

Domácí úkol č. 2 – Řešení

Ve všech úlohách boduju výpočet a nalezení (všech) řešení a jejich maximálních definičních oborů. Pokud jdou resp. nejdou některá řešení nalepovat, nezapomeňte to zdůvodnit. Jako nebodovanou část doporučuji provést zkoušku správnosti nalezených řešení a nakreslit obrázek, jak řešení vypadají, klidně i s použitím vhodného software.

1. (1 bod) Nalezněte řešení rovnice

$$y' = \frac{2xy^2}{1-x^2},$$

splňující $y(0) = 1$.

Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými. Jejím řešením je očividně $y = 0$, avšak toto řešení nesplňuje počáteční podmínku v nule. Také zřejmě musí platit $x \neq \pm 1$, a protože počáteční podmínka je zadána v nule, hledáme řešení nejvýše na intervalu $(-1, 1)$.

Pro $y \neq 0$ rovnici vydělíme, zintegrujeme a upravíme:

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y^2} &= \frac{2x}{1-x^2} \\ -\frac{1}{y} &= -\ln|1-x^2| - c, \quad c \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{y} &= \ln(1-x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Přičemž v posledním kroku jsme využili $1-x^2 > 0$. Odsud snadno

$$y_c(x) = \frac{1}{\ln(1-x^2) + c}.$$

Porovnáním se zadanou počáteční podmínkou dostáváme hodnotu konstanty $c = 1$, takže vyhovující řešení má tvar

$$y_1(x) = \frac{1}{\ln(1-x^2) + 1}.$$

(Pokud bychom v předchozím kroku měli např. $-c$ místo c , vyšla by zde jeho hodnota -1 .) Jeho definiční obor je $(-\sqrt{1-\frac{1}{e}}, \sqrt{1-\frac{1}{e}})$ (neobsahuje body ± 1) a limity y_1 v krajních bodech tohoto intervalu jsou nekonečné, takže lepení nepřichází v úvahu.

2. (1 bod) Nalezněte obecné řešení rovnice

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}.$$

Nejprve si poznamenejme, že musí být $x \neq 0, y \neq 0$ a že žádné očividné řešení tu není. Úloha pak jde řešit dvěma způsoby:

(1) Jako homogenní rovnice, kdy si všimneme, že pro $g(z) = z - \frac{1}{z}$ je zadaná rovnice ve tvaru $y' = g(\frac{y}{x})$. Použijeme tedy substituci $z(x) = \frac{y}{x}$, převedeme tak na rovnici se separovanými proměnnými

$$z' = -\frac{1}{x} \frac{1}{z}.$$

Obvyklým způsobem najdeme její řešení, a sice

$$z(x) = \pm \sqrt{c - \ln x^2}$$

a odsud

$$y(x) = \pm x \sqrt{c - \ln x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Toto řešení je definováno na $(-e^{c/2}, 0), (0, e^{c/2})$.

(2) Jako Bernoulliho rovnice, která je tvaru $y' - \frac{1}{x}y = -xy^{-1}$. Zde vynásobíme rovnici $2y$, takže řešíme

$$2y'y - \frac{2}{x}y^2 = -2x,$$

substituuujeme $w = y^2$ a máme tedy lineární rovnici prvního řádu

$$w' - \frac{2}{x}w = -2x.$$

Tu pak vyřešíme obvyklou metodou integračního faktoru, vyjde $w(x) = x^2(c - \ln x^2)$ a tedy opět $y(x) = \pm x \sqrt{c - \ln x^2}$.

Lepení nepřipadá v úvahu, protože jediný bod, kde se potkávají různá řešení, je nula, tam však není nic definováno. Nicméně (to už je bonus), kdybychom tutéž rovnici napsali ve tvaru bez zlomků, tj.

$$xyy' = y^2 - x^2,$$

lze dodefinovat v nule nulou, lepit tam na sebe řešení na intervalech vlevo a vpravo od nuly (i pro různá c), s tím, že v nule bude vždy derivace $\pm\infty$, podle znaménka u řešení $y(x)$.

Tady bych rád upozornil na jeden chybný argument, který se objevil u většího počtu z vás. Psali jste třeba „nejdou zde žádná konstantní řešení, takže není co s čím lepit“. Pozor, není to tak, že pokud se mají dvě řešení na sousedních intervalech k sobě lepit, tak jedno z nich musí být konstantní. Často se přece stane, že k sobě můžeme lepit i nekonstantní řešení, stačí jen ověřit, že v bodě styku jejich def. oborů se dají dodefinovat tak, že výsledná funkce je spojitá a má tam derivaci, tj. jednostranné derivace tam jsou shodné. (A viděli jsme takové příklady i na cvičení.)

