Sada příkladů 2/7

Mocninné řady

Určete poloměr konvergence daných mocninných řad a vyšetřete konvergenci na kružnici konvergence ($z \in \mathbb{C}$)

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{n5^n}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} z^n, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{n} z^n, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n^2} (z-1)^n$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R}$$

6. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} z^n$$

   $(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)\dots 4 \cdot 2,$
   $(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1$

7. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n \Big(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\Big)^p, \quad p \in \mathbb{R}.$$

8. Vyšetřete konvergenci zobecněné mocninné řady ($x \in \mathbb{R}$)

   $$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \Big(\frac{3x}{2+x^2}\Big)^n.$$

   Dokažte, že daná funkce je reálně analytická v počátku a nalezněte její Taylorovu řadu v nule, včetně intervalu konvergence

9. $\sin^2 x$

10. $\sqrt{1+x^2}$

11. $\displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,\mathrm{d}t.$

Sečtěte funkční řady

12.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-1}$$

13.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n.$$

Sečtěte číselné řady

14.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

15.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

16.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

Uvažujte $\operatorname{arctg} x$.

17.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}$$

Uvažujte $(1+x)\mathrm{e}^{-x} - (1-x)\mathrm{e}^{x}$.

18.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

19.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

20. Nalezněte řešení Besselovy rovnice pro $n = 0$ ve tvaru $K_0(x) = \ln x \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s + \sum_{s=1}^{\infty} b_s x^s$.

21. Hledejte řešení Besselovy rovnice $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ pro $n = \frac{1}{2}$ ve tvaru $x^{\varrho} \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s$ s vhodným ϱ.

MOCNINNÉ ŘADY

Pro $\{a_n\} \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ nazveme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ mocninnou řadou se středem v z_0

$$R := \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \in [0,\infty]$$ je poloměr konvergence řady $\sum a_k (z-z_0)^k$ a platí

(dále pro jednoduchost $z_0 := 0$):
- $\sum a_k z^k$ konverguje absolutně na $B_R = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$
- $\sum a_k z^k$ nekonverguje na $\{z \in \mathbb{C}; |z| > R\}$
- existuje-li $\lim \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$, pak se rovná R
- existuje-li $\lim \sqrt[k]{|a_k|}$, pak se rovná $\frac{1}{R}$

$|z| = R$ je třeba vyšetřovat zvlášť!

<u>Derivace řady</u>: $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$, R poloměr konvergence $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Pak
- R je poloměr konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ a
- pro $x \in (-R, R)$ platí $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$

Podobně pro <u>integraci</u>: Uvnitř konvergenčního kruhu: $\int \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + C$

<u>Taylorova řada</u>: fce f v bodě x_0 je $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Může se stát, že Taylorova řada se s původní funkcí shoduje jen v bodě x_0 (např. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ v nule)

Ale platí: $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť řada $\sum a_k (x-x_0)^k$ konverguje na $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.
Pak je $\sum a_k (x-x_0)^k$ Taylorovou řadou svého součtu v bodě x_0

Funkce f je reálně analytická na I, jestliže se dá na okolí každého bodu I vyjádřit Taylorovou řadou se středem v tomto bodě.

<u>Abelova věta</u>: $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$, $f(z) = \sum a_k z^k$ má poloměr konvergence R. Nechť $\varphi \in [0, 2\pi)$ je taková, že pro $z = Re^{i\varphi}$ řada $\sum a_k z^k$ konverguje. Pak fce $t \mapsto f(te^{i\varphi})$ je spojitá na $[0, R]$, a mimo jiné tak platí

$$f(Re^{i\varphi}) = \lim_{t \to R_-} f(te^{i\varphi})$$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{n5^n}$ střed $\underline{z_0=3}$

$a_n = \frac{1}{n5^n} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{5}\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to \frac{1}{5}$

$\Rightarrow \underline{R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = 5}$ ... poloměr konvergence

