Sada příkladů 2/5

Číselné řady

Číselné řady s nezápornými členy

1. Nalezněte n-tý částečný součet a součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 .$$

2. Spočtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]}}{2^n} .$$

3. Spočtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a+nd)q^n , \quad a, d \in \mathbb{R} , \quad |q| < 1 .$$

Sečtěte

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} .$$

5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} .$$

6. Na základě elementárních úvah rozhodněte zda řady konvergují či divergují

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n} .$$

Použitím kritérií pro konvergenci řad s nezápornými členy rozhodněte o konvergenci či divergenci následujících řad. Pokud řada obsahuje parametry, proveďte vzhledem k nim diskusi

7.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)$$

8.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

9.
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$$

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$$

11.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{(n)^{\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

12.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^{\alpha}} - 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

13.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1)$$

14.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \ldots (4n-3)}$$

15.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

16.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n})^n}$$

17.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n^2+n+1)^{\frac{n}{2}}}$$

18.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}, \quad p \in \mathbb{R}$$

19.
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

20.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt[3]{n}}$$

21.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \frac{1}{n^q}, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

22.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\Big)^p, \quad p \in \mathbb{R}.$$

ČÍSELNÉ ŘADY S NEZÁPORNÝMI ČLENY

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. (n-tý) částečný součet: $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Součet řady: $s = \lim s_n$, pokud existuje, píšeme $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Nutná podmínka konvergence řady: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Terminologie (konvergence/divergence) je stejná jako u Newtonova integrálu

Srovnávací kritérium: $a_k \in \mathbb{R}$, $b_k \geq 0$. Nechť $|a_k| \leq b_k$. Pak $\sum b_k$ konverguje $\Rightarrow \sum a_k$ konv.

Srovnávací kritérium II: $a_k, b_k \geq 0$. $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$ $\forall k \geq k_0$. Pak $\sum b_k$ konv. $\Rightarrow \sum a_k$ konv.

Limitní srovnávací kritérium: Nechť $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \in (0,\infty)$. Pak $\sum b_k$ konv. $\Leftrightarrow \sum a_k$ konv.

Je-li $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 0$, pak $\sum b_k$ konv. $\Rightarrow \sum a_k$ konv.

Integrální kritérium: Nechť $a \in \mathbb{N}$, f je spojitá, kladná a nerostoucí na $[a,\infty)$. Pak $\sum_{a}^{\infty} f(k)$ konverguje $\Leftrightarrow$ $(N)\int_a^{\infty} f(x)dx$ konverguje

Odmocninové kritérium: Nechť existuje $q \in [0,1)$ t.ž. $\sqrt[k]{a_k} \leq q$ $\forall k \geq k_0$. Pak $\sum a_k$ konv.

Speciálně pokud $\lim \sqrt[k]{a_k} < 1$, pak $\sum a_k$ konv.

Naopak pokud $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ $\forall k \geq k_0$, pak $\sum a_k$ div.

Speciálně pokud $\lim \sqrt[k]{a_k} > 1$, pak $\sum a_k$ div.

Odmocninové kritérium neříká nic pro případ $\lim \sqrt[k]{a_k} = 1$.

Podílové kritérium: Totéž, co odmocninové, jen místo $\sqrt[k]{a_k}$ máme $\frac{a_{k+1}}{a_k}$.

Opět, pokud $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$, tak nevíme nic.

Raabeho kritérium: Nechť existuje $q > 1$ t.ž. $k\cdot\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) \geq q$ $\forall k \geq k_0$. Pak $\sum a_k$ konv.

Speciálně pokud $\lim_{k\to\infty} k\cdot\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) > 1 \Rightarrow \sum a_k$ konv.

Naopak pokud $k\cdot\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) \leq 1$ $\forall k \geq k_0$, pak $\sum a_k$ div.

Speciálně pokud $\lim_{k\to\infty} k\cdot\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) < 1$, pak $\sum a_k$ div.

Gaussovo kritérium: Nechť ex. $p, q \in \mathbb{R}$, $\varepsilon, C > 0$ tak, že $\frac{a_k}{a_{k+1}} = p + \frac{q}{k} + \frac{t_k}{k^{1+\varepsilon}}$, kde $|t_k| \leq C$.