3. (1 bod) Je dána rovnice

$$y' \cdot \sin 2x = 2(y + \cos x).$$

Najděte takové její řešení, které je omezené pro $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, a sice na maximálním intervalu, kde je spojitě.

Všimněme si nejprve, že ze zadání nevyplývají žádná omezení pro x ani pro y . Nejprve si rovnici upravíme na tvar

$$y' \cdot 2 \sin x \cos x = 2y + 2 \cos x,$$

vydělíme výrazem u y' a převedeme na druhou stranu, takže

$$y' - \frac{y}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x},$$

čímž jsme dostali tvar lineární rovnice 1. řádu a pokračujeme metodou integračního faktoru. Tedy pro $p(x) = -\frac{1}{\sin x \cos x}$ spočteme $P(x) = \int p(x) dx$, po chvílce integrování dostaneme $P(x) = \ln |\cotg x|$ a tedy integrační faktor $e^{P(x)} = |\cotg x|$. Ovšem jak víme ze cvičení, integrační faktor lze upravit nenulovým násobkem bez vlivu na výsledek, takže pro příjemnější počítání položíme I.F. rovný $\cotg x$. Dále píšeme vztah

$$y \cdot e^{P(x)} = \int q(x) e^{P(x)} dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x} + c,$$

takže máme obecné řešení

$$y_c(x) = -\frac{1}{\cos x} + c \operatorname{tg} x$$

pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ a $c \in \mathbb{R}$.

Nyní přidáme dodatečnou podmínku (tuto část úlohy mnoho z vás zcela vynechalo): pro $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ má být c takové, aby řešení y_c bylo omezené. Napíšeme-li si je ve tvaru

$$y_c(x) = \frac{c \sin x - 1}{\cos x},$$

vidíme, že jmenovatel $\cos x$ má v $\frac{\pi}{2}$ limitu 0, takže nutnou podmínkou omezenosti y_c je, aby také čitatel $c \sin x - 1$ měl limitu 0, což nastane pouze pro $c = 1$. Pak ověříme, že y_1 má v $\frac{\pi}{2}$ konečnou (oboustrannou) limitu, což se dá udělat třeba l'Hospitalovým pravidlem: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin x} = 0$. Toto řešení y_1 splňuje tedy zadanou podmínku omezenosti, v bodě $\frac{\pi}{2}$ je dodefinujeme nulou a ověříme, že i jeho jednostranné derivace v $\frac{\pi}{2}$ jsou stejné (rovné $\frac{1}{2}$), takže řešení lze slepit na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. V koncových bodech tohoto intervalu už má ovšem funkce jednostranné limity $\pm\infty$, takže zde už lepit nelze. Konečná odpověď je tedy

$$y_1(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), x \neq \frac{\pi}{2}; \quad y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

4. (1 bod) Najděte řešení rovnice

$$xy' + y = y^2 \ln x,$$

splňující $y(1) = 1$, na maximálním intervalu, kde je spojitě.

Jedná se o Bernoulliho rovnici, zřejmě musí být $x > 0$ a také hned vidíme triviální řešení $y = 0$ v $\mathbb{R}$, to však nesplňuje počáteční podmínku. Pro $y \neq 0$ rovnici upravíme na

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2,$$

vydělíme y^2 , takže

$$y'y^{-2} + \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{\ln x}{x}$$

a po substituci $z = y^{-1}$ a mírné úpravě dostáváme

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x}.$$

Tuto LDR 1. řádu řešíme opět metodou integračního faktoru, ten bude $\frac{1}{x}$, řešení $z(x) = \ln x + 1 + cx$ a tedy obecné řešení

$$y_c(x) = \frac{1}{\ln x + 1 + cx}$$

(definiční obor si nechme až na závěr k řešení Cauchyho úlohy). Počáteční podmínka $y_c(1) = 1$ znamená $\frac{1}{\ln 1 + 1 + c} = 1$, což platí jedině pro $c = 0$. Řešením je tedy

$$y_0(x) = \frac{1}{\ln x + 1}.$$

Zřejmě musí platit $x \neq \frac{1}{e}$, takže mnoho z vás napsalo, že definičním oborem tohoto řešení jsou intervaly $(0, \frac{1}{e})$ a $(\frac{1}{e}, +\infty)$, ale za to jsem strhával bodíky, protože řešení jsme hledali na intervalu, kde je spojitě, takže správným definičním oborem je zde pouze interval

$\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ – tatáž funkce na $(0, \frac{1}{e})$ se s touto slepit nedá, jednostranné limity v bodě $\frac{1}{e}$ jsou $\pm\infty$ a řešení na intervalu vlevo nemá žádný vztah k zadání Cauchyho úlohy.

Lukáš Krump, 25.3.2025