Řada konverguje absolutně pro $z \in \{w\in\mathbb{C} : |w-3|<5\}$ a nekonverguje pro $z\in\{w\in\mathbb{C}: |w-3|>5\}$

Kružnice konvergence: $|z-3|=5$, neboli $z-3 = 5\cdot e^{i\varphi}$ pro $\varphi\in[0,2\pi)$

Dosadíme do naší řady: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n\cdot e^{in\varphi}}{n\,5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\varphi}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}{n}$

Pro $\varphi\in(0,2\pi)$ má $\cos n\varphi$ a $\sin n\varphi$ omez. č.s., $\frac{1}{n}$ jde monotónně $\searrow 0$, takže řada konverguje podle Dirichletova kriteria (neabsolutně)

Pro $\varphi = 0$ jde o řadu $\sum\frac{1}{n}$, která diverguje.

Řada konverguje na $\{w\in\mathbb{C}: |w-3|\leq 5\}\setminus\{8\}$

---

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} z^n$ střed $\underline{z_0=0}$ $a_n = a^{n^2} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = a^n \to$ $+\infty$ pro $a>1$; 1 pro $a=1$; 0 pro $a\in(0,1)$

Proto $\underline{R=0}$ pro $a>1$
$\underline{R=1}$ pro $a=1$
$\underline{R=\infty}$ pro $a\in(0,1)$

Kružnici konvergence máme jen pro $a=1$, kdy je naše řada $\sum_{n=1} z^n$.

Dosadíme $z=e^{i\varphi}$: $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in\varphi} = \sum \sin n\varphi + i\cos n\varphi$ ... nekonverguje pro žádné φ (nutná podmínka porušena)

Závěr: Pro $a>1$ řada konverguje jen v bodě $z=0$
Pro $a=1$ řada konverguje na $\{w\in\mathbb{C}: |w|<1\}$
Pro $a\in(0,1)$ řada konverguje $\forall z\in\mathbb{C}$

---

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n+b^n}{n} z^n$ $a,b\in\mathbb{R}$. střed $\underline{z_0=0}$ $\boxed{\text{BÚNO } |a|\geq|b|}$ $\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\to 1$, zajímá nás

tak $\sqrt[n]{|a^n+b^n|} = |a|\cdot\left(\left|\left(\frac{a}{|a|}\right)^n + \left(\frac{b}{|a|}\right)^n\right|^{\frac{1}{n}}\right)$. Protože $|b|\leq|a|$ je $\frac{b}{|a|}\in[-1,1]$ a $\frac{a}{|a|}\in\{-1,1\}$

$\boxed{\begin{array}{l} a=b=0 \Rightarrow R=\infty \text{ triviální} \\ \text{Dále předpokládáme } |a|>0 \end{array}}$

proto $\limsup \left|\left(\frac{a}{|a|}\right)^n + \left(\frac{b}{|a|}\right)^n\right|^{\frac{1}{n}} = 1$. Limita nemusí existovat, viz $a=1$, $b=-1$.

Proto $\underline{R=\frac{1}{|a|}}$

Na kružnici konvergence: $z = \frac{1}{|a|}\cdot e^{i\varphi}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{a^n+b^n}{|a|^n}\right)\cdot e^{in\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n}\cdot\left(\left(\frac{a}{|a|}\right)^n+\left(\frac{b}{|a|}\right)^n\right) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n}\left(\frac{a}{|a|}\right)^n}_{(1)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n}\left(\frac{b}{|a|}\right)^n}_{(2)}$$

Pro $|b|<|a|$ řada (2) konverguje $\forall \varphi\in[0,2\pi)$ dle odmocninového kritéria (absolutně)

Pro $|b|=|a|$ máme 2 případy: $b=a$, $b=-a$. Rozlišíme dále také $a>0$, $a<0$.