Pak
a) $p > 1 \Rightarrow \sum$ konv., $p < 1 \Rightarrow \sum a_k$ div.
b) $p = 1, q > 1 \Rightarrow \sum a_k$ konv.
c) $p = 1, q \leq 1 \Rightarrow \sum a_k$ div.

1) Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ je očividně nekonečno, jde o rostoucí posloupnost a_n s nekonečnou limitou. $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, viz. první cvičení v ZS

2) Napišme si naši řadu tak, ať vidíme, co se děje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[n/2]}}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} - \frac{1}{128} \dots$$

Rozdělíme na 2 řady: $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32} - \frac{1}{128} \dots = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = A$

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = B$$

Známe vzorec pro součet geometrické řady, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ pro $|q|<1$.

Proto $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{1}{4})} = \frac{2}{5}$ a $B = \frac{1}{1-(-\frac{1}{4})} - 1 = \frac{4}{5} - 1 = -\frac{1}{5}$. $A+B = \sum \frac{(-1)^{[n/2]}}{2^n} = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}$

3) Napišme $\sum_{n=1}^{\infty} (a+nd)q^n = a \sum_{n=1}^{\infty} q^n + d \sum_{n=1}^{\infty} nq^n$. O první řadě víme, že konverguje, druhá řada konverguje dle odmocninového kritéria: $\sqrt[n]{|nq^n|} = |q| \cdot \sqrt[n]{n} \to |q| < 1$.

Najdeme součet $F(q) = \sum_{n=1}^{\infty} nq^n = q + 2q^2 + 3q^3 + \dots$

$$qF(q) = \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n+1} = q^2 + 2q^3 + \dots$$

$$F(q) - qF(q) = \dots = q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q}$$

Odtud $F(q) = \frac{q}{(1-q)^2}$.

Dostáváme $\sum_{n=1}^{\infty} (a+nd)q^n = a\frac{q}{1-q} + d\frac{q}{(1-q)^2} = \underline{\underline{\frac{q \cdot (a(1-q)+d)}{(1-q)^2}}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right)$ a vidíme, že až na $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ se vše ostatní odečte. Proto výsledek je $\frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{11}{18}}}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \dots$, téměř vše se odečte a výsledek tak je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \underline{\underline{1}}$

6) Základní znalosti: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ konverguje pro $p > 1$. Diverguje pro $p \leq 1$. Speciálně $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje (viz integrální kritérium a konvergence integrálu $(N)\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$: (LSK) s řadou $\sum \frac{1}{n^2}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \Rightarrow$

$\sum \frac{1}{n^2+1}$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje. To je základní řada. $\Rightarrow$ řada konverguje

$\sum_{1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$: (LSK) s řadou $\sum \frac{1}{n}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n(n+2)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n(n+2)} = 1 \Rightarrow$

$\sum \frac{n+1}{n(n+2)}$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum \frac{1}{n}$ konverguje. Ta ale diverguje $\Rightarrow$ řada diverguje

$\sum_{1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4n}\right)$: (LSK) s řadou $\sum \frac{1}{n}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4n}\right) = \left|x = \frac{1}{n}\right| = \lim_{x\to 0_+} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{x} =$

$= \lim_{x\to 0_+} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{x} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)^{-1} = \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \frac{\pi}{4}$

Proto $\sum \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4n}\right)$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum \frac{1}{n}$ konverguje. Ta ale diverguje $\Rightarrow$ řada diverguje

Závěr: U těchto typů řad uhodneme chování v nekonečnu a pak jej dokážeme pomocí LSK.

---

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}}_{a_n}$. Použijeme (LSK) s řadou $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$.

Očividně $a_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ pro $n \to +\infty$ a tak řada konverguje

---

8) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln n \cdot \ln \ln n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln \ln n}}$

Pro členy od nějakého n_0 platí $\ln \ln n \geq 2$ a proto $\frac{1}{n^{\ln \ln n}} \leq \frac{1}{n^2}$

Podle (SK) tak $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje $\Rightarrow$ $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ konverguje

---

9) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$ Tady nám už trik z 8) nepomůže a naopak ukážeme, že řada diverguje srovnáním s harmonickou řadou.

