

Domácí úkol č. 4, Termín odevzdání: 16.12.2025.

Všechny kroky řádně zdůvodněte.

1. (1 bod) Spočtěte

$$F(a) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} dx$$

pro $a \in (-1, +\infty)$. Pomůže vám věta o derivaci integrálu podle parametru.

2. (1 bod) Spočtěte

$$F(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx$$

Pro které hodnoty a, b integrál konverguje?

3. (1 bod) Spočtěte

$$F(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} e^{-bx} dx$$

pro $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_+$ pomocí derivování podle vhodně zvoleného parametru.

4. (1 bod) Je dána funkce

$$F(a) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx$$

pro $a \in \langle 0, +\infty \rangle$. Ukažte, že pro všechna $a \in \mathbb{R}_+$ platí $F''(a) + F(a) = \frac{1}{a}$. Načrtněte graf funkce $F(a)$.