(i) $a=b>0$: (1) a (2) jsou stejné řady a konvergují pro $\varphi\in(0,2\pi)$ dle Dirichleta, nekonvergují pro $\varphi=0$ (harmonická řada)

(ii) $a=b<0$: (1) a (2) jsou stejné řady, $e^{in\varphi}\cdot(-1)^n = e^{in(\varphi+\pi)}$, řady konvergují pro $\varphi\neq\pi$. nekonvergují pro $\varphi=\pi$.

(iii) $a>0, b=-a$: (1) konverguje pro $\varphi\neq 0$, (2) konverguje pro $\varphi\neq\pi$, součet konverguje pro $\varphi\neq 0$, $\varphi\neq\pi$.

(iv) $a<0, b=-a$: podobně jako (iii) jen se řady vymění.

Závěr: Pro $|b|<|a|$ řada konverguje na kružnici konvergence všude mimo bod $\varphi=0$ nebo $\varphi=\pi$ podle znaménka a.

Pro $|b|=|a|$ řada konverguje na kružnici všude mimo 1 bod (0 nebo π) nebo mimo 2 body (0 a π) podle případů (i) - (iv)

---

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(z-1)^n$ Střed $\underline{z_0=1}$, $\sqrt[n]{|a_n|} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e \Rightarrow \underline{R=\frac{1}{e}}$

Kružnice konvergence: $z = 1+\frac{1}{e}\cdot e^{i\varphi} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot e^{-n}\cdot e^{in\varphi}$

Viz příklad 8, z minulého cvičení, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}e^{-n} \neq 0$, na kružnici konvergence nekonverguje nikde!

---

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}$ Střed $\underline{z_0=0}$, $\sqrt[n]{|a_n|} = n^{p/n} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^p \longrightarrow 1 \quad \forall p\in\mathbb{R} \Rightarrow \underline{R=1}$

Kružnice konvergence: $z=e^{i\varphi} \Rightarrow \sum\frac{e^{in\varphi}}{n^p}$: $p\leq 0$: nekonverguje nikde (nutná podmínka)

$p\in(0,1]$: konverguje všude mimo $\varphi=0$ (Dirichlet)

$p>1$: konverguje všude absolutně.

---

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}z^n$ Střed $\underline{z_0=0}$, $a_n=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ Použijeme $\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{2k+3}{2k+2} \to 1 \Rightarrow \underline{R=1}$

Kružnice konvergence: $z=e^{i\varphi} \Rightarrow \sum e^{in\varphi}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$. Viz příklad 20, z minulého cvičení.

$\left\{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right\}$ je očividně monotónní a platí $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}} \longrightarrow 0$. Proto pro $\varphi\neq 0$ konverguje (Dirichlet)

Pro $\varphi=0$ nekonverguje: $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \geq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

7) DÚ

8) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{3x}{2+x^2}\right)^n$ Poloměr konvergence řady $\sum n^2 z^n$ je očividně $R=1$ a na kružnici konvergence nekonverguje nikde.

Musíme tak zajistit $\left|\frac{3x}{2+x^2}\right| < 1$, tj. $|3x| < 2+x^2$

$x \geq 0$: $x^2-3x+2>0$
$(x-1)(x-2)>0$
$\Rightarrow x \in [0,1) \cup (2,+\infty)$

$x \leq 0$: $x^2+3x+2>0$
$(x+1)(x+2)>0$
$\Rightarrow x \in (-\infty,-2) \cup (-1,0]$

Dohromady: zobecněná mocninná řada konverguje pro $x \in (-\infty,-2) \cup (-1,1) \cup (2,+\infty)$.

9) $\sin^2 x$ je součinem reálně analytických fcí, je proto také reálně analytická fce.