Chceme $\frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} \geq \frac{1}{n}$. $\Leftrightarrow$ $(\ln n)^{\ln \ln n} \leq n$ $\quad t := \ln n$

$$t^{\ln t} \leq e^t$$

$$e^{(\ln t)^2} \leq e^t$$

$$(\ln t)^2 \leq t$$

$\ln t \leq \sqrt{t}$, což platí minimálně pro dost velká t (škálovací limita)

řada diverguje

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n}$ Členy v čitateli a jmenovateli vypadají podezřele podobně

Máme $a_n = \sqrt[n]{n}\cdot\left(\frac{n^n}{(n+\frac{1}{n})^n}\right) = \sqrt[n]{n}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\right)^n$

$\downarrow 1$ $\quad\downarrow ?$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\right)^n = \lim \exp n\cdot\log\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = \exp\lim n\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}-1\right) = \exp\lim\frac{-n}{n^2+1} = e^0 = 1$$

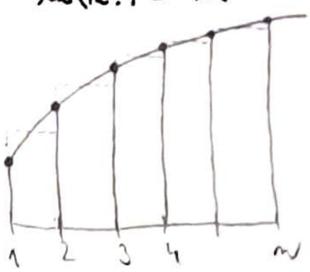
Vidíme, že $a_n \to 1$, je porušena nutná podmínka konvergence a řada diverguje

---

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^\alpha}$ Z nutné podmínky konvergence: $\alpha < 0 \Rightarrow$ diverguje

Dále potřebujeme znát chování $n!$, případně $\ln(n!)$. Máme

$\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n = \sum_{k=1}^{n} \ln k$ ... to trochu připomíná $\int_1 \ln x$.



Obsah plochy pod křivkou na intervalu délky 1 aproximujeme hodnotou $(k-(k-1))\cdot\frac{f(k-1)+f(k)}{2}$

délka

průměr krajních hodnot.

Odtud $\int_1^n \ln x\,dx \simeq \frac{\ln 1}{2} + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln(n-1) + \frac{\ln n}{2}$

$= \sum_{k=1}^{n} \ln k - \frac{\ln n}{2} = \ln n! - \frac{\ln n}{2}$

Ale $\int_1^n \ln x\,dx = \left[x\ln x - x\right]_1^n = n\ln n - n + 1$

Odtud $\boxed{\ln n! \sim n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + 1}$ Navíc PS $= \ln\left[\frac{n^n}{e^n}\cdot\sqrt{n}\,e\right]$

a odtud $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{n}$

Lze ukázat, že $n! = \sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ .... Stirlingova formule

Pro náš případ je důležité asymptotické chování $\ln n! \sim n\ln n$ a proto

$\alpha \le 1$: diverguje, protože není splněna nutná podmínka konvergence

$\alpha \in (1,2]$: diverguje: Srovnávacím kritériem $\frac{\ln n!}{n^2} > \frac{1}{n}$ a $\sum\frac{1}{n}$ diverguje

(podobně pro $\alpha < 2$)

$\alpha \in (2,\infty)$: konverguje: Pro dané $\alpha \in (2,\infty)$ definujeme $\varepsilon = \frac{\alpha-2}{2} > 0$

a srovnávacím kritériem $\frac{\ln n!}{n^\alpha} < \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$, $\sum\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ konverguje

[používáme, že $\frac{\ln n}{n^\varepsilon} \to 0$ pro $n \to \infty$]

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{n^\alpha}-1\right)$ Opět očividně $\underline{\alpha \geq 0 \Rightarrow \text{diverguje}}$, protože není splněna nutná podmínka

$$a_n = n^{n^\alpha}-1 = e^{n^\alpha \ln n}-1 = \underbrace{\frac{e^{n^\alpha \ln n}-1}{n^\alpha \ln n}}_{\gamma_n}\cdot n^\alpha \ln n =: \gamma_n n^\alpha \ln n$$

Víme $\lim_{n\to\infty}\gamma_n = 1$, takže $\frac{1}{2}<\gamma_n<2$ alespoň pro dostatečně velká n.

