

Důležité substituce: převod na racionální funkce

Jsou-li P, Q polynomy $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, pak $R := \frac{P}{Q}$ nazveme racionální funkce jedné reálné proměnné, platí $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Obecněji, jsou-li P, Q polynomy dvou reálných proměnných, tj. $P, Q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, kde $P(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j$ a $Q(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq m} b_{ij} x^i y^j$, pak $R := \frac{P}{Q}$ nazveme racionální funkce dvou reálných proměnných, platí $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$.

$$\text{(I)} \quad \int \mathbf{R}(e^{\alpha x}) dx$$

Substituce: $y = e^{\alpha x}, \quad x \in \mathbb{R}$

Tvar derivace: $dx = \frac{1}{\alpha y} dy$

Výsledek: $\int R(y) \frac{1}{\alpha y} dy$

$$\text{(II)} \quad \int \frac{\mathbf{R}(\ln x)}{x} dx$$

Substituce: $y = \ln x, \quad x > 0$

Tvar derivace: $\frac{dx}{x} = dy$

Výsledek: $\int R(y) dy$

$$\text{(III)} \quad \int \mathbf{R}\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{s}}\right) dx$$

Substituce: $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{s}}$

Podmínky: $ad-bc \neq 0; \quad s = 2k \implies \frac{ax+b}{cx+d} > 0, \quad s = 2k-1 \implies x \neq -\frac{d}{c}$

Inverze: $x = \frac{-dt^s + b}{ct^s - a}$

Tvar derivace: $dx = (ad-bc)s \frac{t^{s-1}}{(ct^s-a)^2} dt$

Výsledek: $(ad-bc)s \int \frac{\tilde{R}(t^s, t)t^{s-1}}{(ct^s-a)^2} dt$

$$\text{(IV)} \quad \int \mathbf{R}(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

Eulerovy substituce

Čtyři netriviální případy (někdy i dva najednou).

(1) $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2), \quad x_1 < x_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Substituce: $t = \left(\frac{x-x_1}{x-x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$ vede k **(III)**

(2) $a > 0$

Substituce: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t \implies x = (t^2 - c)/(b - 2\sqrt{at})$

(3) $c > 0$

Substituce: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + tx \implies x = (2\sqrt{ct} - b)/(a - t^2)$

(4) $a \leq 0$ a $ax^2 + bx + c$ nemá v \mathbb{R} kořen ($\implies c \leq 0$): odmocnina není v \mathbb{R} pro žádné x definována.

$$\boxed{\text{(V)} \quad \int \mathbf{R}(\cos x, \sin x) dx \quad \text{Goniometrické substituce}}$$

$$\text{Substituce: } y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Inverze: } x = 2 \operatorname{arctg} y \quad \text{Tvar derivace: } dx = \frac{2}{1+y^2} dy$$

$$\text{cosinus:} \quad \cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}$$

$$\text{sinus:} \quad \sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2y}{1 + y^2}$$

Zjednodušení:

$$(1) R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x) \implies \text{Substituce: } y = \sin x$$

$$(2) R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x) \implies \text{Substituce: } y = \cos x$$

$$(3) R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x) \implies \text{Substituce: } y = \operatorname{tg} x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{y^2}{1 + y^2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{y}{1 + y^2}$$

$$\boxed{\text{(VI)} \quad \int x^m (a + bx^n)^p dx, \quad m, n, p \in \mathbb{Q} \quad \text{Čebyševovy substituce}}$$

Umíme řešit pomocí elementárních funkcí pouze v následujících třech případech:

$$(1) p \in \mathbb{Z}. \text{ Pak položíme } m = m'/\ell, n = n'/\ell, \text{ kde } m', n' \text{ a } \ell \in \mathbb{Z}, \ell > 0.$$

$$\text{Substituce: } t = x^{\frac{1}{\ell}}$$

$$(2) (m+1)/n \in \mathbb{Z}, p = k/s, k, s \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Substituce: } t = (a + bx^n)^{\frac{1}{s}}$$

$$\text{Inverze: } x = \frac{(t^s - a)^{1/n}}{b^{1/n}} \quad \text{Tvar derivace: } dx = \frac{1}{nb^{1/n}} (t^s - a)^{\frac{1}{n} - 1} s t^{s-1} dt.$$

$$\begin{aligned} \text{Výsledek: } \int x^m (a + bx^n)^p dx &= \int \frac{1}{b^{\frac{m}{n}}} (t^s - a)^{\frac{m}{n}} t^k \frac{1}{nb^{\frac{1}{n}}} (t^s - a)^{\frac{1}{n} - 1} s t^{s-1} dt \\ &= \frac{s}{nb^{\frac{m+1}{n}}} \int t^{s+k-1} (t^s - a)^{\frac{m+1}{n} - 1} dt \end{aligned}$$

$$(3) \frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}, p = k/s, k, s \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Substituce: } t = (ax^{-n} + b)^{\frac{1}{s}}$$

$$\text{Inverze: } x = \left(\frac{a}{t^s - b}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{Tvar derivace: } dx = -\frac{a^{1/n}}{n} (t^s - b)^{-\frac{1}{n} - 1} s t^{s-1} dt$$

$$\begin{aligned} \text{Výsledek: } \int x^m (a + bx^n)^p dx &= \int x^m x^{np} (ax^{-n} + b)^{\frac{k}{s}} dx \\ &= \int \left(\frac{a}{t^s - b}\right)^{\frac{m}{n}} t^k \left(\frac{a}{t^s - b}\right)^{\frac{p}{n}} (t^s - b)^{-\frac{1}{n} - 1} s t^{s-1} dt \\ &= -\frac{a^{\frac{m+1}{n} + ps}}{n} \int t^{k+s-1} (t^s - b)^{-\left(\frac{m+1}{n} + p - 1\right)} dt \end{aligned}$$