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} 2^{2k-1} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

poloměr zjistíme pomocí $\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \frac{1}{4}\cdot(2k+1)(2k+2) \to +\infty$, $\underline{R=+\infty}$

10) $\sqrt{1+x^2}$. Pro funkci $(1+y)^\alpha$ máme známý rozvoj do Taylorovy řady pro $|y|<1$

$$(1+y)^\alpha = 1+\alpha y + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} y^n$$

$y=x^2$ je přirozeně reálně analytická fce a složení r.a. fcí je opět r.a.

zde $(-1)!! = 1$

$$(1+x^2)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1-2n+2}{2}\right)}{n!} x^{2n} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!}\cdot(2n-3)!!\cdot x^{2n}$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

Poloměr konvergence: $\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \frac{2k+2}{2k-1} \to 1 \Rightarrow \underline{R=1}$

V krajních bodech $x=\pm 1$ řada konverguje (dle Dirichleta), viz také příklad 20) z minulého cv.

11) $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt$ Začneme funkcí $\operatorname{arctg} x$. Máme $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, což se hodí, to umíme rozvést do řady

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$ s poloměrem konvergence $\underline{R=1}$.

Dále postupujeme podle věty o derivování a integrování řad stále na stejném intervalu $(-1,1)$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C.$$ Srovnání pro $x=0$: $0 = \operatorname{arctg} 0 = C \Rightarrow C=0$.

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} \Rightarrow \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} + C$$ a opět $C=0$, viz

Tato řada konverguje i pro $x=\pm 1$.

12) Hledáme $f(x)$, aby $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-1}$

Upravíme řadu tak, abychom ji mohli sečíst přímo: $\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$

Označme $F(x) = \int \frac{f(t)}{t}dt$. Pak $F(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n x^{n-1} + C_1$

Označme $G(x) = \int F(t)dt$. Pak $G(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^n + C_1 x + C_2$

C_1, C_2 mohou být libovolné, zvolíme je tak, aby se nám to hodilo: $C_1 = C_2 = 1$.

Pak $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pro $x \in (-1,1)$.

$F(x) = G'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. $\frac{f(x)}{x} = F'(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$. Proto $\underline{\underline{f(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}}}$ na $(-1,1)$

---

13) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$. Konvergenci této řady už známe, platí na $[-1,1)$, viz 20) z minulého cvičení, $R=1$, viz také 6) z tohoto cvičení.

Sčítáme trikem, který není úplně zjevný.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{n-1} = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{n-1}$$

$$f'(x)\cdot(1-x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{n-1} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{n}}$$

Přejmenujeme n na $n-1$.
Tj. $k = n+1$, k začíná dvojkou

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{n-1} - \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!} x^{k-1}$$

a nyní sčítací index prostě přejmenujeme z k na n

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} x^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \left[\frac{2n-1}{2n} \cdot n - (n-1)\right] x^{n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} x^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f(x)$$

Dostáváme tak $2f'(x)(1-x) = f(x) + 1$, což je dif. rce se separ. proměnnými.

K ní máme podmínku $f(0) = 0$, kterou získáme dosazením $x = 0$ do zadání.

$$\ln|1+f| = \int \frac{df}{1+f} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}dx = \ln|1-x|^{-1/2} + C$$

$$|1+f| = K \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow f = \frac{C}{\sqrt{1-x}} - 1. \quad f(0) = C - 1 = 0 \Rightarrow C = 1$$

$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1}}$ na $x \in [-1,1)$. V bodě $x = -1$ používáme Abelovu větu.

14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$. Očividně konverguje a je to $f(\frac{1}{2})$, kde $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{pro } |x| < 1$$

$$f(x) = \int \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x) + C. \quad f(0) = 0, \text{ proto } C = 0.$$

$$f(x) = \ln \frac{1}{1-x}, \quad \underline{\underline{f(\tfrac{1}{2}) = \ln 2}}$$

---

15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ Očividně konverguje a je to $f(1)$, kde $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$

Sečteme $f(x)$: $\frac{f(x)}{x} = \sum_{1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-1}$, $F(x) := \int \frac{f(t)}{t} dt = \sum_{1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n$. (volíme $C=0$) $\frac{F(x)}{x} = \sum_{1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1}$