Podle (LSK) $\sum a_n$ konv. $\Leftrightarrow$ $\sum n^\alpha \ln n$ konverguje.

Pro $-\alpha \in (0,1]$ $\underline{\text{diverguje}}$, protože $\frac{\ln n}{n^{-\alpha}} \geq \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ a $\sum \frac{1}{n}$ diverguje

Pro $-\alpha \in (1,\infty)$ $\underline{\text{konverguje}}$, protože $\frac{\ln n}{n^{-\alpha}} \leq \frac{1}{n^{-\alpha-\varepsilon}}$ a ε lze zvolit lib., aby $-\alpha-\varepsilon>1$ a $\sum \frac{1}{n^{-\alpha-\varepsilon}}$ konverguje

---

13) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{n^2+1}}-1$: $a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}}-1 = e^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1 = \frac{e^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1}{\frac{\ln n}{n^2+1}}\cdot\frac{\ln n}{n^2+1} =: \gamma_n\cdot\frac{\ln n}{n^2+1}$

Protože $\lim \gamma_n = 1$, dle (LSK) $\sum a_n$ konv. $\Leftrightarrow$ $\sum \frac{\ln n}{n^2+1}$ konv.

Dle (SK) $\frac{\ln n}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ pro dost. velká n, $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ konverguje $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{řada konverguje}}}$

---

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$ Podílové kritérium: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3k-1)(3k+2)}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4k-3)(4k+1)}}{\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3k-1)}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4k-3)}} = \frac{3k+2}{4k+1}$

$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim \frac{3k+2}{4k+1} = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{řada konverguje}}}$

---

15) DÚ

---

16) $\sum \frac{n^2}{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}\right)^n}$: $a_n = \frac{n^2}{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}\right)^n}$. $\frac{\pi}{3} > 1$, toho využijeme.

Odmocninové kritérium: $\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{k^2}\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{3}+\frac{1}{k}}$

$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{k^2}\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{3}+1/k} = \lim \frac{1}{\frac{\pi}{3}+1/k} = \frac{3}{\pi} < 1 \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{řada konverguje}}}$

---

17) DÚ

---

18) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$: $\boxed{\begin{array}{l} p>1 \text{ konverguje} \\ p\leq 1 \text{ diverguje}\end{array}}$ dle integrálního kritéria: $\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p}dx = \int_{\ln 2}^{\infty}\frac{1}{t^p}dt$ $t=\ln x$

---

19) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$: $\boxed{\begin{array}{l} p>1,\ q\in\mathbb{R}: \text{konverguje} \\ p<1,\ q\in\mathbb{R}: \text{diverguje}\end{array}}$: srovnávacím kritériem, $(\ln\ln n)^q \leq (\ln n)^\varepsilon$ pro libovolné $\varepsilon > 0$.

$\boxed{\begin{array}{l} p=1,\ q>1 \text{ konverguje} \\ p=1,\ q\leq 1 \text{ diverguje}\end{array}}$ Integrálním kritériem: $\int_3^\infty \frac{1\,dx}{x\ln x(\ln\ln x)^q} = \int_{\ln\ln 3}^{\infty}\frac{1}{t^q}dt$, $t=\ln\ln x$

20) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$ $\quad a_n = e^{-n^{1/3}}$ $\quad$ Odmocninové kritérium nepomůže

$$\sqrt[n]{a_n} = e^{-n^{-2/3}} \to 1.$$

Integrální kritérium: $\int_1^{\infty} e^{-x^{1/3}}\,dx = \left|\begin{matrix} x = y^3 \\ dx = 3y^2 dy \end{matrix}\right| = \int_1^{\infty} e^{-y}\cdot 3y^2\,dy$ .... můžeme dopočítat

nebo integrální kritérium zpět: $\sum e^{-n}\, 3n^2$ konverguje? Zde odmocninové kritérium pomůže! $\sqrt[n]{e^{-n}\cdot 3n^2} = e^{-1}\cdot \sqrt[n]{3n^2} \to e^{-1} < 1 \Rightarrow$ řada konverguje

---

21) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdot\ldots\cdot(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}$ $\quad$ Očividně: $p \in \{0,-1,-2,\ldots\}$, q lib. $\Rightarrow$ řada konverguje protože má konečný počet nenulových členů

