Funkce více proměnných

Vázané extrémy

Nalezněte extrémy dané funkce vzhledem k vazbě

1. $xy; \quad x + y = 1$
2. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}; \quad x^2 + y^2 = 1$
3. $x^2 + y^2; \quad \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$
4. $x^m y^n z^p; \quad x + y + z = a, \qquad m,\ n,\ p,\ a > 0$
5. $\sin x \sin y \sin z; \quad x + y + z = \dfrac{\pi}{2}, \qquad x,\ y,\ z > 0$
6. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^p; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = a, \qquad p > 1,\ a \geq 0.$

   Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce na uvedené množině

7. $x - 2y - 3; \quad 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x + y \leq 1$
8. $x^2 - xy + y^2; \quad |x| + |y| \leq 1$
9. $x^2 + y^2 - 12x + 16y; \quad x^2 + y^2 \leq 25$
10. $x + y + z; \quad x^2 + y^2 \leq z \leq 1.$
11. Při jakých rozměrech má kvádr daného objemu nejmenší povrch?
12. Do daného kužele vepište hranol o n-úhelníkové podstavě, který má maximální objem.
13. Najděte vzdálenost bodu (p, q, r) od roviny $ax + by + cz + d = 0$.
14. Najděte vzdálenost d dvou mimoběžek

$$
\begin{array}{ll}
x = X_1 + at & x = X_2 + pt \\
y = Y_1 + bt & y = Y_2 + qt \\
z = Z_1 + ct & z = Z_2 + rt\,.
\end{array}
$$

15. Pomocí hledání vázaných extrémů dokažte
a) AG nerovnost $\frac{a_1+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$, $a_i \geq 0$
b) Hölderovu nerovnost $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n y_i^q)^{\frac{1}{q}}$, x_i, $y_i \geq 0$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

16. V počátku kartézských souřadnic je umístěn bodový náboj Q.
a) Jaké bodové náboje Q_A, Q_B, Q_C musíme umístit do bodů $A = (3,0,0)$, $B = (0,3,0)$ $C = (0,0,4)$, aby náboj q v bodě $(1,1,1)$ byl v rovnováze.
b) Bude tato rovnováha stabilní?

Věta o regulárním zobrazení

17. Vyřešte rovnici $(z_y)^2 z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (z_x)^2 z_{yy} = 0$ tím, že položíte $x = u$, $y = v$, $z = w$ a přepíšete ji na rovnici pro funkci u proměnných v a w.

18. Vyjádřete první složku f_x vektoru $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$ ve sférických souřadnicích $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = r \cos\theta$.

    Přepište do nových proměnných

19. $x^2 z_x + y^2 z_y = z^2$, $u = x$, $v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$, $w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$

20. $z_{xx} + z_{yy} = 0$, $u = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$

21. $x^2 z_{xx} - (x^2 + y^2) z_{xy} + y^2 z_{yy} = 0$, $u = x + y$, $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.