$G(x) := \int \frac{F(t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + C$, volíme $C = 1$ a $G(x) = e^x$, což platí na celém $\mathbb{R}$

Odtud zpětně $\frac{F(x)}{x} = (e^x)' = e^x \Rightarrow F(x) = xe^x$

$$\frac{f(x)}{x} = (xe^x)' = (x+1)e^x \Rightarrow f(x) = x(x+1)e^x \Rightarrow \underline{\underline{f(1) = 2e}}$$

---

16) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1}$ Máme zvážit $\operatorname{arctg} x$. Přes derivaci a zpětné integrování jsme si v příkladu 11) ukázali

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \text{ na } (-1,1)$$

Výsledná řada však konverguje také pro $x = \pm 1$ a dle Abelovy věty proto $(R=1, \varphi=0)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1} = \lim_{x \to 1} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

---

17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}$ Dle instrukcí se podíváme na $f(x) = (1+x)e^{-x} - (1-x)e^x$

$$= (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} - (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{na } \mathbb{R}$$

Upravíme tento výraz na jedinou sumu: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{n!} x^{n+1} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} + 1}{(n-1)!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \underbrace{\left[(-1)^n - 1 + n \cdot \left((-1)^{n-1} + 1 \right) \right]}_{a_n}$$

n sudé: $a_n = 0$
n liché: $a_n = -2 + 2n$ $\Big\} \Rightarrow n = 2k+1$: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot 4k = \sum_{k=1}^{\infty} 4k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Vidíme, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!} = \frac{f(1)}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2e}}}$

18) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. Verze této řady jsme potkali v příkladech 6) a 13)

Proto už víme, že tato řada je $f(-1)$, kde $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1$, příslušná Taylorova řada má poloměr konvergence $R=1$ a v bodě $x=-1$ používáme spojitost z Abelovy věty.

$$f(-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}-2}{2}}}$$

---

19) DÚ

---

20) Zajímá nás rovnice $x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0$ a řešení ve tvaru $K_0(x) = \ln x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$

Spočítáme
$$K_0'(x) = \sum_0^\infty a_n x^{n-1} + \sum_0^\infty n a_n \ln x \, x^{n-1} + \sum_1^\infty n b_n x^{n-1}$$
$$K_0''(x) = \sum_0^\infty (n-1) a_n x^{n-2} + \sum_0^\infty n a_n x^{n-2} + \sum_0^\infty n(n-1) a_n \ln x \, x^{n-2} + \sum_1^\infty n(n-1) b_n x^{n-2}$$

a odtud výraz
$$x^2 K_0'' + x K_0' + x^2 K_0 = \sum_0^\infty (n-1) a_n x^n + \sum_0^\infty n a_n x^n + \sum_0^\infty n(n-1) a_n \ln x \, x^n + \sum_1^\infty n(n-1) b_n x^n +$$
$$+ \sum_0^\infty a_n x^n + \sum_0^\infty n a_n \ln x \, x^n + \sum_1^\infty n b_n x^n$$
$$+ \sum_0^\infty a_n \ln x \, x^{n+2} + \sum_1^\infty b_n x^{n+2} = 0$$

Seskupíme členy: $\sum_0^\infty 2 n a_n x^n + \sum_0^\infty n^2 a_n \ln x \, x^n + \sum_1^\infty n^2 b_n x^n + \sum_2^\infty a_{n-2} \ln x \, x^n + \sum_3^\infty b_{n-2} x^n = 0$

Porovnáme koeficienty, u prvních tří musíme dávat pozor, řady začínají od různých n!

$n=0$: $0=0$. Speciálně a_0 bude libovolný parametr

$n=1$: $2a_1 x + a_1 x \ln x + b_1 x = 0$. $x \ln x$ se nemá s čím odečíst, proto $a_1 = 0$. Odtud také $b_1 = 0$.

