Analýza II - 1. úkol

Josef Fruhauf

15.3.2021

Úloha 1

Označíme integrál I a využijeme periodicity integrandu:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + \sin^2 x} = 2\int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + \sin^2 x}$$

Použijeme standardní substituci:

$$\xi = \tan x \implies dx = \frac{d\xi}{1 + \xi^2} \; ; \; \sin^2 x = \frac{\xi^2}{1 + \xi^2}$$

Funkce tan je bijektivní na intervalu $(0, \pi)$.

$$I = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{3 + \frac{\xi^2}{1+\xi^2}} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{4\xi^2 + 3}$$

Použijeme druhou substituci:

$$\xi = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \omega \implies d\xi = \frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2 \omega d\omega$$

$$I = 2\int_0^{\pi} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2 \omega d\omega}{3 \sec^2 \omega} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi} d\omega = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Úloha 2

Zkoumáme konvergenci integrálu:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1 - x^2)} \tag{1}$$

Platí:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{1}{1 - x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x}(1 - x^2)}} = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{x} = 1 \implies \frac{1}{1 - x^2} \sim \frac{1}{\sqrt{x}(1 - x^2)} \text{ pro } x \to 1^-$$

Uvažujme integrál levé funkce na stejném intervalu:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \right) dx = \frac{1}{2} \left[-\ln(1 - x) + \ln(1 + x) \right]_{x=0}^{x=1}$$

Člen $\ln(1 - x)$ diverguje pro $x \to 1$, tedy celý integrál diverguje. Podle limitního srovnávacího kritéria, integrál (1) diverguje také.

Úloha 3

Postup je podobný jako v úloze 2. Integrand má dvě singularity na relevantním intervalu, v $x = 0$ a $x = 1$. Máme následující ekvivalence:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{1-x^2} = 1 \implies \frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}} \text{ pro } x \to 0^+$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}}} = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{x(1+x)} = \sqrt{2} \implies \frac{1}{\sqrt{1-x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}} \text{ pro } x \to 1^-$$

Integrál ekvivalentní funkce pro $x = 0$ je:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Tento integrál konverguje podle obecného pravidla pro x^p. Integrál druhé ekvivalentní funkce můžeme přepsat na integrál první pomocí substituce $u = 1 - x$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}}$$

takže konverguje také. Podle limitního srovnávacího kritéria, zkoumaný integrál je konvergentní.

Úloha 4

Vzorec pro plochu v polárních souřadnicích je:

$$A = \frac{1}{2}\int r^2 d\varphi$$

Dosazením,

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (4\sin^2\varphi)^2 d\varphi \\
&= 8\int_0^{2\pi} \sin^4\varphi \, d\varphi \\
&= 8\int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi \\
&= 2\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right) d\varphi \\
&= 4\pi - 8\int_0^{\pi} \cos 2\varphi \, d\varphi + 2\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 4\varphi}{2} d\varphi \\
&= 4\pi - 8\left[-\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} + \int_0^{2\pi} d\varphi + 4\int_0^{\pi/2} \cos 4\varphi \, d\varphi \\
&= 4\pi + 2\pi + 4\left[-\frac{\sin 4\varphi}{4}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \\
&= 6\pi
\end{aligned}$$

Úloha 5

Využijeme vzorec pro objem rotačního tělesa v polárních souřadnicích:

$$V = \frac{2}{3}\pi \int r^3 \sin\varphi d\varphi$$

V našem případě,

$$\begin{aligned}
V &= \frac{2}{3}\pi \int_0^\pi a^3(1+\cos\varphi)^3 \sin\varphi d\varphi \\
&= -\frac{2}{3}\pi a^3 \int_2^0 u^3 du \\
&= \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^2 u^3 du \\
&= \frac{2}{3}\pi a^3 \left[\frac{u^4}{4}\right]_{u=0}^{u=2} \\
&= \frac{8}{3}\pi a^3
\end{aligned}$$