní v $(-\infty,-1),(2,+\infty)$. Body -1 a 2 jsou tedy inflexními body (mění se v nich konvexita na konkavitu), ač v nich není druhá derivace definována. Asymptoty nejsou.

2. (1 bod)

$$f(x)=\frac{\ln^3 x-2}{\ln^2 x+1} \text{ (bez druhé derivace a konvexity/konkavity)}$$

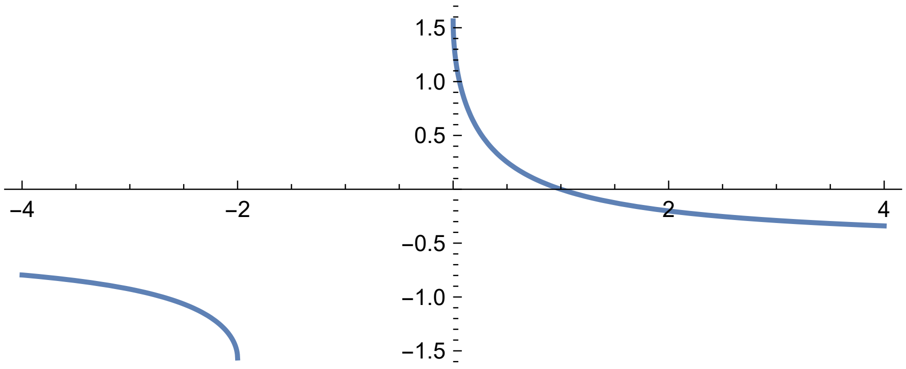


Funkce je definovaná a spojitá v $\mathbb{R}_+$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$, není sudá, lichá ani periodická. $P_x=[e^{\sqrt[3]{2}},0], e^{\sqrt[3]{2}} \doteq 3,525$. $f'(x)=\frac{1}{x}\frac{\ln x(\ln^3 x+3\ln x+4)}{(\ln^2 x+1)^2}$, stacionární body jsou $e^{-1}\doteq 0,37$ a 1 (můžeme užít substituci $y=\ln x$, u kubické funkce y^3+3y+4 pak snadno uhádneme kořen -1 a dělením dostneme kvadratický polynom bez reálných kořenů). Výjimečné body jsou $\{0^+,e^{-1},1,+\infty\}$, $f(e^{-1})=-\frac{3}{2}, f(1)=-2$, f roste v $(0,e^{-1})$ a v $(1,+\infty)$, klesá v $(e^{-1},1)$. Jediná asymptota je $x=0$.

3. (1 bod)

$$f(x)=\arcsin\frac{1-x}{1+2x}$$

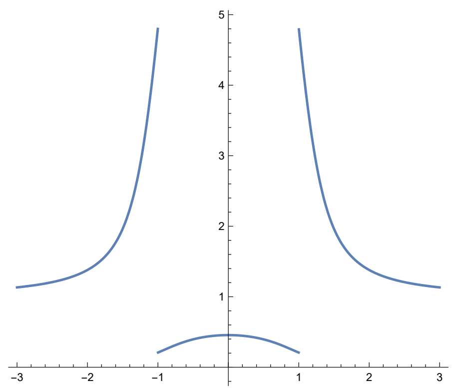
Pro stanovení definičního oboru nejprve prozkoumáme funkci $\frac{1-x}{1+2x}$: snadnými úpravami zjistíme, že hodnot v intervalu $\langle -1,1\rangle$ nabývá pro $x\in(-\infty,-2\rangle\cup\langle 0,+\infty)$ a toto je tedy definiční obor funkce $f(x)$. V každém z intervalů, které jej tvoří, je rovněž $f(x)$ spojitá. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\arcsin(-\frac{1}{2})=-\frac{\pi}{6}$, $f(-2)=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}, f(0)=\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$, $P_x=[1,0]$, není sudá, lichá ani periodická. $f'(x)=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2x}|1+2x|}$ je definovaná a záporná v $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$, f tedy klesá v $(-\infty,-2)$ i v $(0,+\infty)$. $f'_-(-2)=f'_+(0)=-\infty$. (Mimochodem v těchto bodech nemůžeme mluvit o asymptotách, jak někteří z vás psali, to by tam totiž musely být (jednostranné) limity $f(x)$ nekonečné.) $f''(x)=\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{sgn}(1+2x)(4x^2+7x+1)}{(x^2+2x)^{\frac{3}{2}}(1+2x)^2}$, kvadratický polynom v čitateli má kořeny $\frac{-7\pm\sqrt{33}}{8}$, které oba leží v $(-2,0)$, takže na znaménko druhé derivace nemá tento polynom vliv (je kladný v celém D_f), stejně tak jsou kladné všechny členy ve jmenovateli a znaménko f'' se tedy mění pouze ve členu $\operatorname{sgn}(1+2x)$: f je konkávní v $(-\infty,-2)$ a konvexní v $(0,+\infty)$. Asymptotou v $\pm\infty$ je $y=-\frac{\pi}{6}$.