$n=2$: $4a_2 x^2 + 4a_2 \ln x \, x^2 + 4b_2 x^2 + a_0 \ln x \, x^2 = 0 \Rightarrow 4a_2 + a_0 = 0$, tj. $\underline{a_2 = -\frac{a_0}{4}}$. $a_2 = b_2$, tj. $\underline{b_2 = \frac{a_0}{4}}$

$n \geq 3$ lib: dává rovnice: $\left.\begin{aligned} n^2 a_n + a_{n-2} &= 0 \\ 2n a_n + n^2 b_n + b_{n-2} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$, b_n si necháme na později.

Očividně pro lichá n je $a_n = 0$. $n = 2k$: $a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2^2 \cdot k^2}$. Odtud $\boxed{a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k} (k!)^2} \cdot a_0}$

Zpět k b_n: Opět pro lichá n je $b_n = 0$.

$$n = 2k: \; b_{2k} = -\frac{b_{2k-2}}{2^2 \cdot k^2} - \frac{1}{k} \cdot (-1)^k \frac{1}{2^{2k} (k!)^2} a_0$$

Lehce ověříme, že pro $H_k = \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{\ell}$ je $\boxed{b_{2k} = \frac{(-1)^{k+1} \cdot H_k}{2^{2k} \cdot (k!)^2} \cdot a_0}$

21) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ Řešení ve tvaru $x^\rho \sum_0^\infty a_n x^n$

$y' = \rho x^{\rho-1} \sum_0^\infty a_n x^n + x^\rho \sum_0 n a_n x^{n-1}$

$y'' = \rho(\rho-1) x^{\rho-2} \sum_0^\infty a_n x^n + 2\rho x^{\rho-1} \sum_0^\infty n a_n x^{n-1} + x^\rho \sum_0^\infty n(n-1) a_n x^{n-2}$

$\Rightarrow x^2y'' + xy' + x^2y - \frac{1}{4}y = \rho(\rho-1)x^\rho \sum_0^\infty a_n x^n + 2\rho x^\rho \sum_0^\infty n a_n x^n + x^\rho \sum_0^\infty n(n-1) a_n x^n +$

$+ \rho x^\rho \sum a_n x^n + x^\rho \sum_0^\infty n a_n x^n + x^\rho \sum_0^\infty a_n x^{n+2} - \frac{1}{4} x^\rho \sum_0^\infty a_n x^n = 0$

Seskupíme a vydělíme x^ρ: $(\rho^2 - \frac{1}{4}) \sum_0 a_n x^n + (2\rho+1) \sum_0 n a_n x^n + \sum_0 n(n-1) a_n x^n + \sum_2 a_{n-2} x^n = 0$

Vhodná ρ se zdají být $\rho = \pm\frac{1}{2}$

$\underline{\rho = -\frac{1}{2}}$: $\sum_2 (n(n-1)a_n + a_{n-2}) x^n = 0 \Rightarrow n(n-1)a_n = -a_{n-2}$, a_0, a_1 libovolné

$\Rightarrow a_{2m} = (-1)^m \cdot \frac{1}{(2m)!} a_0$

$a_{2m+1} = (-1)^m \cdot \frac{1}{(2m+1)!} a_1$

$\Rightarrow \underline{\underline{y(x) = (a_0 \cos x + a_1 \sin x) x^{-1/2}}}$

$\underline{\rho = 1/2}$: $\sum_2^\infty (n(n+1)a_n x^n + a_{n-2} x^n) + 2a_1 x = 0 \Rightarrow a_1 = 0$, a_0 libovolné

a $n(n+1)a_n = -a_{n-2}$

Odtud $a_{2m+1} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$a_{2m} = (-1)^m \cdot \frac{1}{(2m+1)!} a_0 \Rightarrow y = x^{1/2} a_0 \sum_{m=0}^\infty (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m+1)!}$

$= x^{-1/2} a_0 \sum_{m=0}^\infty (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$

a odtud $\underline{\underline{y(x) = a_0 x^{-1/2} \sin x}}$