Podílové krit.: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{p+k}{1+k}\cdot\left(\frac{k}{k+1}\right)^q \to 1$, takže nic nevíme

Raabeho krit.: $k\cdot\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right) = \left(\frac{k+1}{k+p}\cdot\frac{(k+1)^q}{k^q}-1\right)\cdot k = \frac{(k+1)^{q+1}-k^q\cdot(k+p)}{k^q\cdot(k+p)}\cdot k = \left|\text{ozn. } x = \frac{1}{k}\right|$

$$= \frac{(1+x)^{q+1}-(1+px)}{1+px}\cdot\frac{1}{x} = \frac{[(q+1)-p]\cdot x + \frac{(q+1)q}{2}x^2 + o(x^2)}{1+px}\cdot\frac{1}{x} = \frac{q+1-p+\frac{(q+1)q}{2}x+o(x)}{1+px}$$

$\xrightarrow[x\to 0]{} q+1-p.$ $\quad$ Vidíme $q+1-p > 1$, tj. $q > p \Rightarrow$ konverguje

$q+1-p < 1$, tj. $q < p \Rightarrow$ diverguje

$q = p$: Gaussovo kritérium:

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(k+1)^{p+1}}{k^p\cdot(k+p)} = 1 + \frac{(k+1)^{p+1}-k^{p+1}-pk^p}{k^p(k+p)} = 1 + \frac{1}{k} + \frac{(k+1)^{p+1}-k^{p+1}-pk^p-k^p-pk^{p-1}}{k^p(k+p)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{k} + \frac{(k+1)^{p+1}-k^{p+1}-(p+1)k^p-pk^{p-1}}{k^p(k+p)}$$

$$= 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^{3/2}}\cdot\underbrace{\left[\frac{(k+1)^{p+1}-k^{p+1}-(p+1)k^p-pk^{p-1}}{k^{p-1/2}+pk^{p-3/2}}\right]}_{t_k}$$

Tvrdíme, že $|t_k| \le C$, dokonce ukážeme, že $t_k \to 0$.

Ozn. $x = 1/k$: $\quad t_k = \frac{x^{-(p+1)}\cdot\left[(1+x)^{p+1}-1-(p+1)x-px^2\right]}{x^{-p}\cdot\left[x^{1/2}+px^{3/2}\right]} = \frac{x^{-1}\cdot\left[1+(p+1)x+\frac{p(p+1)}{2}x^2+o(x^2)-1-(p+1)x-px^2\right]}{x^{1/2}+px^{3/2}} =$

$$= \frac{x\cdot\left(\frac{p(p+1)}{2}-p\right)+o(x)}{x^{1/2}+px^{3/2}} = \frac{\left(\frac{p(p+1)}{2}-p\right)\sqrt{x}+o(\sqrt{x})}{1+px} \to 0$$

Proto dle Gausse řada pro $p = q$ diverguje

22) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\right)^p$ Opět začneme podílovým kritériem

$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^p\to 1$, podílové krit. nepomůže

Raabeho krit.: $\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right)\cdot k=\left(\frac{(2k+2)^p}{(2k+1)^p}-1\right)\cdot k=\left(\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)^p-1\right)\cdot k=\frac{pk}{2k+1}+\frac{p(p-1)k}{2(2k+1)^2}+o\left(\frac{1}{k}\right)\to\frac{p}{2}$

Dle Raabeho tedy $p>2$ ... konverguje
$p<2$ ... diverguje

$p=2$: Gaussovo: $\frac{a_k}{a_{k+1}}=\left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^2=\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)^2=1+\frac{2}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)^2}=1+\frac{1}{k}+\left(\frac{2}{2k+1}-\frac{1}{k}+\frac{1}{(2k+1)^2}\right)=$

$$=1+\frac{1}{k}+\frac{1}{(2k+1)^2}-\frac{1}{k(2k+1)}=1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}\cdot\underbrace{\left[-\frac{k(k+1)}{(2k+1)^2}\right]}_{t_k,\ |t_k|\le C}$$

a dle Gausse $p=2$ diverguje