4. (1 bod)

$$f(x)=e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1}}$$

$D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$, funkce je sudá, všude kladná, $f(0)=e^{-\frac{\pi}{4}}$ a tento bod je lokálním maximem, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-1-} f(x)=\lim\limits_{x\to1+} f(x)=e^{\frac{\pi}{2}}$, $\lim\limits_{x\to-1+} f(x)=\lim\limits_{x\to1-} f(x)=e^{-\frac{\pi}{2}}$. Funkce roste v $(-\infty,-1)$ a v $(-1,0)$, klesá v $(0,1)$ a v $(1,+\infty)$. Je konvexní v $(-\infty,-1)$ a v $(1,+\infty)$, konkávní v $(-1,1)$.



Bonus: v příkladech 5.–6. spočtěte zadanou limitu pomocí Taylorových polynomů:

5. (0,5 bodu)

$$\lim_{x\to0}\frac{\cosh x-\sqrt{\cos x}}{x^2}$$

Pamatujeme si tyto Taylorovy polynomy v nule:

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} + o(y)$$

Protože ve jmenovateli je x^2, stačí nám všude T.p. stupně 2, ověřte si ale, že v T.p. pro $\sqrt{1+y}$ stačí stupeň 1. Z nich odvodíme dosazením $y = -\frac{x^2}{2}$:

$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)$$

a proto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \sqrt{\cos x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+\frac{x^2}{2}) - (1-\frac{x^2}{4}) + o(x^2)}{x^2} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

6. (0,5 bodu)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x+x^2) - \sin x + 3\cos x - 4}{\operatorname{arctg}^3 x}$$

Především si limitu upravíme na součin

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x+x^2) - \sin x + 3\cos x - 4}{x^3} \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\operatorname{arctg} x}\right)^3$$

a druhá limita je zřejmě rovna jedné – to můžeme zjistit buď elementárně (substitucí $x = \operatorname{tg} y, y \to 0$) nebo určením T.p. stupně 1 pro arcustangens, což lze snadno buď z definice T.p. ($\operatorname{arctg}(0) = 0, \operatorname{arctg}'(0) = 1$), případně určením T.p. funkce tangens a dopočtem T.p. inverzní funkce – ale to je pro stupeň jedna zbytečně pracné (zato může být výhodnější pro T.p. vyšších stupňů, kde je naopak pracnější derivování).

Pamatujeme si dále tyto Taylorovy polynomy v nule (z výše uvedeného je zřejmé, že potřebujeme stupeň 3):

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Dosazením do čitatele získáváme

$$\begin{aligned}
\exp(x+x^2) - \sin x + 3\cos x - 4 = \\
&= 1 + x + x^2 + \frac{1}{2}(x^2 + 2x^3 + o(x^3)) + \frac{1}{6}((x^3) + o(x^3)) - \\
&- (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) + 3(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)) - 4 = \\
&= \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x+x^2) - \sin x + 3\cos x - 4}{\operatorname{arctg}^3 x} = \boxed{\frac{4}{3}}.$$

Lukáš Krump, 10.1.2025