

Domácí úkol č. 3 – Řešení

1. (1 bod) Nalezněte obecné řešení rovnice

$$y'' + 4y' - 5y = 2e^x \sin^2 x$$

Snadno zjistíme, že fundamentální systém je $\{e^x, e^{-5x}\}$. Pravá strana sice není ve speciálním tvaru, ale lze na něj snadno převést:

$$2e^x \sin^2 x = 2e^x \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = e^x - e^x \cos 2x,$$

jedná se tedy o součet dvou pravých stran ve speciálním tvaru.

Pro pravou stranu $f_1(x) = e^x$ hledáme partikulární řešení ve tvaru $y_{P1}(x) = Axe^x$, protože funkce e^x je ve F.S. (ekvivalentně 1 je (jednonásobným) kořenem char. polynomu). Spočteme $y'_{P1}(x) = A(x+1)e^x$, $y''_{P1}(x) = A(x+2)e^x$, dosazením do rovnice s pravou stranou f_1 dostáváme $6Ae^x = e^x$, proto $A = \frac{1}{6}$ a $y_{P1}(x) = \frac{1}{6}xe^x$.

Pro pravou stranu $f_2(x) = e^x \cos 2x$ hledáme partikulární řešení ve tvaru $y_{P2}(x) = e^x(B \cos 2x + C \sin 2x)$, protože $e^x \cos 2x$ není ve F.S. (ekvivalentně, $1 + 2i$ není kořenem char. polynomu). Spočteme $y'_{P2}(x) = e^x((B + 2C) \cos 2x + (C - 2B) \sin 2x)$, $y''_{P2}(x) = e^x((-3B + 4C) \cos 2x + (-4B - 3C) \sin 2x)$. Dosazením do rovnice s pravou stranou f_2 dostáváme soustavu $-4B + 12C = 1$, $-12B - 4C = 0$, která má řešení $B = -\frac{1}{40}$, $C = \frac{3}{40}$. Proto $y_{P2}(x) = e^x(-\frac{1}{40} \cos 2x + \frac{3}{40} \sin 2x)$ a obecné řešení je tvaru

$$y(x) = a_1 e^x + a_2 e^{-5x} + \frac{1}{6} x e^x + e^x \left(-\frac{1}{40} \cos 2x + \frac{3}{40} \sin 2x \right), \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

2. (1 bod) Nalezněte obecné řešení rovnice

$$y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Snadno zjistíme, že fundamentální systém je $\{e^x, e^{-x}\}$ a že pravá strana není speciálního tvaru, takže musíme použít variaci konstant. Položíme tedy

$$\begin{aligned} y_P &= c_1 e^x + c_2 e^{-x} \\ c'_1 e^x + c'_2 e^{-x} &= 0 \\ c'_1 e^x - c'_2 e^{-x} &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{aligned}$$

Úpravami dostaneme

$$c_1(x) = \int \frac{e^{-x}}{2} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{e^{-x}}{2} + \operatorname{arctg} e^x$$

a

$$c_2(x) = - \int \frac{e^x}{2} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = -\frac{e^x}{2} + \operatorname{arctg} e^x$$

(kde jsme použili substituci $t = e^{-x}$ resp. $t = e^x$, další detaily integrace vynechávám), takže závěrem

$$\boxed{y = a_1 e^x + a_2 e^{-x} + (e^x + e^{-x}) \operatorname{arctg} e^x}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Pozoruhodné je, že při jiném postupu integrace můžou vyjít funkce $c_1(x), c_2(x)$ a tedy i zápis celkového řešení v jiném tvaru, např. některým z vás vyšlo

$$y = b_1 e^x + b_2 e^{-x} - e^x \operatorname{arctg} e^{-x} + e^{-x} \operatorname{arctg} e^x, \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

což vypadá na první pohled sice trochu podobně, ale je to totéž? Stačí si uvědomit, že pro kladná t je $\operatorname{arctg} \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t = \operatorname{arccotg} t$ (pro záporná t je to jinak), a pak se dají tyto dva tvary obecného řešení na sebe převést s tím, že $a_1 = \frac{\pi}{2} - b_1, a_2 = b_2$.

3. (1 bod) Vyšetřete konvergenci řady, všechny kroky postupu řádně zdůvodněte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{(n^2)}}$$

Jedná se o řadu s nezápornými členy a hodí se zde limitní podílové kritérium:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0,$$

což stačí zdůvodnit škálovacími limitami (které se dají odvodit z l'Hospitalova pravidla). Proto řada konverguje.

4. (1 bod) Vyšetřete konvergenci řady, všechny kroky postupu řádně zdůvodněte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n^2 + n + 1)^{\frac{n}{2}}}$$

Jedná se o řadu s nezápornými členy a hodí se zde limitní odmocninové kritérium:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(2n^2 + n + 1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

a proto řada konverguje.